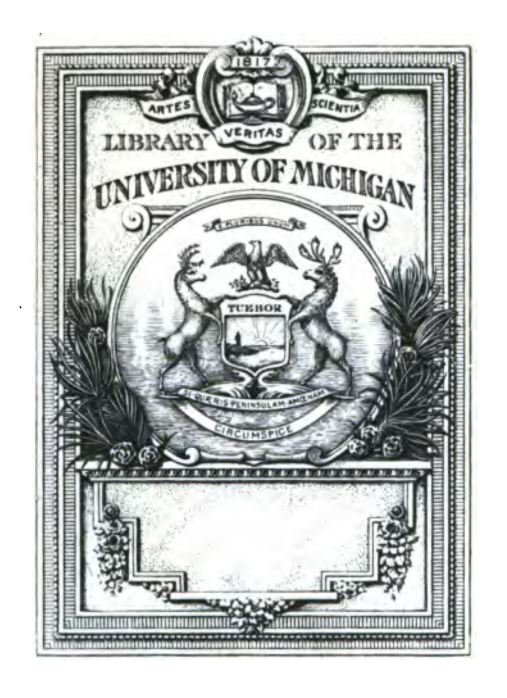
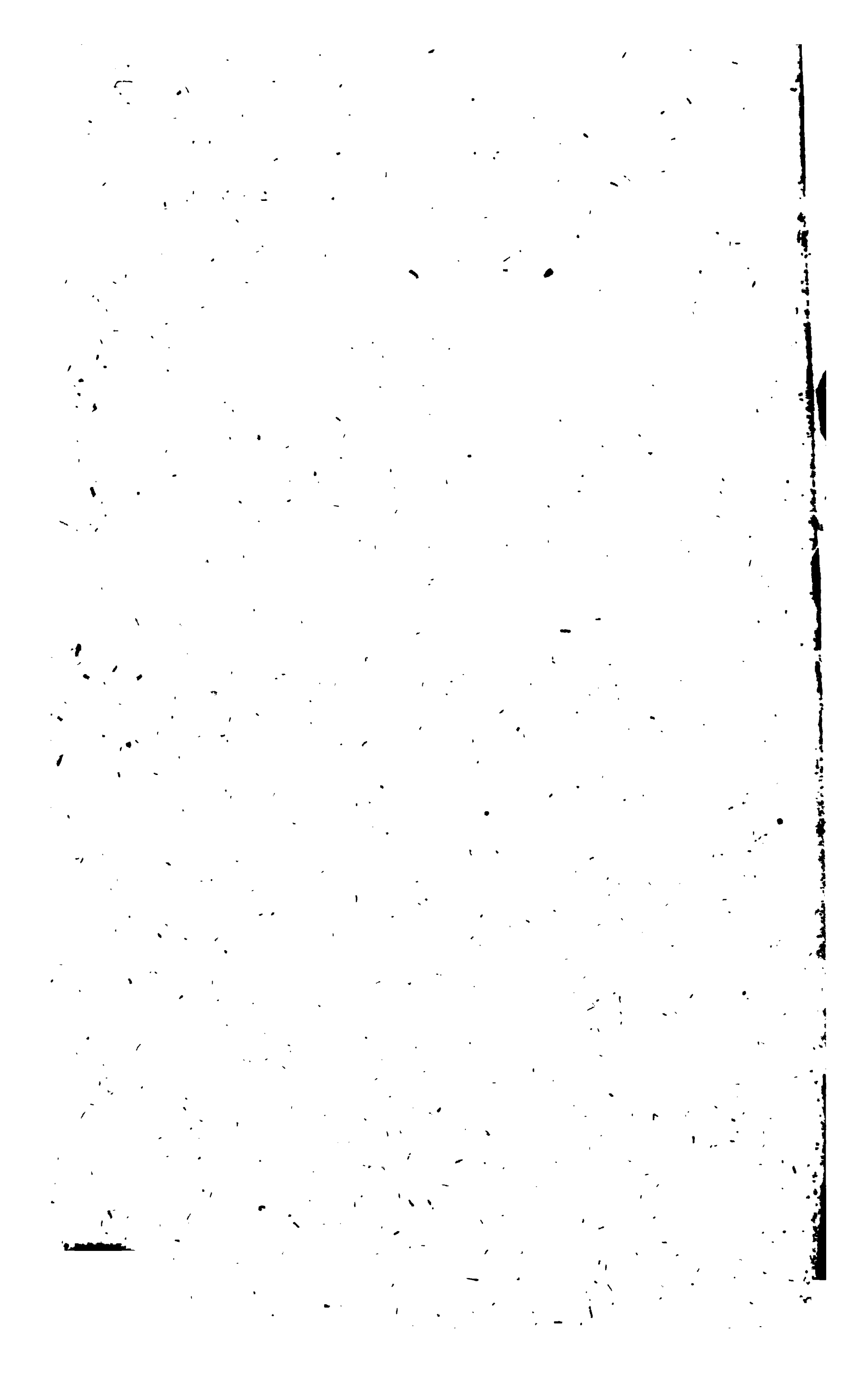

1817
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE



Johann Georg Büsch
Professors in Hamburg

Versuch einer Mathematik

zum Nutzen und Vergnügen des bürgerlichen Lebens,

welcher das

Nutzbarste aus der abstracten Mathematik

und

eine practische Mechanik

enthält.

Zweyte verbesserte Ausgabe.

Mit 18 Kupfern.

Hamburg,
im Verlag des Verfassers und zu Leipzig in Commission bey Carl Ernst Bohn. 1776.



Vorrede
zu dieser zweyten Ausgabe.

So klein die erste vor bald drey Jahren vollendete Auflage dieses Buchs war, so hoffte ich doch, daß sie auf eine hinlängliche Zeit ausreichen würde, um mir eine Frist zu verschaffen, in welcher ich theils dieser Arbeit selbst mehr Vollkommenheit geben, theils die übrigen mechanischen Wissenschaften in eben der Absicht und Art des Vortrages abgehandelt einer neuen Ausgabe beyfügen könnte. Aber ich sahe bald, daß ich mich geirret hätte. Ungeachtet der Schwierigkeiten des Selbst-Verlages, wozu mich die eingeschränkte Absicht der ersten Ausarbeitung zum Gebrauch meiner damaligen Zuhörer veranlaßt hatte, waren doch schon in dem Verkauf des ersten Jahres alle Abdrücke vergriffen, und täglich ward bey mir und an denen Orten, wohin ich sie zum Verkauf gegeben hatte, nach mehreren gefragt. Noch hoffte ich Zeit zu gewinnen, um der zweyten Ausgabe die schon erwähnte Ergänzung und Vorzüge

züge

züge vor der ersten insgesammt zu geben, und zögerte deswegen mit derselben. Allein die fortdaurende Anfrage nach Abdrücken, die ich nicht mehr hatte, so wol, als die Ueberzeugung, daß mir bey meinen sich täglich mehrenden Beschäftigungen in der jetzigen Lage meiner Umstände so bald noch nicht die Musse entstehen werde, jenes zu leisten, hat mich genöthigt, diesen Verzug abzubrechen.

Ich habe also meinen Fleiß darauf einschränken müssen, die alte Auflage bloß durchzusehen, und die zum Theil wichtigen Versehen zu verbessern, welche die eilfertige Ausarbeitung und Abdruck des größten Theils derselben veranlaßt hatten. Das wichtigste von diesen steht S. 221. der ersten Ausgabe, wo ich die Regel zur Berechnung der geometrischen Progressionen durch Hülfe der Logarithmen als allgemein ohne die Nebenbestimmung vorgetragen habe, welche sie erfodert, wenn das erste Glied nicht Eins ist. Ich ward dieses Versehens so spät inne, da es nicht mehr Zeit war, ein umgedrucktes Blatt den noch vorhandenen Abdrücken einzulegen. Um diese Uebereilungs-Sünde auch in den Abdrücken der ersten Ausgabe auszulöschen, in welchen die Einschaltung der ganzen Verbesserung aus dieser neuen Ausgabe nicht wol Statt haben mögte, will ich die Besitzer derselben gebeten haben, S. 221. folgende leichte Correcturen zu machen. Auf der 3ten Zeile soll nach den Worten: **einander multipliciren**, folgen: **und durch das erste Glied dividiren.** Z. 14. nach der Zahl 73728 werde angehängt, oder nebengeschrieben: **Dieß dividirt durch 3 giebt 24576.** Z. 15. nach dem Wort

multi-

multipliciren folge: und durch 3 dividiren. Dann steht Z. 16. für 113246208 die Zahl 1258912. Z. 17. muß nach multipliciren eingeschoben werden: und durch 3 dividiren.

Andre minder erhebliche Verbesserungen und zum Theil beträchtliche Zusätze enthält diese Ausgabe in Menge. Doch ist kein so erheblicher Zusatz hinzugekommen, der mich genöthigt hätte, die Ordnung oder auch nur die Zahl der Paragraphen zu verändern. Die Marginalien sind in dieser Ausgabe weggelassen, und statt deren jeder Abtheilung ein Inhalt derselben nach der Ordnung der Abschnitte und Paragraphen angehängt. Denn aus diesen übersieht man doch besser die Folge und den Zusammenhang des Vortrags in einem Buche dieser Art, als wenn man von Blatt zu Blatt dieselben aus den Marginalien zusammen suchen muß. Ein anderes und stärkeres Register aber, als eine solche Anzeige des Inhalts, hat ein Buch, wie dieses ist, nicht nöthig.

Im übrigen hat mich nicht nur der geschwinde Abgang der ersten kleinen Auflage, sondern noch mehr haben mich die gedruckten und mündlichen Urtheile so vieler würdigen Gelehrten überzeugt, daß ich in der Art des Vortrages und vielleicht auch in dem Maasse der Vollständigkeit, das ich diesem Buche zu geben wählte, es nicht unrecht getroffen habe. Mein Zweck bey demselben war nicht, neue Kenntnisse zu pflanzen, sondern alte Kenntnisse, die zum Theil das Resultat tiefsinniger Untersuchungen, oder die Frucht eines seltenen Beobachtungsgeistes sind, zu verbreiten, oder, wenn ich so reden darf, sie auf einem Acker zu

versäen,

versäen, der diese Cultur eben so sehr als die Fluren des Reichs der Gelehrsamkeit bedarf, auf welchem aber dieser Saame, vielleicht durch Fehler derjenigen, die ihn auch dahin haben ausstreuen wollen, noch nicht recht hat aufgehen wollen. Wird dem Buche dieses Verdienst forthin noch eingeräumt, so bin ich zufrieden. Jetzt halte ich es wenigstens für unnöthig, die Vorrede der ersten Auflage mit abdrucken zu lassen, oder aus ihr dasjenige hier einzutragen, was ich vor drey Jahren zu sagen nothwendig hielt, um die Leser desselben mit der Veranlassung, der eigentlichen Absicht, und den zufälligen oder auch aus der Sache selbst entspringenden Schwierigkeiten der ersten Ausarbeitung bekannt zu machen.

Hamburg den 10ten April 1776.



Vorläufige



Vorläufige Abhandlung von der Mathematik, ihren Theilen und deren Verbindung unter einander.

§. I.

Die Mathematik überhaupt ist die Lehre von den Größen. Sie belehrt uns von den Mitteln und Regeln, die Größen aller Art zu schätzen, und eine Größe aus der andern zu bestimmen. Da nun keine Sache ist, welcher nicht in gewissem Verstande eine Größe könnte beygelegt werden, so sieht man leicht, wie weitläuftig der Umfang dieser Wissenschaft sey.

§. II.

Die Mathematik würde bey einer so großen Mannigfaltigkeit von Dingen, die einen Vorwurf derselben ausmachen, und mit deren Betrachtung sie sich beschäftiget, in eine große Verwirrung gerathen, wenn man die Größen

gleich Anfangs in Verbindung mit denen mannigfaltigen Dingen, an welchen sie sich wahrnehmen lassen, betrachten wollte, und nicht vorher die allgemeinern Wahrheiten vestsetzte, welche von den Größen überhaupt sich erweisen lassen, von welcher Art auch die Dinge seyn mögen, an denen man dieselben wahrnimmt.

§. III.

Man hat also drey Wissenschaften, in welchen man die Größen ohne Verbindung mit denen mannigfaltigen Dingen, die einer Größe fähig sind, betrachtet. Man nennt sie zusammen die **reine oder abstracte Mathematik.** Alle übrige mathematische Disciplinen gehören zu der **angewandten Mathematik.**

§. IV.

Die drey Theile der reinen Mathematik sind die **Arithmetik**, die **Geometrie** und die **Algebra**, deren Unterscheid in folgendem beruhet. Man hat Größen, die aus einer Vielheit von Dingen einer Art bestehen, die bloß im Verstande zu einander gerechnet werden, ohne dem Orte nach mit einander verbunden zu seyn, und die eine Zahl mit einander ausmachen. Diese sind der Vorwurf der Arithmetik. Man hat aber auch die Vorstellung einer Größe in der Ausdehnung der Körper, welche alle einen Raum in die Länge, Breite und Dicke einnehmen, und ein zusammenhängendes Ganzes ausmachen. Mit diesen beschäftigt sich die Geometrie. Man kann aber auch beyde in einer gewissen Verbindung und Uebereinstimmung betrachten. Denn alle ausgedehnte Dinge lassen sich in gleiche Theile eintheilen und werden alsdenn zählbar, und alle Zahlen kann man sich in den Theilen einer Linie, einer Fläche oder eines Körpers vorstellen. In dieser Uebereinstimmung werden sie in der Algebra betrachtet, welche die Größen beyder Art nach

Regeln

Regeln vergleicht, die für eine Art sowol als für die andre zutreffen. Die Trigonometrie wird zwar gewöhnlich als eine besondre Wissenschaft abgehandelt, ist aber ein Anhang der Geometrie. Sie ist eine Wissenschaft, in der man die Theile eines Triangels vermittelst gewisser Zahlen berechnet, um die Fehler zu vermeiden, die in der Zeichnung der Figuren durch Fehler der Hand oder der Werkzeuge sich zu leichte einschleichen.

Anmerkung.

Die eigentliche teutsche Benennung für die Arithmetik ist die Rechenwissenschaft. Als eine Kunst wird sie in den Rechenschulen getrieben, wo man bloß eine Fertigkeit in allen Aufgaben, die in Berechnung der Zahlen vorkommen können, dem Lehrling beyzubringen sucht, dabey sie zugleich auf bestimmte Arten zählbarer Dinge angewandt, und als ein Theil der angewandten Mathematik abgehandelt wird. Die Geometrie, deren Griechischer Name eine Kunst die Weiten auf der Erdfläche zu messen andeutet, wird am füglichsten die Meßwissenschaft genannt. Denn alle Ausdehnung, bey welcher sich ein Maaß oder eine Schätzung der Größe anwenden läßt, gehört für sie. Für die Algebra, eine Arabische Benennung, ist kein veränderter Name in irgend einer Sprache erfunden, außer in der Holländischen, wo man sie die Stel-Konst und ihre Regeln die Stel-Regeln nennt. Man könnte sie die allgemeine Mathematik nennen, wenn nicht dieser Name für gewisse Abhandlungen gewählt wäre, in denen man die allgemeinsten Wahrheiten derselben besonders abgehandelt hat, um die Arithmetischen und Geometrischen Beweise dadurch zu erleichtern.

§. V.

Die erste Anwendung der reinen Mathematik geschicht gewöhnlich in der Lehre von der Bewegung. Alles in der Körperwelt geschicht durch die Bewegung, und also ist die Lehre von derselben überhaupt sehr wichtig für unsre Wißbegierde. Wir haben in unserm Körper Kräfte, deren erster Ursprung uns noch sehr dunkel ist, wodurch wir sowol in

unserm als in andern leblosen Körpern gewisse Bewegungen hervorbringen können. Diese aber, wie auch die Kräfte der Thiere sind nicht stark genug, alle Bewegungen, welche wir wünschen, hervorzubringen, und auch nicht im Stande, die Bewegungen so regelmäßig einzurichten, als es mit unsern Absichten übereinstimmt. Wir brauchen also gewisse Werkzeuge dazu, vermittelst deren wir theils mit Ersparung unsrer Kräfte, oder der Kräfte eines Thiers, theils mit einer gewissen Regelmäßigkeit Bewegungen hervorbringen und unterhalten, welche mit unsern Absichten übereinstimmen. An diesen Werkzeugen oder Maschinen wirkt die Kraft einem gewissen Widerstande oder Last entgegen. Unsre Absicht ist zwar, diese Last zu heben, allein wir verstehen die Maschine genug, wenn wir die Einrichtung einsehen, welche sie haben muß, damit eine gewisse Last durch eine bestimmte Kraft bloß gehalten werde, oder beyde im Gleichgewichte seyn. Denn alsdenn ist es klar, daß nur ein gewisser Zusatz zu der Kraft nothwendig sey, um die Last wirklich zu heben. Die Mechanik, in so fern sie bloß diese Einrichtung der Werkzeuge erläutert, hat den Namen der **Statik**, und Kräfte in diesem Zustande betrachtet heißen **todte Kräfte**. Die allgemeine Lehre von der Bewegung und von den Kräften der wirklich bewegten Körper, welche man **lebende Kräfte** nennt, wird in der Naturlehre gewöhnlich abgehandelt, und hat bey den Gelehrten den Namen Mechanica rationalis, aus welcher aber alle Gründe zu der practischen Mechanik und Statik, und überhaupt viele Dinge entlehnt werden, die für den Gebrauch des gemeinen Lebens großen Nutzen haben.

§. VI.

Zu den Maschinen werden veste Körper angewandt, die auf allerley Art mit einander in Verbindung gesetzt werden. Man hat aber eben so sehr Ursache auf die Bewegung der flüßigen Körper zu achten, und auf die Kräfte, mit welchen insbe=

insbesondre das Wasser auf die Bewegung andrer Körper wirkt. Man hat zwo Wissenschaften, die sich damit beschäftigen: Die Hydrostatik, in welcher das Wasser im Zustande des Gleichgewichts mit sich selbst oder mit andern Körpern betrachtet wird, und die Hydraulik, in welcher man das Wasser in der Bewegung betrachtet, und die Werkzeuge erklärt, welche entweder das Wasser in Bewegung setzen, oder selbst von demselben in Bewegung gebracht und darinn erhalten werden.

§. VII.

Die Luft ist ebenfalls ein flüßiger Körper, aber von einer andern Art, als das Wasser Sie zeigt viele Wirkungen ihres Gewichts und ihrer Bewegung, wovon man zum Vortheile des menschlichen Geschlechts Gebrauch machen kann. Sie ist es, die z. E. in den Saugpumpen das Wasser bis zu einer so großen Höhe treibt, in den Hebern Wein, Wasser u. dergl. in die Höhe steigen macht. Sie erhält das Quecksilber in den sogenannten Wettergläsern in einer gewissen Höhe. Die Wissenschaft, in welcher man von diesen Kräften der Luft handelt, hat den Namen der Aerometrie (Wissenschaft die Luft zu messen.) Sie wird aber am besten nach der Hydrostatik und vor der Hydraulik abgehandelt, da sie sich auf jene gründet, aber auch viele Gründe zur Erklärung desjenigen enthält, was in der letztern abgehandelt wird.

§. VIII.

So wenig wir von der Natur und dem Wesen des Lichts wissen, so gewiß sind wir dennoch von dem Wege, den dasselbe nimmt, und von vielen andern Erscheinungen an demselben. Wir können auch unter gewissen Voraussetzungen, welche die Erfahrung bestättigt, die Art, wie wir sehen, erläutern, und Mittel erfinden, wie wir einem mangelhaften Ge-

sichte zu Hülfe kommen und sogar Dinge sehen können, die wegen ihrer Kleinheit oder Entfernung sonst von dem natürlichen Auge gar nicht gesehen werden können. Die Wissenschaft, die dieses alles erklärt, hat drey Theile: 1) Die **Optik**, in welcher man überhaupt von der Bewegung und den durch die Erfahrung bekannten Eigenschaften des Lichts handelt, auch der Bau des Auges und die Art, wie wir sehen, wie auch die mannigfaltigen Betrüge des Gesichts, erklärt werden. 2) Die **Catoptrik**, welche die Erscheinungen des Lichts erläutert, welche durch solche Körper hervorgebracht werden, die das Licht zurück werfen, von welcher Figur sie auch seyn mögen. 3) Die **Dioptrik**, in welcher die Bewegung des Lichts durch solche Körper erläutert wird, welche zwar das Licht durchlassen, aber es von seinem geraden Wege abbringen, und nach der Beschaffenheit ihrer Materie und Figur allerley Erscheinungen hervorbringen, die sowol für den Nutzen als für das Vergnügen der Menschen ungemein wichtig sind. Die **Perspectiv** wird zwar auch zu den Optischen Wissenschaften gerechnet. Sie gründet sich aber nicht weiter auf die **Optik**, als daß in ihr vorausgesetzt wird, daß das Licht in einer geraden Linie zu uns komme. Im übrigen sind alle ihre Gründe Geometrisch. Sie ist die Wissenschaft, nach welcher die Bilder der Dinge auf einer Fläche so entworfen werden, daß sich das Licht auf eben die Art und in eben der Ordnung darstelle, folglich eben die Figur abbilde, welche das Auge sehen würde, wenn es diese Dinge selbst in ihrer wahren Lage sähe.

§. VIIII.

Die **Astronomie** folgt deswegen auf die **Optik**, weil die optischen Werkzeuge hauptsächlich zur practischen Astronomie erfordert werden, auch viele Betrüge des Gesichts vorkommen, welche man kennen muß, um die wahre Bewegung der Weltkörper recht zu beurtheilen. Doch ist

diese Verbindung nicht so nothwendig, daß man sie nicht sogleich nach der Geometrie und Mechanik lernen könnte. Sie ist die Wissenschaft von dem großen Weltgebäude, von der Beschaffenheit der zu demselben außer unsrer Erde gehörenden Weltkörper, von ihrer Bewegung, und von denen Ursachen, welche diese Bewegung wirken und in ihrer Ordnung erhalten. Die Untersuchungen, welche unsre Wißbegierde in Ansehung des großen Weltgebäudes anstellen kann, folgen sich natürlich in nachfolgender Ordnung: 1) Wie erscheint die Bewegung, sowol des Weltgebäudes überhaupt, als der einzelen Weltkörper? Man hat, um diese anscheinende Bewegung zu bemerken, an der sichtbaren Himmelsfläche, welche unserm Auge kugelförmig erscheint, gewisse Linien und Puncte angenommen, nach welchen der Ort und die Bewegung der Gestirne bestimmt und verglichen wird. Der Theil der Astronomie, in welchem man diese scheinbare Bewegung betrachtet, und sie nach den Erfindungen der Kunst schätzet, wird die Sphärische Astronomie genannt. 2) Ist diese Bewegung in der That so beschaffen, wie sie dem Auge erscheint, oder verbirgt etwa ein Augenbetrug die wahre Bewegung, und wie ist diese eigentlich bewandt? Wie ist es mit den Weltkörpern bewandt, welche uns bey unserer Entfernung von ihnen so klein und undeutlich erscheinen? Was läßt sich von ihrer wahren Beschaffenheit mit Gewißheit, oder mit Wahrscheinlichkeit, behaupten? Sind sie alle einerley Art, haben sie alle einerley Absichten und Bestimmung? Der Theil der Astronomie, welcher diese Untersuchungen enthält, und theils aus den richtigsten Wahrnehmungen, theils durch gegründete Schlüsse und Muthmassungen beantwortet, heißt die Theorische Astronomie. 3) Was haben diese Bewegungen, welche man als die wahren erkennt, für Ursachen, was für Kräfte haben dieselben zuwege gebracht und unterhalten sie noch in der unveränderten Ordnung, die wir dabey wahrnehmen? Sind es eben die Kräfte, durch welche hier auf dem Erdboden Bewegun-

gen hervorgebracht und unterhalten werden, oder sind die Körper jener obern Welt andern Gesetzen unterworfen, und lassen sich diese Gesetze ihrer Bewegung einigermaßen mit Gewißheit erkennen? Dieser Theil wird die **Physische Astronomie** genannt.

Anmerkung.

Die Sphärische Astronomie wird Anfängern durch die sogenannten Himmelskugeln deutlich gemacht, in deren Bewegung die scheinbare Bewegung des Himmels sehr sinnlich nachgeahmt wird. Die Theorische wird aus den Astronomischen Wahrnehmungen erwiesen, von denen die wichtigsten für diejenigen, welche sie nicht selbst anstellen können, in den Astronomischen Handbüchern angeführt, und darauf sowol als auf die Sphärische die Betrachtungen des Himmelslaufs gegründet werden. Die Physische wird in den wenigsten Handbüchern mit abgehandelt. Denn sie setzt den oben erklärten Theil der Mechanik, der von den Kräften der wirklich bewegten Körper handelt, oder die mechanicam rationalem voraus, welche man in den Handbüchern selten berührt.

§. X.

Man hat sonst der Astronomie eine andre Wissenschaft an die Seite gesetzt, durch welche man alle zukünftige Schicksale eines Menschen, ja sogar alle mehr oder minder wichtige Vorfälle in der bürgerlichen Gesellschaft und Körperwelt, aus dem Stande der Gestirne, insonderheit demjenigen, den sie in dem Augenblick der Geburt eines Menschen gehabt hatten, vorhersagen zu können glaubte. Man unterscheidet sie von jener durch den Namen der Astrologie. Die eigentlichste deutsche Benennung für jene ist Sternkunde, und für diese Sterndeuterey. Allein die Achtung derselben ist ganz gefallen, und man erwähnt kaum noch ihres Namens in den Anweisungen zur Mathematik.

Anmer=

Anmerkung.

Es ist kein Wunder, daß bey den Alten diese Kunst so vielen Eingang gefunden und ihr Ansehen so lange erhalten habe. Die gründlichsten Astronomen waren ehemals zugleich Astrologen, oder vielmehr hatten beyde Wissenschaften ehemals nur den Namen Astrologie gemein, und überhaupt hatten die Leute dieser Art den Namen der Mathematiker so an sich gezogen, daß bey den Römern ein solcher oder ein Wahrsager einerley Person war, und man noch die Verordnungen der Kayser lieset, in welchen die Mathematiker in Gesellschaft der Giftmischer und der Spitzbuben erwähnt, und mit einander aus dem Römischen Gebiete verwiesen wurden. Da die Alten den Himmel so unvollkommen kannten, von der Größe und der Entfernung der Himmelskörper so wenig wußten, und nicht anders glaubten, als alle diese wären bloß um der Erde willen da, ohne daß sie den Einfluß derselben aus Gründen angeben konnten, so bemühten sie sich, diesen ihren Einfluß auch ohne Gründe zu errathen, und ergriffen das erste, was ihrer Einbildungskraft vorkam. Zum Unglück waren sehr frühe den Planeten die Namen gewisser heidnischer Gottheiten beygelegt, und die Fix-Sterne, um dem Gedächtniß zu helfen, unter gewisse Figuren gebracht, welche ganz willkührlich gewählt waren, und nur selten mit der Lage der Sterne einigermaßen übereinstimmen. Hieran haftete ihre Einbildungskraft ganz, und da sie nichts bessers in der Kenntniß des Himmels fanden, das sie in ihren Muthmaßungen leiten könnte, so folgerten sie daraus alle Regeln ihrer Wahrsagungen. Dem zufolge mußte ein Knabe, bey dessen Geburt der Planet Mars eben aufgegangen war, nothwendig zanksüchtig, kriegerisch und blutdürstig werden, ein anderer, der etwan eine Stunde nachher gebohren war, da der Planet Saturn aufging, alle die traurige Bosheit an sich haben, welche die alte Fabelgeschichte dem alten Gott Saturn beylegte. Wer sich überzeugen will, wie weit die Menschen in der Reihe der Irrthümer fortgehen können, wenn ein Hauptirrthum sie verleitet hat, dem wird folgende Regel der Sterndeuterey, welche man ganz ernsthaft noch in den Büchern der Astronomen des vorigen Jahrhunderts vorgetragen sieht, hinlänglich seyn: Sie theilten die Zeichen des Thierkreises in solche ein, die eine schöne Stimme haben, die Zwillinge, die Jungfrau, die Waage oder vielmehr Asträa, der diese Waage gehört, den Wassermann und die vördere Hälfte des Schü-

tzen, die, wie bekannt, menschliche Gestalt hat; in die mit schlechter Stimme, den Widder, den Stier, den Löwen, den Steinbock und die hintere Hälfte des Schützen, die von einem Pferde ist; und stumme, nämlich den Krebs, den Scorpion und die Fische. Die ersten bedeuteten dem Kinde eine schöne Stimme, die andern eine schlechte, und ein Kind, das eben gebohren wurde, da der Krebs, der Scorpion und die Fische einen gewissen Stand hatten, lief Gefahr, gar stumm zu bleiben, oder es künftig zu werden, weil die Fische stumm sind. Man wird mir diese weitläuftige Anmerkung zu Gute halten, da ich hier zum ersten und letzten mal von dieser veralteten und fast ganz vergessenen Kunst in dieser Abhandlung rede.

§. XI.

Es scheint in der That wunderbar, daß wir unsre Erde nicht eher recht kennen können, bevor wir den Himmel kennen. Indessen verhält es sich in der That also, und die Geographie, das ist, die Wissenschaft von der Gestalt und Größe der Erde, und der Lage einzelner Länder und Oerter auf ihrer Oberfläche, gründet sich fast ganz auf die Astronomie. Sie nützt die Geometrie nur in der Ausmessung geringerer Weiten, und der Entfernung solcher Länder, die gegen die ganze Oberfläche der Erde nur ein geringes Verhältniß haben. Aber die Lage derselben auf der Erdfläche wird nicht anders als durch die Betrachtung des Himmels vestgesetzt, da kein menschliches Auge die Erdfläche, auch nur auf einer Seite, ganz auf einmal übersehen kann. Die sogenannten Erdkugeln sind auf den Zweck eingerichtet, die Uebereinstimmung in dem Anblick des Himmels und der Lage der Oerter auf der Erdfläche zu erläutern. Allein diese Erdkugeln selbst können nur auf Glauben der Astronomischen Bemerkungen verfertigt werden, und die Lage eines jeden Orts, so wie sie auf denselben bemerkt wird, setzt, wenn sie richtig seyn soll, eine solche Bemerkung voraus. Es ist eben so mit der Wissenschaft der Seefahrt bewandt. Die Seecharten können so wenig als die Landcharten ohne

Kennt-

Kenntniß des Himmels entworfen werden, und der Ort eines Schiffes auf dem Meere wird bloß durch Beobachtung desselben in solchen Gegenden bestimmt, wo der Schiffahrende das Land aus dem Gesichte verliert.

§. XII.

Daß die Bestimmung unsrer Zeit sowol für einzelne Tage als ganze Jahre sich auf die scheinbare Bewegung der Sonne gründe, ist freylich bekannter. Man bestimmt aber dieselbe nicht leicht ohne Beobachtung des ganzen Himmels genau, zumal da in der Bemerkung der Zeit für künftige Jahre die wigtigsten Himmelserscheinungen vorher angezeigt werden müssen. Man rechnet gleichfalls auf diese zurück, um die Zeitrechnung der Geschichte vergangener Zeiten in Ordnung zu bringen, wenn die Geschichtschreiber bey Meldung gewisser Begebenheiten zugleich diese oder jene Erscheinung an dem Himmel bemerken. Es ist also die Chronologie, oder die Wissenschaft, die Ordnung vergangener sowol als künftiger Zeiten zu berechnen, ganz auf die Astronomie gegründet. Doch sind viele willkührliche Dinge durch die Anordnung der Völker, welche ihre Jahre und Monate auf so verschiedene Art bestimmt haben, eingemischt.

§. XIII.

Die Gnomonik, oder die Wissenschaft, Sonnenuhren auf allerley Flächen zu zeichnen, hat ebenfalls ihre Gründe ganz in der Astronomie, wiewohl sie auch die Geographie voraussetzt. Sie wird den Menschen weniger nütze, seitdem die mechanischen Uhren zu einer solchen Vollkommenheit gebracht und so häufig geworden sind, durch welche man die Zeit viel genauer und ohne Hülfe der Sonne, deren Licht so oft dem Sonnenweiser fehlt, anmerken kann.

§. XIIII.

Die übrigen Theile der Mathematik könnte man eher die gemischte als die angewandte Mathematik nennen. In den bisher beschriebenen ist eine beständige Anwendung der Mathematik nöthig, und es kann keine Wahrheit in ihnen ohne dieselbe hinlänglich verstanden und erwiesen werden. In den Bauwissenschaften und der Kriegswissenschaft ist sie freylich überhaupt eben so unentbehrlich. Indessen gründet sich doch in diesen vieles auf die bloße Erfahrung, und wird durch diese ohne weitere Beweisgründe als Wahrheit erkannt. Die Mathematik aber mischt nur hin und wieder ihre Beweise ein, oder giebt die Gründe zu denen Proportionen und Berechnungen an, welche in ihnen nothwendig werden. Die Wissenschaft eines Baumeisters schließt zween Theile ein: 1) Die bürgerliche Baukunst, oder die Wissenschaft, alle Gebäude, die für die Absichten des gesellschaftlichen Lebens dienen, diesen Absichten gemäß sowol zu entwerfen als auszuführen. 2) Die Wasserbaukunst, oder die Wissenschaft, in allen Fällen, wo das Wasser dem Bau entweder Hindernisse in den Weg legt, oder zu gewissen Absichten angewandt und gelenkt werden muß, sicher und dauerhaft zu bauen. Der Umfang derer Wissenschaften und Einsichten, welche um einen vollkommenen Bauverständigen zu bilden nothwendig sind, ist freylich sehr weitläuftig. Allein die Wasserbaukunst erfodert das meiste, und setzt Kenntnisse und Erfahrungen voraus, welche man in der übrigen Baukunst nicht so sehr entbehrt.

§. XV.

Die Schiffsbaukunst ist auf andre Grundsätze gebauet, und beschäftigt sich nicht mit der großen Mannigfaltigkeit von Materialien, welche die schon erwähnten Bauwissenschaften brauchen. Sie erfodert indessen sehr viele Erfahrung, und zu der Theorie derselben muß man Gründe in der

der tiefsinnigsten Mechanik und Hydrostatik suchen. Denn die Figur der Schiffe und ihre Bemastung hat große Geheimnisse, welche sich durch die Erfahrung noch nicht hinlänglich entwickelt haben, und bloß durch die erwähnten beyden Wissenschaften aufgeklärt und unter gewisse Regeln gebracht werden können.

§. XVI.

Die Kriegswissenschaften erfodern überhaupt viele mathematische Kenntnisse. Doch werden in den Handbüchern gewöhnlich nur die Artillerie und der Vestungsbau abgehandelt. Jene ist die Wissenschaft von der vortheilhaftesten Einrichtung des groben Geschützes, welches in den mannigfaltigen Kriegsverrichtungen gebraucht wird, und sie geht daher vor der Wissenschaft von dem Vestungsbau her, welche zur Absicht hat, einen Ort zu bevestigen, daß sich wenige gegen viele mit Vortheil vertheidigen können. Der Vestungsbau hängt also ganz von der Art des Angrifs ab, und verändert sich so, wie sich dieser von Zeit zu Zeit verändert. Die Tactik, oder die Wissenschaft, Kriegsheere in Schlachtordnung zu stellen, und die Wissenschaft, ein Lager zu schlagen, deren Gründe hauptsächlich aus der Geometrie entlehnt sind, findet man in besondern Abhandlungen. Man begreift alle Kriegswissenschaften unter dem Namen der Ingenieurwissenschaft, welche vollständig zu machen die Kenntniß der ganzen Mathematik erfodert wird, und da der Vestungsbau in vielen Fällen die bürgerliche Baukunst nützt, so gehört auch diese insonderheit für den Ingenieur, und man kann nicht leicht in jener Wissenschaft es hoch bringen, und diese verabsäumen.

§. XVII.

Es ist eine sehr genaue Verbindung zwischen der Mathematik und der Naturlehre. Bald setzt man in jener Erfahrungen

rungen voraus, welche die Naturlehre an die Hand giebt, und schließt aus diesen nach Mathematischen Gründen fort. Bald schließt man aus diesen wieder auf die Naturlehre, und beweiset in dieser solche Wahrheiten, welche sich der Erfahrung nicht unterwerfen lassen. Ueberhaupt wird man also die eine Wissenschaft nicht ohne die andre treiben können, und beyde haben in gleichem Fortgange seit ungefähr anderthalb hundert Jahren zugenommen. Die Mechanik, Hydrostatik und alle Optische Wissenschaften, ein großer Theil der Astronomie und der Geographie, werden daher in allen neuern Anweisungsbüchern zur Naturlehre sowol, als in denen zur Mathematik abgehandelt.



Arithmetische
Wahrheiten
zum
Nutzen und Vergnügen
des bürgerlichen Lebens
erläutert.

In eine Abhandlung Mathematischer Wahrheiten zum Gebrauch des handelnden Bürgers gehörte freylich vor allen Dingen eine vollständige Abhandlung von der Arithmetik. Allein ich werde mein Buch nicht auf Dinge ausdehnen dürfen, deren Kenntniß der Stand, für welchen ich schreibe, so nothwendig voraussetzt. Ich übergehe also alles, was der gewöhnliche Unterricht in den Rechenschulen meinen Lesern, mit einer hinlänglichen Uebung in Auflösung der bloß Arithmetischen Aufgaben, bekannt genug gemacht haben wird. Freylich würde mir der Beweis der gemeinsten Arithmetischen Reguln noch vorbehalten bleiben, der in den Rechenschulen so sehr übergangen wird. Allein die Absicht meines Vortrags überhebt mich dessen, nach welcher ich nicht schon bekannte Dinge erweisen, sondern nicht sehr bekannte erklären und den Weg zeigen will, wie sie in der Ausübung nützlich angewandt werden können. Ich finde indessen verschiedene Dinge, die in der gemeinen Arithmetik in unsern Gegenden übergangen werden, aber doch hin und wieder sowol zum Vergnügen, als zum Nutzen angewandt werden können. Das erste von diesen mag die Lehre vom Verhältnisse seyn, welche in den meisten Anweisungsbüchern zur Mathematik sehr dunkel und unvollständig abgehandelt, in den gewöhnlichen Rechenbüchern aber ganz übergangen wird, wiewol sie die Gründe fast aller Rechnungen in sich enthält.

Erster Abschnitt

von dem

Verhältniß und dessen verschiedenen Arten.

§. 1.

Nicht eine jede Beschäftigung unsers Verstandes mit den Zahlen heißt Rechnen. Ich sage nicht, daß ich rechne, wenn ich eine Zahl ausser dem Zusammenhang mit andern Zahlen mir gedenke oder niederschreibe, (z. Ex. diese: 2356;) oder eine gewisse Vielheit von Dingen überzähle. Wenn der Hirte seine Heerde überzählt, und findet, daß er 112 Stück Schafe habe, so rechnet er noch nicht. Wenn er aber überdenkt, wie viel er haben würde, wenn seine Heerde noch einmal so groß wäre, dann bringt er die Zahl 224 nicht ohne Rechnen heraus. Wenn der Kaufmann den baaren Vorrath einer gewissen Art Münze aus dem Kasten, der denselben enthält, überzählt, so rechnet er noch nicht. Wenn er aber den Werth dieser Münze mit einer andern Art Geldes vergleicht, und die Zahl, welche er bey jenem Gelde fand, in eine andre, z. Ex. in Bancogeld verwandelt, die aus dem Werth dieser zweyten Art von Gelde bestimmt wird, alsdann ist die Beschäftigung nöthig, welche wir Rechnen nennen. **Kurz, die Absicht alles Rechnens ist, Zahlen aus einander nach gewissen Reguln zu erfinden.** Was haben aber diese Reguln, die so sehr von einander verschieden sind, für einen Grund, und warum wählen wir in der Berechnung einer Zahl diese, in der Berechnung einer andern Zahl eine andre Regul? Deswegen, weil wir uns bey einer jeden Zahl, die wir suchen, eine besondre Art gedenken, wie sie aus einer andern Zahl bestimmet wird. Z. Ex. Ich suche die Zahl, welche aus 36 bestimmt wird oder entsteht, wenn 28 hinzukommen. Ich wende also die Regul an, nach welcher ich weiß, daß

 Zahlen

Zahlen unter dieser Bestimmung aus einander gefunden werden können. Ich verlange die Zahl zu wissen, welche bestimmt wird, wenn 36. 28 mal genommen wird. Nun wird eine andre Regul genommen, und ich finde die Zahl 1008. Oder ich weiß daß 100 Pfund einer gewissen Waare 35 rthl gelten, und ich will den Preis von 780 ℔ wissen. Ich sehe ein, daß dieser Preis aus der Zahl 35 auf eben die Art bestimmt werden müsse, wie die Zahlen der Gewichte 100 und 780 aus einander bestimet werden. Ich wende also wieder eine andre Regul an, und finde die Zahl 273.

§. 2.

Ich eile, diese Sache mit ihrem rechten Namen zu benennen. **Die Art, wie Zahlen und Größen aus einander entstehen, ist ihr Verhältniß.**

Anmerkung.

Der Ausdruck Verhältniß wird keinem meiner Leser neu seyn. Man redet im gemeinen Leben so viel von Verhältnissen. Man gebraucht sehr oft den Ausdruck: dieses oder jenes habe ein gutes oder ein schlechtes Verhältniß, wenn man Größen mit einander vergleicht, wiewol ohne den Begrif dieses Worts deutlich zu entwickeln. Ich habe indessen angemerkt, daß überhaupt das Wort Proportion bekannter sey, und daß man diese Ausdrücke fast immer nur bey ausgedehnten Größen gebrauche, bey Zahlen aber nur selten, und es sind nur wenig Rechenbücher, in denen auch nur das Wort Verhältniß erwähnt, vielweniger die Begriffe desselben erläutert, und die Arithmetischen Reguln daraus hergeleitet wären. Die jetzt gegebenen Erläuterungen zeigen indessen hinlänglich, daß man sich überhaupt im Rechnen mit den Verhältnissen beschäftige, und die Sache ist also wichtig genug, um noch etwas mehr von ihr anzuführen, wenn ich vorher folgende Zeichen erläutert habe, deren die Mathematikverständige sich bedienen.

Die Gleichheit von zwo Größen wird durch dieses Zeichen (=) bemerkt.

Das Zeichen (+) deutet eine Verbindung der Größen in einer Summe an. Z. Ex. $6 + 8 = 14$.

Das Zeichen (—) bedeutet den Unterschied zwoer Zahlen. Z. E. $8-6=2$.

Die Multiplication zwoer Zahlen deutet das Zeichen ($\times$) an. Z. Ex. $8\times6=48$.

Die Division wird bald durch das Zeichen (:) bald durch einen Strich, über welchem die zu dividirende Zahl und darunter der Divisor steht, angezeigt. Z. Ex. $24:6$ oder $\frac{24}{6}=4$.

Man braucht diese Zeichen mit großem Nutzen, um die Art, wie die Größen entstanden sind, zu bemerken, wenn man diese oder jene Wahrheit weiter daraus herleiten will. Z. Ex. $\frac{3\times8}{6}=4$ bedeutet, daß die Zahl 4 hier entstanden sey, da man 8 durch 3 multiplicirt und durch 6 dividirt habe. $\frac{36}{3\times3}=4$, $\frac{2\times3\times8}{2\times6}=4$ deuten auf andre Entstehungsarten eben dieser Zahl.

Product ist die Benennung einer durch Multiplication, und Quotient einer durch die Division entstandenen Zahl.

§. 3.

Ein jeder wird bemerken, daß einerley Zahl ihm bald auf diese bald auf jene Art entstehe (oder, wie der Ausdruck der Rechenmeister ist, im facit zu stehen komme.) Wenn ich 6 zu 18 addire, so entsteht 24. Wenn ich sechs 4 mal nehme, so habe ich eben diese Zahl, aber auf eine ganz andre Art. Dort wurde nur zu der Zahl 6 die Zahl 18 gesetzt, welche der Unterschied der Zahl 6 und 24 war. Hier wurde die Zahl 6 wiederholtemale, nämlich 4 mal, zu sich selbst gesetzt. Wenn ich 9 von 33 abziehe, wird ebenfalls die Zahl 24, wie auch, wenn ich $\frac{1}{11}$ von 33. 8 mal zu sich selbst setze. Man wird an dieser einzigen Zahl 24 unendlich viele Exempel nehmen können, da sie immer auf eine andre Weise entsteht. Doch werden sich bey allen Zahlen überhaupt zwo Arten, wie sie entstehen, bemerken lassen. Die erste Art, wenn aus einer Zahl durch Hinzusetzung oder Wegnehmung einer andern Zahl eine neue Zahl entsteht, ist das Arithmetische Verhältniß. Die hinzugesetzte oder weggenommene Zahl ist alsdenn der Unterschied

schied der gegebenen und der gefundenen Zahl. Die zweyte Art, wenn eine Zahl durch wiederholte Zusammensezung einer andern oder eines Theils derselben entsteht, ist das Geometrische Verhältniß, welches man auch kürzer so erklären kann: Es ist die Art, wie zwo Zahlen in einander enthalten sind.

Anmerkung.

Das eine oder das andre von diesen Verhältnissen hat allemal Statt, wenn man Zahlen aus einander bestimmt oder herleitet. In der Addition mache ich Zahlen nach einem Arithmetischen, in der Multiplication Zahlen nach einem Geometrischen Verhältniß aus einander entstehen.

§. 4.

Es ist oft von grosser Wichtigkeit für uns, die Art genau zu wissen, wie eine Zahl aus der andern entstehe, das ist, ihr Verhältniß einzusehen. Man erlaube mir, aus denen Geschäften, welchen sich meine Leser widmen, meine Beyspiele zu nehmen. Gesetzt, sie hätten eine Summe von 200 Mk. aus den Händen eines Mannes zu heben, der aber das Recht hätte, unter allerley Vorwand für gewisse Unkosten ꝛc. ein gewisses zurück zu behalten. Er zahlt ihnen also 173 Mk. aus. Dieses ist eine Zahl, die aus der Zahl 200 auf gewisse Art bestimmt ist, durch Abzug eines Theils derselben, der nun der Unterschied von 200 und 173 ist. Sie werden diese Summe nicht so bald empfangen, da sie diesen Unterschied untersuchen werden. Denn es ist ihnen daran gelegen, zu wissen, ob jener auch die Zahl Geldes, die er ihnen auszahlt, auf die rechte Art aus der Zahl des Geldes, die er in Händen hatte, bestimmt, oder ob er die Summe, die er ihnen schuldig ist, in gebührendem Verhältniß vermindert habe. Oder sie haben 1000 mk von einem Manne mit billigen Zinsen zu fodern, er giebt ihnen am Ende des Jahrs 1040 mk. Sie werden so gleich Ueberschlag machen, auf was für eine Art er die Zinsen aus dem

Capital

Capital bestimmt habe. Oder sie geben einem Wechsler 1000 mℓ Cour. und verlangen eine gebührende Summe Bancogeld dafür. Er rechnet ihnen dafür 793 mℓ 10 ß 4 ₰ an, eine Summe, deren Zahl er aus der Zahl 1000 nach einem gewissen Verhältnisse, nämlich dem Verhältniß von 126 zu 100 bestimmt hat, das sie nothwendig wissen müssen, um gewiß zu seyn, daß sie keinen Schaden leiden.

Meine Leser wissen, wie sie in diesen Fällen zu rechnen haben. Sie werden aber bemerkt haben, daß in leichtern oder schwerern Fällen von der letztern Art allemal die Division angewandt wird. Denn die Division ist diejenige Rechnung, welche anzeigt, wie vielmal eine Zahl in der andern enthalten, oder auf was für eine Art die Zahl aus der andern oder aus Theilen derselben zusammengesetzt sey.

§. 5.

Das Verhältniß von zwo Zahlen wird nicht ohne eine dritte Zahl deutlich eingesehn. Bey dem Arithmetischen Verhältniß ist diese Zahl der **Unterschied**, und wird durch die Subtraction gefunden. Bey dem Geometrischen ist es der **Quotient**, der durch die Division beyder Zahlen gefunden wird, und mir anzeigt, auf was für eine Art eine Zahl in der andern enthalten sey. Allein diese Zahl bekömmt in Absicht auf das Verhältniß in der Mathematik einen andern Namen, und heißt der **Name** oder **Exponent** des Verhältnisses. So ist z. Ex. bey den Zahlen 8 und 24 die Differenz, die ihr Arithmetisches Verhältniß anzeigt, 16, und 3 ihr Exponent, der ihr Geometrisches Verhältniß entdeckt.

§. 6.

Wir wollen die Betrachtung des Arithmetischen Verhältnisses bey Seite setzen, da dasselbe weniger, als das Geometrische vorkömmt. Der Exponent des Verhältnisses zwoer Zahlen dient nicht nur, einzelne Verhältnisse zu bestimmen, sondern auch mehre Verhältnisse zu vergleichen.

Wenn ich 20 durch 4 dividire, so weiß ich das Verhältniß dieser Zahlen aus dem Quotienten oder Exponenten 5. Ich weiß aber auch, daß das Verhältniß dieser Zahlen mit dem Verhältniß der beyden Zahlen 6 und 30 einerley sey, weil auch bey diesen die Division den Exponenten 5 giebt.

Diese Gleichheit der Verhältnisse wird die Proportion genannt.

§. 7.

Man beschäftigt sich mit diesen Proportionen in allen Kaufmännischen Rechnungen, bey denen die Regul de Tri oder die Proportions-Regul angewandt wird. Die Absicht dieser Regul ist, eine Zahl zu finden, die sich zu einer gewissen Zahl auf eben die Art geometrisch verhält, wie sich zwo andre Zahlen zu einander verhalten. Es ist z. Ex. eine durch die ganze Welt eingeführte Sache, daß die Preise der Waaren in eben dem Verhältnisse steigen oder abnehmen, als das Gewichte, Zahl oder Maaß der Waare, wenn sie durchaus von einerley Güte ist, steigt oder abnimmt. Gesetzt also, der Preis von 100 Pfunden einer gewissen Waare sey 35 mℊ, so erfahre ich den Preis von 1240 ℔, wenn ich diejenige Zahl bestimme, welche sich zu 35 auf eben die Art verhält, wie sich 1240 zu 100 verhält. Es ist bekannt, daß diese Zahl also gesucht wird: Man multiplicirt die zweyte und dritte Zahl, nachdem sie gehörig geordnet worden, durch einander, und dividirt ihr Product durch die erste Zahl. Man kann die Gründe dieser Regul nicht einsehen, ohne vorher folgenden Satz verstanden und aus seinen Gründen eingesehen zu haben: **Wenn vier Zahlen in geometrischer Proportion (oder gleichem Verhältnisse) stehen, so ist das Product der ersten und lezten Zahl gleich dem Product der beyden mittlern Zahlen.** Man wird den Grund dieser Wahrheit auf folgende Art ohne Schwierigkeit einsehen. Man nehme diese Zahlen zum Exempel: 12. 16. 18. 24. Sie verhalten sich auf einerley Art zu einander. Denn 16 enthält $\frac{4}{3}$

von

von 12 und 24 ebenfalls $\frac{4}{3}$ von 18. Folglich ist es einerley, 16 zu nennen, oder $\frac{4}{3} \times 12$, und 24, oder $\frac{4}{3}$ mal 18, und die Proportion: $12 : \frac{4}{3} \times 12 = 18 : \frac{4}{3} \times 18$ ist einerley mit jener $12 : 16 = 18 : 24$. Man sieht aber nun leichte, daß, wenn man 12 durch $\frac{4}{3} \times 18$, und $\frac{4}{3} \times 12$ durch 18 multiplicirt, eigentlich einerley Zahlen mit einander multiplicirt werden, und folglich aus beyden nur gleiches heraus kommen könne. Ich würde diesen Beweis leicht allgemein machen können, wenn ich in dieser Abhandlung allgemeine Zeichen statt der Zahlen anwenden mögte. Indessen wird man ihn bey allen Proportionen, bey welchen man ihn anwenden will, bestätigt sehen.

Nun setze man eine unvollkommne Proportion, bey welcher die vierte Zahl fehlt, z. Ex. diese:

$$100 : 1240 = 35.$$

Man sieht leicht, daß dieses keine andre Zahl sey, als diejenige, welche 100 mal genommen so viel als 35×1240 das ist 434000 ausmacht, oder, welches einerley ist, die Zahl, welche in 43400 hundertmal enthalten ist. Sie muß also durch die Division durch 100 gesucht werden, und es findet sich, daß sie 434 sey. Die Proportion wird also vollständig diese seyn: $100 : 1240 = 35 : 434$ und 434 ist der Preis von 1240 ℔ einer gewissen Waare, von welcher 100 ℔ 35 mℊ gelten, weil sich diese Zahl zu 35 auf eben die Art, wie 1240 zu 100 verhält.

§. 8.

Oft aber ist es nicht bloß das Verhältniß von zwo Zahlen, nach welchem zwo andre Zahlen aus einander bestimmt werden müssen, sondern man muß die Verhältnisse mehrerer Zahlen in Betrachtung ziehen, um die gesuchte Zahl heraus zu bringen. Wenn z. Ex. die Zinsen eines Capitals von 30000 mℊ für ein ganzes Jahr in dem Verhältnisse 100 : 4 vestgesetzt sind, so ist, wenn die Zeit in der Frage unverändert bleibt, dieses Verhältniß hinlänglich, um die Zinsen

von 30000 mℓ zu bestimmen. Wenn aber die Frage nach dem Belauf derselben für eine andere Zeit, z. Ex. für 3 Jahre ist, so sieht man leicht ein, daß auch das Verhältniß der Zeit in Betrachtung zu ziehen ist. Gesetzt auch, es wäre bey den Zinsen verabredet, daß sie allemal in Banco in dem Verhältniß 120 zu 100 bezahlt werden sollten; so wäre ein drittes Verhältniß, nämlich das von dem Courant zu Bancogelde, welches die aus jenen beyden Verhältnissen bestimmte Zahl verändern würde. Man sieht leicht aus demjenigen, was bereits von der Natur der Verhältnisse und Proportionen angemerkt worden, daß man die Zahl, auf welche es hier eigentlich ankömmt, ganz richtig auf nachfolgende Art finden werde. Man setze zuerst: Wie 100 sich zu 4 verhält, so verhält sich 30000 zu 1200, das ist, denen Zinsen, die für ein Jahr zu bezahlen wären. 2) Wie 1 Jahr sich zu 3 Jahren verhält, so verhalten sich 1200 mℓ zu 3600, den Zinsen für 3 Jahre. Endlich 3) wie 120 sich zu 100 verhält, so verhalten sich 3600 mℓ Cour. zu 3000 mℓ Banco. Allein es läßt sich aus der Natur der Verhältnisse und Proportionen erweisen, daß sich diese Zahl unmittelbar aus der Zahl 30000 finden lasse, wenn man die Zahlen der Verhältnisse, aus welchen dieselbe bestimmt werden muß, gehörig unter einander ordnet, sie durch einander multiplicirt, und zu ihren Producten und der Zahl 30000 die vierte Proportionalzahl sucht. Dieß ist die bekannte Kettenrechnung.

Anmerkung.

Ich kann nicht umhin, für diejenigen, welche nicht gerne etwas ganz ohne Gründe annehmen, einigermaßen zu erläutern, warum beyde Rechnungen zu einem Zweck führen, und daß es einerley sey, ob man eine Zahl durch Berechnung einzelner Verhältnisse nach und nach, oder nach der Kettenregul aus denen Zahlen, welche die Producte geben, berechne.

Wenn vorhergehende Rechnung nach der Kettenregul ausgeführt wird, so sieht man wol, daß die zuletzt gefundene Zahl

sey

sey = 4 × 3 × 100 × 30000 dividirt durch 100 × 1 × 120. Denn der Rechnungssatz ist folgender:

100 : 4
1 : 3
120 : 100
30000

100 × 1 × 120 = 12000 : 36000000 = 4 × 3 × 100 × 3000.

Die Division giebt 3000 und diese Zahl wird für die gesuchte angenommen.

Die Rechnungssätze nach der ersten Art sind folgende:

$$100 : 4 = 30000 : \frac{30000 \times 4}{100} = 1200$$

(oder 1200)

$$1 : 3 = \frac{30000 \times 4}{100} : \frac{30000 \times 4 \times 3}{100 \times 1} = 3600$$

(oder 3600)

$$120 : 100 = \frac{30000 \times 4 \times 3}{100 \times 1 \times 100} : \frac{3000 \times 4 \times 3 \times 100}{100 \times 1 \times 120}$$

Die letzte Rechnung hat nichts undeutliches für den, der die Regul de Tri nach Gründen einsieht: Die Kettenrechnung wendet aber eben die Zahlen zur Multiplication der Zahl 30000 an, welche in jener sie nach und nach multipliciren, und dividirt durch eben die Zahlen, welche in jener sie nach einander dividiren. Ich sehe es indessen für den leichtesten Weg an, um es in der Kettenrechnung zur gehörigen Fertigkeit zu bringen, und in der Ordnung der Sätze gewiß zu werden, wenn der Rechenschüler anfangs nach der ersten Methode angeführt wird, Zahlen aus mehr als einem Verhältnisse und durch verschiedene Sätze zu berechnen, alsdenn aber die Berechnung eben dieser Zahlen nach der Kettenregul zu wiederholen gewöhnt wird. Der Vortheil der letztern besteht aber darinn. Weil das Verhältniß der Zahlen unverändert bleibt, wenn man sie durch eine dritte Zahl dividirt, so sieht man bey den Zahlen, die in derselben einander multipliciren sol-

 len,

len, gewöhnlich eine Menge Divisoren ein, welche die Multiplication sehr abkürzen. Z. Ex. Die Zahlen:

100 : 4
1 : 3
120 : 100
30000 verändern sich durch die Division durch 100 durch 4 durch 3 und durch 10 in diese:

1 : 1
1 : 1
1 : 1
3000

und die gesuchte entsteht hier ganz ohne weitere Division. Ich kann zwar ähnliche Abkürzungen bey jenen einfachen Sätzen vornehmen, allein nicht so viele, weil ich nur zwo Zahlen zur Zeit vergleichen und durch die Division abkürzen kann.

§. 9.

Alle Vorfälle, in denen man die Regul de Tri, die Kettenregul, und alle auf dieselben sich gründende Rechnungen anwendet, gehen dahin aus, das man zu einer gegebenen Zahl eine andre in dem Verhältnisse zwo anderer gleichfalls gegebenen Zahlen, finden will. Die dritte Zahl hat immer eine gewisse Beziehung auf eine der beyden ersten, wodurch man angeleitet wird, die Zahlen auf gewisse Art zu ordnen. Wenn z. Ex. die Frage ist, wie groß ist das Arbeitslohn für 46 Arbeiter für eine gewisse Zeit, in welcher 10 Arbeiter 100 m℔ von mir verdient haben, so ist das gegebene Verhältniß 10:46, und ich ordne die Zahlen auf folgende Art:

$$10:46 = 100:N.$$

weil 100 sich auf 10 und N, welches ich noch finden soll, auf 46 bezieht. Allein bey der verkehrten Regul de Tri giebt es Fälle, wo man nicht auf eine ähnliche Art die Zahlen ordnen darf, z. Ex. in dieser Frage: Ein Vorrath von Lebensmitteln ist hinlänglig für 80 Menschen auf 36 Tage; für wie viele Menschen wird er auf 96 hinlänglich seyn? Hier bezieht sich freylich 80 auf 36 und die gesuchte Zahl auf 96.

Allein

Allein ich würde sehr fehlen, wenn ich die gegebenen drey Zahlen so wie vorhin (36:96 = 80:N) ordnen wollte. Ihre rechte Ordnung wird diese seyn:

96:36 = 80:N.

Denn es kommt hier auf die Zahl von Menschen an, welche 96 mal genommen, eben so viel tägliche Mundportionen erfodern, als 80 Menschen 36 mal, oder für so viel Tage, genommen, brauchen. Man wird sich hier also ausdrükken: Wie sich 96 Tage zu 36 Tagen verhalten, so verhält sich umgekehrt die Zahl 80 der Menschen, die in der lezten Zeit von dem Vorrath leben können, zu derjenigen, welche in der der ersten Zeit davon leben werden. Man hat für diese Fälle eine besondre Regul, die man die verkehrte Regul de Tri nennt, angegeben, welche eigentlich nichts besonders hat, sondern nur blos eine Aufmerksamkeit auf die Umstände des Rechnungsfalls erfodert, nach welchen die Zahlen nicht nach ihrer natürlichen Beziehung auf einander, sondern umgekehrt geordnet werden müssen.

Eben diese Aufmerksamkeit wird bey Fällen, wo die Natur die Verhältnisse bestimmt, erfodert, wo dem ersten Anscheine nach alle Zahlen gegeben zu seyn scheinen, aus welchen eine gesuchte vierte Zahl gefunden werden könne, die Umstände der Sache aber, oder gewisse Naturgesetze ein ganz anderes Verhältniß an die Hand geben. Gesetzt, man wüßte durch einen Versuch, daß aus einem großen Gefäße von 240 Quartieren in 2 Minuten 5 Quartiere ausgelaufen wären, und die Frage wäre, wie bald sich dasselbe ganz ausleeren werde. Man würde diese Frage durch die Regul de Tri aus den Zahlen 5, 240 und 2 gar nicht beantworten können, weil ein Gefäß sich immer langsamer ausleert, je weniger Wasser darinn ist. Es ist durch die Erfahrung ausgemacht, daß ein Körper in einer Stunde $15\frac{1}{4}$ Schuh falle. Wäre die Frage, wie weit der Körper in einer Zeit von 7 Secunden fallen werde, so würden die Zahlen 1, 7 und $15\frac{1}{4}$ ebenfalls nicht hinlänglich seyn, um die gesuchte

gesuchte Zahl zu finden, weil die Natur hier ein ganz anders Gesetz lehrt, und die Körper nicht in mehr Secunden gleich weit, sondern immer geschwinder fallen.

Zweyter Abschnitt,
Erläuterung der Bruchrechnung
und insbesondere
der
Rechnung in zehntheiligen Brüchen.

§. 10.

Die Lehre von den Brüchen gründet sich ganz auf die Lehre von den Verhältnissen. Denn die Brüche sind nichts anders als Zahlen, welche das Verhältniß gewisser Theile oder eines Theils zu einem gewissen Ganzen ausdrücken. Dieses Ganze darf nicht immer eine Arithmetische Einheit seyn, sondern eine jede Zahl kann dafür angenommen, und eine jede andre Zahl kann damit verglichen werden, in so fern man sie als einen Theil oder als aus den Theilen jener Zahl zusammen gesetzt ansieht. So wird z. E. die Zahl 8 zu einem Bruche $\frac{1}{3}$, in so fern man sie als einen Theil der Zahl 24 betrachtet; sie wird aber zu dem Bruche $\frac{4}{3}$, in so fern man sie, als aus dem Theil 2 der Zahl 6 zusammen gesetzt, ansieht.

§. 11.

Wenn also das Ganze die Arithmetische Einheit oder einerley Zahl ist, so sind die Brüche gleich, welche zu einem solchen Ganzen einerley Verhältniß haben, oder welche aus ihrem Ganzen auf einerley Art entstehen. Man beurtheilt dieses Verhältniß aus der Vergleichung des Zählers und des Nenners, und man achtet daher mehrere Brüche einander gleich, wenn ihre Zähler und

Nenner

Nenner sich auf einerley Art zu einander verhalten. So ist z. E. der Bruch $\frac{12}{20}$ den Brüchen $\frac{9}{15}$ und $\frac{3}{5}$ gleich; weil sich 12 zu 20 verhält, wie 9 zu 15, und auch wie 3 zu 5.

§. 12.

Die Vergleichung der Brüche, die wirklich einander gleich sind, ist also leicht, wenn man überhaupt Verhältnisse mit einander zu vergleichen weiß. Man hat aber oft nöthig, ungleiche Brüche durch verschiedene Rechnungsarten zu vergleichen, und man kann dieses nicht wol thun, als wenn sie einerley Benennung haben. Denn so lange Dinge nicht einerley Benennung haben, sieht sie der Verstand als Dinge von verschiedener Art an, und ihre Zahlen lassen sich nicht wol mit einander vergleichen. So ist es z. E. mit den Brüchen $\frac{3}{5}$ und $\frac{2}{7}$ bewandt. Sie lassen sich durch keine Rechnungsart genau mit einander vergleichen, so lange sie diese verschiedene Benennungen haben. Es steht uns aber nicht frey, dem einen Bruche die Benennung des andern unmittelbar zu geben, und z. E. $\frac{3}{5}$ in $\frac{3}{7}$ zu verwandeln, indem der Werth und die Größe des Bruchs unverändert bleiben, und wenn gleich die Zahlen, die den Bruch ausdrücken, verändert werden, doch das Verhältniß derselben; (§. 10.) ungeändert bleiben muß. Der Bruch $\frac{2}{7}$ wäre nun freylich $\frac{10}{7}$ eines Fünftheiles gleich. Denn $7:2 = 5:\frac{10}{7}$, und also ist (§. 11.) $\frac{2}{7} = \frac{\frac{10}{7}}{5}$. Allein ein Bruch in einem Bruche verwirrt die Vorstellung von dessen Größe, und also bringt man lieber die Brüche auf diese Art zu einer Benennung, ohne ihren Werth zu ändern, daß man beyder ihre Zähler und Nenner durch eine dritte Zahl multiplicirt oder dividirt, die man so wählt, daß in dem Nenner einerley Zahl entsteht, aber auch das Verhältniß des Zählers und des Nenners unverändert, folglich ein jeder Bruch so groß bleibt, als er vorher war. Man multiplicirt also den Zähler und den Nenner des Bruches

$\frac{3}{5}$ durch 7, und nimmt den Bruch $\frac{21}{35}$ als demselben gleich an. Der Zähler und der Nenner des Bruchs $\frac{2}{7}$ werden durch 5 multipliciret, und nun wird $\frac{10}{35}$ jenem Bruche $\frac{2}{7}$ gleich geschätzt.

§. 13.

Man setzt hiebey die Arithmetische Wahrheit voraus, daß, wenn zwo Zahlen durch eine dritte multiplicirt oder dividirt werden, ihr Verhältniß unverändert bleibe. Dieser Satz ist überhaupt in Exempeln nicht schwer einzusehen, wiewol ein förmlicher Beweis desselben etwas weitläuftig seyn würde. Wenn ich nämlich hier 3 und 5 durch 7 multiplicire, so vergrößere ich die Einheiten und Theile dieser beyden Zahlen auf einerley Art, und nehme für jedes Eins in 3, die Zahl 7, und für jedes Eins in 5 ebenfalls 7. Es haben also die Zahlen 21 und 35 zwar größere Theile als vorhin, nämlich 7 statt 1, aber eben so viel dieser Theile, nämlich 3 und 5, und verhalten sich daher eben so, wie diese Zahlen zu einander. Wenn ich dagegen zwo Zahlen 35 und 21 durch eine dritte 7 dividire, so verkleinere ich die Theile beyder Zahlen, und nehme statt 7 nur Eins, verändre aber die Zahl der Theile selbst nicht, so daß sich 5 und 3 noch eben also, als vorhin 35 und 21 verhalten.

§. 14.

Wenn nun Brüche nach diesen Reguln zu einerley Benennung gebracht sind, so sieht man leicht ein, daß, um sie mit einander zu addiren, nur die Zähler zu einander gerechnet werden, und, um sie von einander abzuziehen, nur der Unterschied der Zähler gesuchet werden müsse. Ihre Nenner aber kommen eben so wenig in Betrachtung, als überhaupt in der Addition und Subtraction der Zahlen die Benennungen derselben in Betrachtung kommen.

§. 15.

§. 15.

Die Regul von der Multiplication der Brüche macht den Rechenschülern mehr Schwierigkeit. Sie wird sich am leichtesten durch folgenden Beweis, dergleichen man eine Induction nennt, einsehen lassen. Man setze: der Bruch $\frac{2}{5}$ sey durch den Bruch $\frac{3}{4}$ zu multipliciren. Ich schliesse auf folgende Art:

Wäre $\frac{2}{5}$ durch eins zu multipliciren, so bliebe es $\frac{2}{5}$, (das ist $1 \times \frac{2}{5}$ ist $= \frac{2}{5}$.)

Wäre er durch $\frac{1}{4}$ zu multipliciren, so müßte das Product überhaupt kleiner als das vorige ($1 \times \frac{2}{5}$), und zwar deswegen viermal so klein seyn, weil nur der vierte Theil desjenigen da seyn soll, was in dem vorigen Product war. Nun mache ich den Bruch $\frac{2}{5}$ viermal so klein, wenn ich die Zahl der Theile (2) zwar unverändert lasse, aber dagegen viermal kleinere Theile, nämlich $\frac{2}{20}$ nehme. Also ist $\frac{1}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{20}$.

Ich soll aber $\frac{2}{5}$ nicht durch $\frac{1}{4}$, sondern durch $\frac{3}{4}$ multipliciren. $\frac{3}{4}$ ist dreymal mehr als $\frac{1}{4}$. Das Product, welches ich vorhin hatte, ($\frac{2}{20}$) wird folglich dreymal größer werden. Es ist aber dreymal größer, wenn ich dreymal so viel der in ihnen benannten Theile, das ist anstatt $\frac{2}{20}$, $\frac{6}{20}$ nehme.

Wenn man eine solche Induction bey mehreren Brüchen wiederholt, so wird man bald auf die Regul geleitet werden, daß **das wahre Product der Brüche entstehe, wenn man den Zähler durch den Zähler, und den Nenner durch den Nenner multipliciret.**

Anmerkung.

Es ist nun leicht einzusehen, warum die sogenannten reinen Brüche, das ist solche, die kleiner als die Einheit sind, immer ein kleiner Product geben, als beyde Brüche. Wenn der Bruch einmal genommen wird, bleibt er unverändert. Wird er aber weniger als einmal genommen, so wird er kleiner, als er vorhin war.

§. 16.

§. 16.

Ich werde auf eben die Art die Division der Brüche verständlich machen können. Es sey z. E. die Aufgabe, $\frac{2}{5}$ durch $\frac{3}{4}$ zu dividiren. Die Frage, welche hiebey zum Grunde liegt, ist eigentlich diese: Auf was für eine Art ist $\frac{3}{4}$ in $\frac{2}{5}$ enthalten. Wäre die Frage, wie 1 in $\frac{2}{5}$ enthalten sey, so wäre die Antwort: Eins ist nicht ganz in $\frac{2}{5}$ enthalten, sondern nur $\frac{2}{5}$mal, oder richtiger: Es sind $\frac{2}{5}$ von 1 in $\frac{2}{5}$ enthalten, (das ist $1 : \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$.)

Wäre die Frage, wie $\frac{1}{4}$ in $\frac{2}{5}$ enthalten sey, so würde ich so schliessen: $\frac{1}{4}$ ist 4mal kleiner als 1. Es muß also in einer jeden Zahl 4mal so oft als 1 enthalten seyn. Also muß $\frac{2}{5}$, die Zahl, welche mir anzeigte, wie Eins in $\frac{2}{5}$ enthalten sey, nun 4mal größer werden. Sie wird es, wenn ich anstatt $\frac{2}{5}$ nehme $\frac{8}{5}$, (und also ist $\frac{1}{4} : \frac{2}{5} = \frac{8}{5}$.)

Allein die Frage ist, wie $\frac{3}{4}$ in $\frac{2}{5}$ enthalten sey. $\frac{3}{4}$ ist 3mal größer als $\frac{1}{4}$, und folglich 3mal weniger als $\frac{1}{4}$ in $\frac{2}{5}$ enthalten. Der vorige Quotient $\frac{8}{5}$ muß also nun 3mal kleiner werden. Er wird es in der That, wenn ich bey unveränderter Zahl der Theile (8) dreymal kleinere Theile, nämlich 15 Theile nehme. Und also ist $\frac{3}{4} : \frac{2}{5} = \frac{8}{15}$.

Man wird auf diese Art folgende Regul bey allen Brüchen, welche man dividiren will, herausbringen. Man multiplicire den Zähler des Bruchs, den man dividiren will, durch den Nenner des Divisors, und den Nenner des Dividendi durch den Zähler des Divisors; schreibe jenes oben, und dieses unten. Diese Regul aber ist theils weitläuftig, theils ist es zu leicht, den Fehler zu begehen, und das Erste unten, das Zweyte oben zu setzen, welches eine ganz andre Zahl geben würde; z. E. $\frac{15}{8}$ ist eine ganz andere Zahl als $\frac{8}{15}$. Es ist also eine nützliche Abkürzung, und der Fehler ist nicht leicht möglich, wenn der Divisor umgekehrt wird, und alsdenn die neben einander stehenden Zahlen multiplicirt, und in eben derselben Ordnung geschrieben werden.

Da die Division der Brüche für die Lehrlinge der Arithmetik eine größere Schwierigkeit, als die übrige Bruchrechnung hat, so wird es nicht überflüßig seyn, dieselbe noch durch einen andern Weg zu erläutern:

Das Exempel sey das vorige: $\frac{3}{4}:\frac{2}{5}$.

Wenn beyde Brüche Viertheile oder Fünftheile wären, oder überhaupt einerley Benennung hätten, so würde ihre Division mir keine Schwierigkeit machen. $\frac{3}{4}$ ist in $\frac{2}{4}$, und $\frac{3}{5}$ in $\frac{2}{5}$ nicht anders enthalten, als wie überhaupt die Zahlen gleichnamiger Dinge in einander enthalten sind: nicht ein= nicht mehreremal, sondern $\frac{2}{3}$mal. Da nun aber diese Brüche verschiedene Benennungen haben, so bringe ich sie, ohne ihren Wehrt zu verändern, zu einer Benennung, und nun stehen sie in der Form $\frac{15}{20}$ und $\frac{8}{20}$ da. Jetzt kömmt es blos auf die Zähler 15 und 8 an, deren Quotient hier so gut, als wenn ganze Zahlen von Dingen einer Art zu ihnen gehörten, $\frac{8}{15}$ ist. Da mich nun der Nenner 20 nicht interessirt, so würde meine Rechnung im Ganzen eben so gut, aber viel kürzer fortgegangen seyn, wenn ich von jener Rechnung, durch welche die Brüche zu einer Benennung gebracht werden, nur denjenigen Theil vollführt hätte, durch welchen mir die neuen Zähler 15 und 8 entstanden sind, welche allein sich einander dividiren sollen. Als die Brüche $\frac{3}{4}$ und $\frac{2}{5}$ neben einander standen, konnte dieß geschehen, wenn ich ins Creutz von 4 nach 2 hinauf und von 3 nach 5 herunter multiplicirte. Und wenn ich denn beyde sogleich unter einander stellte: so standen sie in der Form zwoer Zahlen, die sich einander dividiren sollen, sogleich da: $\frac{8}{15}$ Die hieraus entstehende Regul würde also diese seyn: **Multiplicire den Zähler des Dividends durch den Nenner des Divisors, und setze das Product oben. Dann multiplicire den Nenner des Dividends durch den Zähler des Divisors und setze dieß Product unten.** Diese Regul würde wegen des gleichlautenden Schalls der Hauptwörter dem Gedächtnisse äusserst schweer fallen, und

in der Anwendung den Fehler sehr oft veranlassen, daß das unrechte Product oben oder unten gesetzt würde, z. E. $\frac{15}{8}$. Die Regul wird daher sehr abgekürzt und auch mechanisch sicher, wenn mich der Rechenmeister lehrt: **Kehre den Divisor um, und multiplicire, wie du es vorhin gelernt hast, Zähler durch Zähler und Nenner durch Nenner.**

Anmerkung.

Die Division eines Bruchs durch einen reinen Bruch giebt allemal einen Quotienten, der grösser als der dividirte Bruch ist. Denn die Division durch Eins läßt den Bruch unverändert. Ein jeder reiner Bruch aber ist kleiner als Eins, und muß also mehr von ihm in dem andern Bruche enthalten seyn, als was von Eins in demselben enthalten war.

Von den Decimal- oder Zehntheiligen Brüchen.

§. 17.

Die sogenannten Decimalbrüche sind, wie die Brüche überhaupt, Zahlen, in denen das Verhältniß eines Theils zu einem gewissen Ganzen ausgedruckt wird, das bey den Decimalbrüchen in zehn oder hundert, oder in tausend Theile, u. s. f. abgetheilt ist. Sie könnten nach eben denen Reguln berechnet werden, nach welchen man andere Brüche zu berechnen pflegt. Allein man hat eine gewisse Art sie zu schreiben gewählt, welche sie mit den ganzen Zahlen in Eine Ordnung bringt, so daß sie fast auf eben die Art, wie diese, berechnet werden können.

Die letzte Ziefer in einer Reihe Zahlen zeigt, wie bekannt, Einheiten an, da die vorhergehenden Ziefern jede einen zehnfach höhern Wehrt, als die unmittelbar folgende Zahl haben. In der Reihe Zahlen 333 bedeutet die erste 3 Hunderter, die zweyte 3 Zehner, und die dritte 3 Einheiten. Fügte man noch einmal die Ziefer 3 hinzu, so müßte diese

einen

einen zehnfach kleinern Wehrt, als die unmittelbar vorhergehenden 3 Einer haben, das ist, sie würde 3 Zehntheile oder den Bruch $\frac{3}{10}$ ausdrucken. Folgte noch eine andre Ziefer darnach, so würde sie noch zehnmal weniger, nämlich $\frac{3}{100}$ ausdrucken, u. s. f. Man wird also folgende Zahl 333, 33 etc. in welcher das Comma andeutet, wo die Reihe der ganzen Zahlen aufhöre, so lesen: dreyhundert drey und dreyßig, drey Zehntheile und drey Hunderttheile u. s. f. Man wird auch folgende Zahl leicht verstehen 207, 0356, in welcher die Nulle hinter dem Comma anzeigt, daß keine Zehntheile bey dieser Zahl vorkommen; die übrigen aber ihren Werth von der Stelle haben, in welcher sie sich befinden. Indessen darf nicht eine ganze Zahl vorhergehen, wenn nur in der Reihe der Ziefern das vorhin bemerkte Abzeichen (,) den Ort bemerkt, von welchem an ich Brüche statt Einheiten lesen, und in welchem Verhältnisse ich ihren Wehrt gegen die Einheiten bestimmen soll. Folgende Zahlreihe 0, 3857693 deutet mir an, daß keine Einheiten hieher gehören, wol aber 3 Zehntheile, 8 Hunderttheile, u. s. f. und der Bruch ist einerley mit diesem $\frac{3857693}{10000000}$. In der Zahlreihe 0,073 sind keine Zehntheile und in 0,0057 keine Hunderttheile. Jener Bruch bedeutet $\frac{73}{1000}$, dieser $\frac{57}{10000}$.

§. 18.

Man sieht leicht ein, daß man diese Brüche auf eben die Art, wie ganze Zahlen, zu einander addiren, und von einander subtrahiren könne. Zum Exempel mögen folgende Brüche dienen:

0,07279	0,07289
0,0356	0,0356
Summa 0,10839.	Differenz = 0,03729

Es ist nicht nöthig, sie vorher zu einer Benennung zu bringen, da, wenn sie recht geordnet werden, immer einerley Theile zusammen kommen, oder mit einander verglichen werden.

§. 19.

Zu ihrer Multiplication ist bloß nöthig, daß man die Zahlen, so wie sie sich lesen lassen, durch einander multiplicire, und das Product so schreibe, wie ein Decimalbruch geschrieben werden muß, der im Nenner so viel Nullen hat, als Ziefern hinter dem Comma in beyden Brüchen zusammen stehen. Zum Exempel mögen die Brüche 0,1538 und 0,059 dienen. Hier multiplicire ich 1538 durch 59. Das Product ist 90742. Wenn diese Brüche in ihrer gewöhnlichen Form da stünden: $\frac{1538}{10000}$ und $\frac{59}{1000}$, so würde ich nun auch die Nenner 10000 und 1000 durch einander multipliciren wollen. Allein ich kann auch schon aus jener Form 0,1538 und 0,059 ihr Product erkennen. Es muß 10000000 seyn. Denn der erste Bruch hat 4 Zahlstellen, der andre deren 3 hinter dem Comma. Dieß deutet auf 4 und 3 Nullen hinter 1 im Nenner, und das Product davon muß 1 mit 7 Nullen seyn. Nun kömmt es noch darauf an, dem Product der Zähler 90742 die Form zu geben, welche auf einen Nenner mit sieben Nullen deutet. Dieß geschieht, wenn ich der ersten Zahl 9 noch 2 Nullen vorsetze, ehe ich den Platz der Einheiten durch ein Comma bezeichne: 0,0090742. Auf eben die Art würde das Product von 0,37 durch 0,091 werden 0,03267, das von 2,9 durch 0,89 seyn 2,523, weil ich vier Zahlen im Product der Zähler habe und das Product der Nenner nur 3 Nullen haben kann. Das Product von 1,07 durch 0,0089 aber würde seyn 0,009523.

§. 20.

In der Division bringt man den Bruch, der die wenigsten Ziefern hat, zu einerley Benennung mit dem andern, indem man eine oder mehrere Ziefern anhängt, und alsdenn dividirt man die Zahlen selbst durch einander, als ganze Zahlen. Z. E. 0,357 : 0,53891 giebt $\frac{53891}{35700}$ oder $1\frac{18191}{35700}$. Denn durch Anhängung der Nullen mache ich

ich $\frac{357}{1000}$ zu $\frac{35700}{100000}$, und nun ist es mit der Division von $\frac{35700}{100000}$ und $\frac{53891}{100000}$ nicht anders bewandt, als bey den ganzen Zahlen 35700 und 53891. Ich werde aber, weil ich in Decimalbrüchen rechne, diesen Quotienten nicht in der Form $1\frac{18191}{35800}$ lassen, sondern ihn wieder in einen Decimalbruch verändern wollen, wozu jetzt der Weg soll gewiesen werden.

§. 21.

Man wird bis daher den Nutzen dieser Bruchrechnung für sehr eingeschränkt ansehen, weil man weiß, daß man nur selten in denen Rechnungen, worinn Brüche bestimmt werden, auf Brüche dieser Art gerathe. Allein alle Brüche lassen sich in Decimalbrüche verwandeln, wenn man die Zahl findet, welche sich zu 10, 100, 1000, u. s. f. auf eben die Art verhält, wie sich der Zähler des Bruchs zu seinem Nenner verhält. Man findet diese Zahl, wenn man zu dem Zähler des Bruchs so oft eine Nulle hinzusetzt, und so lange dividirt, bis der Divisor aufgeht. So wird z. E. aus dem Bruche $\frac{33}{40}$ dieser Decimalbruch: 0,825 auf folgende Art:

```
40 — 33 — 10
      10
   ---------
40)  330 | 825
     320 |
   ---------
     100
      80
   ---------
     200
     200
   ---------
       0
```

Wenn kein Quotient in einer ganzen Zahl herauskommen will, nachdem man die Division etwas lange schon fortgesetzt hat, so hört man auf, bey welcher Ziefer man will,

und rechnet entweder ein ganzes Theilchen noch hinzu, wenn der Bruch, der im Quotienten nachbleibt, mehr als $\frac{1}{2}$ ist, oder man übersieht ihn, wenn er weniger ist. Man wolle z. Ex. den Bruch $\frac{5}{7}$ zu einem Decimalbruch machen. Es ist gewiß, daß man seinen Werth nimmer genau finden werde. Indessen wird man nur selten einen Bruch in einen Decimalbruch genau verwandeln können, sondern sich begnügen müssen, den Werth desselben so nahe, als man es gut findet, in Decimalen auszudrucken. Man nennt dieses eine Approximation, und die Berechnung wird auf folgende Art angestellt:

7 — 5 — 10
10

7) 50 | 0,7142857$\frac{1}{7}$
49

10
7

30
28

20
14

60
56

40
35

50
49

1

Man

Man sieht leicht ein, daß man bey weiter fortgesetzter Multiplication durch 10, und Division durch 7 wieder in eben diese Reihe von Zahlen hineingerathen werde, und niemals eine ganze Zahl im Quotienten zu erwarten sey. Man wird also hierbey aufhören, und das übrige $\frac{1}{7}$ übersehen können: denn es ist nur $\frac{1}{7}$ eines $\frac{1}{100000000}$. Man hätte auch schon bey dem Quotienten 2 aufhören und in der Division von 20 durch 7 den Quotienten 3 nehmen können. Denn man würde nur um $\frac{1}{7}$ von $\frac{1}{10000}$ zu viel genommen haben.

§. 22.

Der Nutzen dieser Decimalbrüche ist aus unsern teutschen Rechenbüchern nur wenig bekannt. Allein man darf nur einige Uebung in deren Berechnung haben, so wird man sich immer lieber mit diesen, als mit andern Brüchen beschäftigen wollen. Ihre Vorzüge sind diese:

1) Es kömmt in der Schätzung der Brüche auf das Verhältniß der Zähler und Nenner zu einander an. Wir sind aber an das Verhältniß der Einheiten zu 10, 100, 1000 theils durch die allgemeine Eintheilung der Zahlen in Classen von Zehn, Hundert, u. s. f. am meisten gewohnt, theils leiten uns selbst die gewöhnlichen Zeichen der Zahlen darauf, und wir haben also die deutlichste Vorstellung von der Größe der Brüche, wenn das Ganze in Theile dieser Art eingetheilt ist.

2) Man bemüht sich die Zahlen, welche die Brüche ausdrucken, zu verkleinern, und die Vorstellung von ihrer Größe zu erleichtern. Viele aber lassen sich nicht verkleinern, und also bleibt die Beurtheilung ihrer Größe sehr schweer. Man pflegt wol die letzten Zahlen im Zähler und Nenner wegzustreichen, allein dieses verändert ihren Werth oft zu sehr. Z. E. der Bruch $\frac{238737}{592361}$ ist weit von dem Bruche $\frac{23}{59}$ unterschieden, kömmt aber dem Bruche $\frac{2}{5}$ sehr nahe. Dieses erfährt man am sichersten, wenn man ihn in

in den Decimalbruch 0,40302 nach der Regel §. 21. verwandelt.

3) Man kann sie ohne weitere Veränderung mit ganzen Zahlen zusammen setzen und auf alle Art vergleichen, welches bey gemeinen Brüchen sich nicht thun läßt, ohne vorher die ganzen Zahlen in eben solche Brüche verändert zu haben. Und wenn aus ihrer Zusammensetzung oder Division ganze Zahlen entstehen, so werden dieselben ohne neue Division, die bey andern Brüchen nöthig ist, bestimmt werden können. Z. E. der Bruch $\frac{283}{49}$ enthält 5 Einheiten und $\frac{38}{49}$. Ich erfahre dieses, wenn ich 283 durch 49 dividire. Wären es eben so viel Hunderttheile, so sähe ich in dem Bruche 2,83 so gleich die Zahl der Einheiten, wenn ich ihn nach der Regel niedergeschrieben hätte.

4) Man kann sich dieser Rechnung sehr vortheilhaft bedienen, um sich die schweersten und verdrießlichsten Fälle in der gemeinen Bruchrechnung zu erleichtern. Z. E. wenn ich die Brüche $\frac{17}{23}$, $\frac{59}{97}$, $\frac{85}{117}$ und $\frac{193}{211}$, durchaus zu einander addiren muß, welch eine verdrießliche Rechnung habe ich hier nicht nöthig, da alle Nenner Primzahlen sind, ehe ich die Summe $\frac{164599218}{55076697}$ herausbringe, deren Zähler ich dann noch durch den Nenner dividiren müßte, um die Einheiten herauszubringen! Weit leichter und kürzer verwandle ich alle diese Brüche nach §. 21. in Decimalen, und zwar Zehntausendtheilchen.

$\frac{17}{23}$ in 0,7391
$\frac{59}{97}$ in 0,6082
$\frac{85}{117}$ in 0,7265
$\frac{193}{211}$ in 0,9147

in deren Summe 2,9885 sich die Zahl der Einheiten sogleich entdeckt.

5) Allein der vornehmste Gebrauch derselben hat Statt in der Quadrat- und Cubicrechnung, in den Logarithmen, in denen Rechnungen, welche die Geometrie erfodert, und über-

überhaupt in allen Theilen der Mathematik. Doch werden immer mehr Berechnungen und Tabellen zum Gebrauch der bürgerlichen Geschäfte nach Decimalbrüchen ausgearbeitet. Insbesondre giebt die Decimalrechnung einen wichtigen Theil der Englischgeschriebenen Anweisungs-Bücher zur Arithmetik ab, und wird dort auf die Berechnung der Leibrenten, Annuitäten, Interessen auf Interessen u. a. m. sehr vortheilhaft angewandt. Der Raum und die Absicht dieser Abhandlung verbieten mir, eine vollständigere Anweisung zu dieser Art Rechnung hier zu geben. Vielleicht aber ist das Gesagte hinlänglich, um meine Leser so weit mit dieser Sache bekannt zu machen, als sie es nöthig haben, um Rechnungen dieser Art, wenn sie dieselben hin und wieder in Büchern antreffen, zu verstehen, und vielleicht wenden die Verfasser unsrer teutschen Rechenbücher künftig etwas mehr Aufmerksamkeit auf dieselbe.

Anmerkung.

Man findet in Mathematischen Büchern auch eine sogenannte Sexagenal-Rechnung, das ist, eine Berechnung solcher Brüche ausgeführt, welche in dem Verhältniß 1 zu 60 abnehmen, dergleichen Theile wir in der Eintheilung der Stunden und der Grade des Circuls in Minuten, Secunden, Tertien ꝛc. kennen. Sie hat aber nicht die Nutzbarkeit in den Geschäften des gemeinen Lebens, welche die Decimalrechnung würklich hat, und ich sehe sie daher als zu entfernt von meinem Zweck an.

Dritter Abschnitt.

Von den Progreßionen.

§. 23.

Das Verhältniß, welches in zwo Zahlen Statt hat, kann ebenfalls zwischen der zweyten dieser Zahlen und einer dritten Statt haben. Man unterscheidet die Proportionen

dieser Art von den übrigen durch die Benennung **zusammenhängende Proportion**, (proportio continua.) Eine solche zusammenhängende Proportion kann arithmetisch seyn, z. E. in den Zahlen 2 — 4 = 4 — 6, oder geometrisch, wie in den Zahlen 2 : 4 = 4 : 8.

§. 24.

Das Verhältniß, welches sich in einer solchen zusammenhändenden Proportion findet, kann ebenfalls bey mehreren Zahlen als drey Statt haben, so daß die Zahl, welche ein Verhältniß schließt, das nächstfolgende anfängt. Alsdenn entsteht eine **Progreßion** oder **Reihe**, welche **arithmetisch** ist, wenn das in ihr wiederhalte Verhältniß ein arithmetisches ist, und **geometrisch**, wenn ein geometrisches Verhältniß in ihr fortgesezt wird. Von jener giebt folgende Reihe ein Beyspiel:

1. 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. 17. 19. 21. u. s. f.

Eine geometrische Reihe ist diese:

1. 3. 9. 27. 81. 243. 729. 2187 u. s. f.

Die hier bemerkten sind **zunehmende Reihen**. **Abnehmende Reihen** sind z. E. folgende:

40. 36. 32. 28. 24. 20. 16. 12. 8. 4. 0. — 4 u. s. f.
und 64. 32. 16. 8. 4. 1. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{16}$. $\frac{1}{32}$. $\frac{1}{64}$ u. s. f.

§. 25.

Man sieht leicht ein, wie man eine jede Reihe, so weit man will, fortsetzen könne, so bald nur in zwo Zahlen das Verhältniß, auf welches sie sich gründen soll, angegeben ist. Dieses Verhältniß darf aber nicht allemal in ganzen Zahlen gegeben werden, sondern ein jedes Verhältniß, dessen Exponent ein Bruch ist, kann den Grund zu einer solchen Reihe geben. Dergleichen Arithmetische Reihe ist folgende:

2. $2\frac{3}{4}$. $3\frac{1}{2}$. $4\frac{1}{4}$. 5. $5\frac{3}{4}$. $6\frac{1}{2}$. $7\frac{1}{4}$. 8.

Und eine Geometrische ist diese:

1. $\frac{3}{4}$. $\frac{9}{16}$. $\frac{27}{64}$. $\frac{81}{256}$. $\frac{243}{1024}$ u. s. f.

Man

Man sieht ferner bey beyderley Reihen, wie viel geschwinder die Geometrischen als die Arithmetischen Reihen zu- und abnehmen, wenn der Grund der Reihe ein Verhältniß ganzer Zahlen oder merklich großer Brüche ist. Denn man kann freylich das Verhältniß in Brüchen annehmen, die so wenig von einander, oder von der Einheit verschieden sind, daß auch die Geometrische Reihe nur sehr langsam anwächst. Z. E. $1.\ 1\frac{1}{1000}.\ 1\frac{2001}{1000000}$ u. s. f. Eine Anmerkung, welche bald in der Lehre von den Logarithmen ihre Anwendung finden wird.

Anmerkung.

Die Geometrische Reihe in ganzen Zahlen, welche den kleinsten Anwachs hat, ist diese:

1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. 256 u. s. f.

Man wird indessen, wenn man sie durch viele Glieder fortsetzt, sehr bald zu ungemein größern Zahlen kommen, als man bey einer so klein anfangenden Reihe erwartete. Man nimmt gewöhnlich von dieser Reihe die Exempel zu Aufgaben, die sich auf die Progreßionen beziehen, mehrentheils aber nur eine Belustigung des Rechenschülers zur Absicht haben. Denn ich gestehe gerne, daß ich keine Beyspiele gefunden habe, welche den unmittelbaren Nutzen der Lehre von den Progreßionen in den Geschäften des bürgerlichen Lebens deutlich darthäten, oder solche Vorfälle voraussetzten, die in demselben gewöhnlich vorkämen. Man läßt z. E. einen Hufschmied das Beschlagen eines Pferdes mit einem Reisenden so bedingen, daß er den ersten Nagel mit einem Pfennig, den zweyten mit zween, und so fortan bezahlt bekomme. Er braucht 32 Nägel, und es kömmt eine ungeheure Summe heraus. Fast alle Beyspiele sind dieser Art, wiewol vielleicht niemals ein Handel auf dergleichen Bedingungen geschlossen seyn mag. Ich will indessen eines Beyspiels erwähnen, das die Orientalischen Schriftsteller mit einer solchen Ernsthaftigkeit vortragen, daß man einige Wahrheit dabey vermuthen muß. Die Perser glaubten einen großen Ruhm für ihre Nation darinn zu finden, daß Ardschir, einer ihrer Könige, das Bretspiel erfunden hatte. Sessa, ein Indier, um ihnen Trotz zu bieten, erfand das Schachspiel, und brachte es zu seinem Könige. Dieser ward so vergnügt darüber, daß er dem Sessa

eine Belohnung anbot, so groß, als er sie nur selbst wählen würde. Er verlangte aber keine größere als diese: Der König sollte ihm für das erste Fach im Schachbrette, deren vier und sechzig sind, ein Korn, (es ist gleichgültig von welchem Getraide) geben, für das zweyte zwey Körner, für das dritte vier, und so fortan. Den König verdroß es, daß er so wenig foderte; weil Sessa aber darauf bestand, befahl er, ihn auf die verlangte Art zu vergnügen. Als es aber zur Berechnung kam, fand sich eine so ungeheure Anzahl Körner, daß der König gern bekannte, er sey nicht im Stande zu bezahlen. Die Zahl der Körner war 18446744073709551615. Ein Arabischer Schriftsteller berechnet, daß 32768 große Städte nothwendig seyn würden, um so viel Korn aufzuschütten, und der Englische Mathematicus Johann Wallis, findet, daß, wenn es auf einander geschüttet würde, dasselbe eine Pyramide neun Englische Meilen breit, lang und hoch ausmachen würde.

Von dem Gebrauch der Arithmetischen Reihen lassen sich Beyspiele geben, die in dem gemeinen Leben in gewissen Vorfällen leicht vorkommen können. Es giebt Arbeiten und Unternehmungen, bey denen die Mühe und Gefahr immer um etwas zunimmt, je weiter man in ihnen kömmt, und wo folglich der Lohn um einen gewissen Unterschied anwächst, so wie die Arbeit um ein gewisses fortgeht. Dergleichen Arbeiten sind das Ausgraben eines Brunnens, die Aufführung einer hohen Mauer, und im Kriege die Fortführung eines Laufgrabens, je näher man der Vestung kömmt. Man hat gewisse Vortheile, ein jedes verlangtes Glied in solchen Reihen auf einmal zu finden, ohne alle vorhergehende berechnen zu dürfen, ihre Summa anzugeben, wenn das erste und letzte Glied gegeben ist, und andre dergleichen Aufgaben mehr. Ich scheue mich aber, meine Abhandlung durch die Ausführung derselben auszudehnen, und werde lieber diese Reguln nebst andern Dingen, die mit meinem Zweck nicht so genau verbunden sind, zum Vergnügen derer, welche ihre Wißbegierde auf dieselben führen mögte, in dem Anhange ausführen.

Vier-

Vierter Abschnitt.

Von den Logarithmen.

§. 26.

Eine gewisse Neugier war es vielleicht, welche im 16ten Jahrhunderte einige teutsche Mathtmatikverständige antrieb, eine Geometrische Reihe mit einer Arithmetischen zu vergleichen. Wir wollen nachstehendes Exempel davon nehmen:

1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. 256. 512. 1024. 2048.
0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11.

Sie fanden bey dieser Vergleichung, daß, wenn man aus der Geometrischen Reihe drey Zahlen nimmt, um zu ihnen die vierte Proportionalzahl zu finden, diese allemal diejenige Zahl sey, welche man über derjenigen Zahl der Arithmetischen Reihe antrifft, welche entsteht, wenn man die beyden Zahlen der Arithmetischen Reihe zusammen thut, welche unter der zweyten und dritten Zahl der unvollständigen Geometrischen Proportion stehen, und diejenige davon abzieht, welche unter der ersten steht. Wenn man z. E. die vierte Proportionalzahl zu den Zahlen 4. 128 und 32 sucht, so findet sich dieselbe über der Zahl 10, welche entsteht, wenn man die unter 32 und 128 befindlichen Zahlen 5 und 7 addirt, und 2, welches unter 4 steht, davon abzieht. Die Sache ist in der Natur der Geometrischen und Arithmetischen Reihen und den Begriffen von beyderley Verhältnissen gegründet. Man sieht leicht ein, daß die Erfindung der vierten Proportionalzahl dadurch sehr erleichtert, und das Multipliciren in ein Addiren, das Dividiren in ein Subtrahiren verwandelt werde.

§. 27.

Indessen sieht man leicht, daß dieser Vortheil bey solchen Reihen, als wir zum Exempel genommen haben, nicht

sehr

sehr weit gehe. Denn so bald eine von denen dreyen Zahlen, zu welchen man die vierte Proportionalzahl sucht, nicht aus der Geometrischen Reihe ist, läßt sich derselbe nicht anwenden. Diese Reihen aber wachsen sehr geschwind an, und enthalten nur wenige von denen Zahlen, mit welchen man sich am meisten beschäftigt. Andre Reihen würden mir für andre Zahlen dienen können. Z. E. in folgender

3. 9. 27. 81. 243. 729. 2187. 6561. 19683. 59049.
2. 5. 8. 11. 14. 17. 20. 23. 26. 29.
177147. 531441 u. s. f.
32. 35.

würde ich die vierte Proportionalzahl zu 9. zu 2187 und 243 über der Zahl 29 in der Zahl 59049 finden, wenn ich 14 und 20 addirte, und 5 davon abzöge. Allein man sieht wol, daß, wenn man auch unendlich viele Reihen von dieser Art hätte, man doch nur wenig Aufgaben dadurch auflösen, und immer die kleinen Zahlen in ihnen vermissen würde.

§. 28.

Ein Schottländischer Baron, Joh. Napier, hat daher zwo Reihen erdacht, und mit erstaunlicher Mühe berechnet, wo in der Geometrischen Reihe bis zu vielen Millionen hinaus keine Zahl fehlt, und welche also für alle Berechnungen, die im gemeinen Leben vorkommen können, dienen, und den erwähnten Vortheil gewähren, daß sie die Zahl, welche man in der Regul de Tri durch Multipliciren und Dividiren mühsam sucht, durch eine leichte Addition und Subtraction geben. Die Zahlen der Arithmetischen Reihe heissen die **Logarithmen**, oder Verhältnißzahlen, von welcher Benennung der Grund darinn liegt, daß man auch diese Zahlen als solche ansehen kann, welche die Verhältnisse zählen, in welchen die Zahlen der Geometrischen Reihe von der Einheit an zunehmen. Z. E. in den §. 26. angeführten Reihen zeigt mir die Zahl 7 unter 128 an, daß die

Zahl

Zahl 128 in dem siebenmal wiederholten Verhältnisse 1 : 2 aus der Einheit entstehe.

Anmerkung.

Das Fundament der Napierischen oder Nepperischen Logarithmen besteht darinn. Er nimmt die

Reihen 1. 10. 100. 1000. 10000 u. s. f.
0. 1. 2. 3. 4.

macht aber die Logarithmen zu Decimalbrüchen von 10000000 Theilen, und nimmt von 1 bis 10 eben so viel Zahlen in Geometrischer Progreßion an, unter welchen denn auch die ganzen Zahlen 2. 3. 4. 5. rc. anzutreffen sind, und findet die Logarithmen derselben in Decimalziefern der Einheit. Es sind also seine Logarithmische Tabellen unvollkommene Arithmetische und Geometrische Reihen, wobey aus diesen die gebrochene Zahlen ausgelassen, und nur die ganzen Zahlen mit ihren Logarithmen gefunden und angegeben sind. Dergleichen unvollkommene Reihen werden sich durch nachfolgendes Exempel vorstellen lassen:

1. 2. - - - 16. - - 64. 128. 256. 512 -
0. 0,25. 1. 1,5. 1,75. 2. 2,25
- - 4096. 8192. 16384. - - 65536
3. 3,25. 3,5. 4.

wo die Hauptprogreßion 1. 16. rc. 256 u. s. f. und deren Logarithmen 0. 1. 2. rc. sind, aber hin und wieder die Zahlen 2. 64. 128. 512. rc. mit ihren Logarithmen eingeschaltet sind, die hier keine ganze Zahlen, sondern Decimalbrüche sind.

§. 29.

Man hat diese von Napier und andern, die er dazu aufgemuntert hatte, berechneten Logarithmen in gewisse Tabellen gebracht, deren Gebrauch für alle Fälle allgemein ist, in denen man sonst die Regul de Tri anzuwenden pflegt. Man setze z. E. die Zahlen 894. 267. 2384. zu denen man die vierte Proportionalzahl 712 finden würde, wenn man 2384 durch 267 multiplicirte, und das Product 636528 durch 894 dividirte. Man nehme aber statt dessen aus den Tabellen die Logarithmen von 2384 und 267, und ziehe von ihrer Summe den Logarithmen von 894 ab, so

wird

wird man bey der Zahl, die man findet, die Zahl 712 in den Tabellen antreffen.

Log. von 2384 = 33773062
Log. von 267 = 24265113

Summe = 48038175
Log. von 894 = 29513375

Log. von 712 = 28524800

Der Vortheil von dieser Rechnung würde freylich bey kleinen Zahlen nicht groß seyn, wegen des Zeitverlustes, den das Aufsuchen und Ausschreiben der Logarithmen verursacht. Man gebraucht sie also nur bey grossen Zahlen, insonderheit denen, aus welchen die Trigonometrischen Berechnungen geführet werden. Doch machen sie sich auch in kleinern Zahlen dadurch sehr nützlich, daß man die Brüche, welche gewöhnlich durch die Rechnung herauskommen, sehr genau in Decimalen durch blosses Nachschlagen finden kann. Z. E. die vierte Proportionalzahl zu 873. 217. 537 ist $133\frac{420}{873}$. Man findet aber sehr geschwind in den Logarithmischen Tabellen die Decimalen 133,481.

Anmerkung.

Die gemeinsten holländischen und teutschen Ausgaben dieser Logarithmischen Tafeln enthalten dieselben nur bis auf 10000, und sind daher nicht sehr brauchbar, weil man doch die Rechnungen mit kleinen Zahlen lieber ohne Logarithmen verrichten wird. Unter den vollständigern Ausgaben ist die brauchbarste diese: Sherwin's mathematical Tables revised by Gardiner, welche in 4. und in 8. in London verschiedentlich aufgelegt ist. Wenn man kleinere Tabellen hat, so läßt sich freylich der Logarithme für größere Zahlen, als 10000, ziemlich genau auf folgende Art finden: Wenn z. E. der Logarithme von 393745 gesucht wird, so nehme man den Logarithmen von 3937, ziehe ihn von dem Log. von 3938 ab, wobey es nur auf die vier letzten Zahlen ankömmt.

Log.

Log. 3938 = 3,5952757
Log. 3937 = 3,5951654

Differenz = 1103

Nun berechne man nach der Regul de Tri:

100 — 1103 — 47
47

7721
4412

100) 51841

518

Diese Zahl thue man zu 3,5951654
518

so ist der Log. von 393747 = 5,5952172

nachdem man nämlich die erste Zahl, welche man die Characteristicam nennt, aus 3 in 5 verwandelt hat. Denn nach der oben §. 28. Anm. erwähnten Progreßion, woraus die Logarithmen berechnet sind, muß der Logarithme einer Zahl immer eins weniger in der Characteristica haben, als Ziefern in der Zahl sind, für welche derselbe Logarithme gilt.

Man kann auf eine ähnliche Art die Zahl berechnen, zu welcher ein Logarithme gehört, wenn derselbe in der Rechnung grösser ausfällt, als man ihn in den kleinern Tabellen hat. Wenn wir folgende Zahlen logarithmisch berechnen, um die vierte Proportionalzahl zu finden:

624 — 8133 — 7112
Log. 7112 = 38519917
Log. 8133 = 39102508

Summe = 77622425
Log. 624 = 27951846

49670579

so ist dieser Logarithme für die gewöhnlichen Tafeln zu groß. Allein man suche in diesen die beyden Logarithmen mit der Vorderzahl 3 auf, welche dem gefundenen am nächsten kommen. Sie sind Log. 9270 und Log. 9269. Man ziehe ihre

drey letzten Ziefern von einander ab, in denen sie von einander abgehen:

797
329

468

und ziehe die kleinere Zahl von 579 den letzten Ziefern des gefundenen Logarithmen ab:

579
329

250

Nun rechne man auf folgende Art:

468 — 10 — 250
10
---
468) 2500

5

Die Zahl, welche also für den gefundenen Logarithmen 49670579 gehört, ist 92695. Man würde 3 Zehntheile dazu gefunden haben, wenn man so gerechnet hätte:

468 — 100 — 250.

Doch sind die Logarithmen in den größern Tabellen viel genauer berechnet, als man sie durch diese Methode findet, und die Mühe der hier erklärten Berechnung bleibt doch immer zu groß, wenn man die Logarithmen größerer Zahlen oft braucht.

§. 30.

Man geräht oft auf solche Logarithmen, die sich nicht nach der gewöhnlichen Art von einander abziehen lassen. Z. E. suche man die vierte Proportionalzahl zu 324. 9. 29. in Logarithmen:

Log. 29 = 14623980
Log. 9 = 09542425

Summe = 24166405
Log. 324 = 25105450

00939045

Der

Der gesuchte Logarithme ist freylich da, aber er entsteht hier durch Abziehung des Größern von dem Kleinern, beträgt also weniger als 0, und muß mit dem Zeichen — bemerkt werden. Dieses zeigt an, daß die zu demselben gehörende Zahl weniger als 1 betrage, und folglich ein Bruch sey. Man wird ihn gleich als einen Decimalbruch in 10000 Theilen ausdrucken können, wenn man die Zahl, so wie sie hier stehet, von 40000000 als dem Logarithmen von 10000 abzieht, und die übrigbleibende Zahl unter den Logarithmen aufsucht:

$$\begin{array}{r} 4,0000000 \\ 0,0939045 \\ \hline 3,9060955 = \text{log. } 8055. \end{array}$$

Der Bruch beträgt also 0,8055.

Man kann für jeden Bruch einen Logarithmen finden, wenn man den Logarithmen des Nenners von dem Logarithmen des Zählers abzieht. Also finde ich den Logarithmen von $\frac{5}{3}$ und von $\frac{3}{8}$ auf folgende Art:

$$\begin{array}{ll} \text{log. } 5 = 0,6989700 & \text{log. } 3 = 0,4771213 \\ \text{log. } 3 = 0,4771213 & \text{log. } 8 = 0,9030900 \\ \hline \text{log. } \frac{5}{3} = 0,2218487 & \text{log. } \frac{5}{8} = -0,4259687 \end{array}$$

§. 31.

Wenn man nicht alles sehr scharf berechnen will, so sind die ersten drey oder vier Zahlen der Logarithmen schon hinlänglich, und geben die Zahlen, bey denen man die ganz kleinen Brüche nicht achtet, genau genug an. Man nützet sie mit einer solchen Abkürzung in vielerley Tabellen zum Behuf kaufmännischer Rechnungen, nach denen man bloß addirt und subtrahirt, was sonst mühsam berechnet werden müßte. Der selige Kruse hat insonderheit in seinen spätern Schriften, und vorzüglich in seinem Wechsel-Entscheider, diese abgekürzten Logarithmen sehr genützt, und stellt durch

sie das, was der Kaufmann durch mühsame Rechnung nach der Kettenregul herausbringt, in einer zweckmäßigen Genauigkeit dar. Aus dem, was bisher gesagt worden, wird man theils das von vielen Verfassern verhehlte Fundament von dergleichen Tafeln bald einsehen, theils in dem Gebrauch dieser Tafeln selbst gewisser werden können.

Fünfter Abschnitt.

Von den Quadraten und Potenzen und deren Berechnung.

§. 32.

Man hat in der Mathematik viele Veranlassungen, auf die Zahlen zu achten, welche entstehen, wenn eine Zahl durch sich selbst multipliciret wird. Man nennt die Producte einer Zahl durch sich selbst Quadrate oder die zweyte Potenz. Das Product, welches entsteht, wenn diese Zahl aufs neue durch die erste multiplicirt wird, eine Cubiczahl oder die dritte Potenz, und wenn dieses noch ein- oder mehrmale wiederholt wird, die vierte, fünfte, sechste Potenz, u. s. f. Solche Potenzen von der Zahl 2 geben ab 4, als das Quadrat, 8 als die Cubiczahl, 16. 32. 64 u. s. f. Es ist leicht, diese Potenzen von einer jeden gegebenen Zahl zu berechnen, und es gehört nichts als die Multiplication dazu. Man hat auch häufige Tabellen von den Quadrat- und Cubiczahlen im Druck. Die Tabellen der Quadratzahlen haben ihren Verfassern am wenigsten Mühe gekostet. Denn die Quadratzahlen nehmen im Unterscheide immer um 2 zu. Z. E. zwischen 1. 4. 9. 16. 25. 36 rc. ist der Unterschied 3. 5. 7. 9. 11 rc. Es war also nichts mehr nöthig, um die Quadrate von 1 bis 100000 hinauf zu berechnen, als nur immer 2 mehr zu addiren.

§. 33.

§. 33.

Die Zahl, durch deren wiederholte Multiplication solche Potenzen entstehen, heißt die Wurzel derselben, und zwar in Absicht auf die Quadratzahl, die Quadrat- in Absicht auf die Cubiczahl, die Cubicwurzel. In Absicht auf die übrigen Potenzen kann man sie die vierte, fünfte ꝛc. Wurzel nennen. So ist z. E. 2. die Quadratwurzel von 4, die Cubische Wurzel von 8, die vierte Wurzel von 16, die fünfte von 32, u. s. f.

Es kommen viele Fälle auch in dem bürgerlichen Leben vor, in denen es wichtig für uns wird, eine solche Zahl oder Wurzel kennen zu lernen, durch deren wiederholte Multiplication eine gewisse gegebene Zahl entstanden ist. Die Arithmetik, insonderheit wenn sie auf die Geometrie angewandt wird, muß diesen Fall sehr oft auflösen. Man nennt diese Rechnung das Ausziehen einer Wurzel. Für die Ausziehung einer Quadrat- und Cubicwurzel hat die Arithmetik ihre Reguln. Allein die Ausziehung der übrigen Wurzeln hat nicht geringe Schwierigkeit, und wird ein Geschäfte der höhern Mathematik.

§. 34.

Bey Ausziehung der Quadrat-Wurzel ist eigentlich die Frage: Was ist es für eine Zahl, welche in der gegebenen Zahl z. E. 625. so viele mal enthalten ist, als diese Zahl selbst Eins enthält. Man sieht wol ein, daß hier von einer gewissen Division die Rede sey, bey welcher aber der Divisor so wenig, als der Quotient, bekannt ist. Man wird also mit der gewöhnlichen Division so wenig, als durch andre bekannte Rechnungsarten, die Frage beantworten können. Freylich weiß man es aus dem Einmal Eins von einigen kleinen Zahlen, und daher auch von den Zehnern, Hundertern, Tausendern ꝛc., welche eben diese Hauptzahlen haben. Allein diese Hülfe reicht nicht weit, und die Tabellen, welche

man von Quadrat- und Cubiczahlen hat, sind nicht gemein genug, daß man sich bey größern Zahlen ohne Rechnung aus ihnen Raths erholen könnte. Ich verzweifle indessen fast daran, die Arithmetischen Reguln zur Ausziehung der Quadrat- und Cubicwurzel deutlich beweisen zu können, ohne die Buchstaben-Rechnung anzuwenden, wozu aber hier der Ort noch nicht ist, da ich noch den allgemeinen Erläuterungen der Algebra einen Ort unten vorbehalte. Und eben deswegen werde ich auch in dieser zweyten Ausgabe, ohne den Schein der Unordnung zu achten, das wichtigste von dieser Rechnung und deren nähere Erläuterung in brauchbaren auch auf die Geometrie angewandten Exempeln bis in den Anhang hinaussetzen. Indessen wird man vieles von der Ausziehung der Quadratwurzel verstehen können, wenn man auf die Multiplication einer Zahl durch sich selbst Acht hat. Wir wollen ein Exempel an der Zahl 345 nehmen.

$$\begin{array}{r} 345 \\ 345 \\ \hline 1725 \\ 1380 \\ 1035 \\ \hline 119025 \end{array}$$

1) Man bemerke dabey folgendes. Die Zahl hatte drey Theile, 300, 40 und 5, welche in der Multiplication eine jede sich selbst einmal, und ein Theil den andern zweymal multiplicirte. 5 multiplicirte sich selbst, aber es multiplicirte auch 40 und 300, und dagegen multiplicirten 40 und 300 die Zahl 5. 40 multiplicirte sich selbst, aber auch die Zahl 300, welche hinwieder 40 multiplicirt hat, und dieses 300 multiplicirte auch sich selbst. Das ganze Product oder Quadratzahl 119025 enthält also die Quadratzahlen

dratzahlen der Theile 300 und 40 und 5, und überdem die Producte dieser Theile durch einander zwiefach. Hiemit verbinde man noch folgende Bemerkungen:

2) Die Quadrate aller Zahlen unter 10 fallen zwischen 1 und 100, und die von allen Zahlen zwischen 10 und 100 fallen zwischen 100 und 10000 u. s. f. so daß man aus der Zahl der Ziefern in der Quadratzahl auf die Zahl der Ziefern in der Wurzel sicher schließen kann. Z. E. hat die Quadratzahl sieben oder acht Ziefern, so muß die Wurzel deren vier haben. Denn die kleinste Zahl, die mit fünf Ziefern geschrieben wird, (10000) hat zum Quadrat 100 Millionen, die kleinste Zahl, welche mit neun Ziefern geschrieben wird.

3) Die Quadrate der Zehner, Hunderter, Tausender kommen in der ersten Zahl mit den Quadraten der Einer überein. Z. E. 16, das Quadrat von 4, ist auch das Quadrat von 40, 400, 4000 u. s. f. nur immer mit zwo Nullen mehr neben sich. Daher kann in 1800, 180000, 18000000 das Quadrat von nicht mehr als 40, 400 und 4000, nicht aber von 50, 500 oder 5000 gesucht werden.

§. 35.

Hierauf gründen sich folgende Reguln zur Ausziehung der Quadratwurzel:

1) Man theile die gegebene Zahl, deren Quadratwurzel man wissen will, von hinten zu in Classen, eine jede von zwo Ziefern. Doch kann die vörderste Classe nur eine Ziefer haben. Die Wurzel hat aber so viel Theile, als Classen entstehen.

2) Da man aus dem Einmal Eins die Quadrate aller Zahlen unter zehn kennt, so ziehe man von der Zahl in der ersten Classe das ihr am nächsten kommende Quadrat ab, und setze die Wurzel desselben als den ersten Theil der ganzen Wurzel in den Quotienten.

3) Diese Zahl doppelt genommen wird der Divisor des übriggebliebnen, und als ein solcher darunter gesetzt, so daß die letzte Ziefer desselben unter der ersten Zahl der folgenden Classe ihren Ort bekömmt. Der Quotient, welcher sich durch die Division findet, ist der zweyte Theil der Wurzel.

4) Eben diese Zahl wird unter die rechte Zahl derselben Classe neben dem Divisor gesetzt, und alsdenn die ganze Zahl durch jene multiplicirt und abgezogen. Also verfährt man, wenn das Quadrat nur zwo Classen hat.

5) Hat aber diese Zahl mehr Classen, so wird die dritte und vierte Regel bey jeder Classe wiederholt, und alle schon gefundene Theile der Wurzel doppelt genommen, und dadurch das übrige von der Quadratzahl dividirt.

§. 36.

Wir wollen die Anwendung dieser Regul bey folgender Aufgabe machen. Man setze, man wollte einen Platz mit Bäumen in gleicher Entfernung besetzen, so daß der ganze dazu genommene Platz viereckt und auf allen Seiten gleich breit, oder mit einem Worte, ein Quadrat werde. Die Zahl der Bäume sey 625. Man sieht wol ein, daß man hier eben so viele Reihen nehmen müsse, als einzele Bäume in der ersten Reihe stehen, daß alle Reihen gleich viele Bäume enthalten müssen, und also in der Zahl 625 eine Zahl durch sich selbst multiplicirt zu finden seyn müsse. Dies ist also ein Fall, wo die Quadratwurzel ausgezogen werden muß. Die Rechnung selbst steht auf folgende Art:

$$\begin{array}{r|l}
6 & 25 \;\lfloor\; 25 \\
20 \times 20 = 4 & .\,. \\
\hline
2 & 25 \\
2 \times 20 + 5 = & 45 \\
2 \times 20 \times 5 + 5 \times 5 = 2 & 25 \\
\hline
 & 0
\end{array}$$

Die

Die Zahl 625 ist also das Quadrat der Zahl 25. Denn sie enthält das Quadrat von 20, das Product von 20 durch 5 zweymal genommen, und das Quadrat von 5.

Man nehme zu einem zweyten Exempel die Frage an, wie ein Corps Truppen von 15129 Mann in ein Bataillon quarrè, das ist, in eine solche Ordnung zu stellen sey, daß auf allen Seiten gleich viele Soldaten stehen, und alle Reihen gleich stark seyn. Die Auflösung giebt folgende Rechnung:

```
 1 | 51 | 29     [123
 1 | .. | .. = 100 × 100
 ___________
     51 | ..
     22 | .. = 2 × 100 + 2
     —
     44 | .. = 2 × 100 × 20 + 20 × 20
     —
      7 | 29
      2 | 43 = 2 × 100 + 20 + 3
      7 | 29 = 2 × 100 + 20 × 3 + 3 × 3
 ___________
          00
```

Man sieht auch hier in den beygesetzten Zahlen, daß in der Zahl 15129 alles enthalten sey, was zufolge §. 19. in dem Quadrat von 123 enthalten seyn muß.

Indessen ist eine Probe, ob man recht gerechnet habe, wenn man die gefundene Quadratwurzel durch sich selbst multiplicirt, und das vorige Quadrat findet.

Anmerkung.

Leser, die das Kriegswesen einigermaßen kennen, werden mit meinem zweyten Exempel nicht zufrieden seyn, weil die Bataillons quarrès jetzo alle hohl, oder in der Mitte leer gemacht werden. Allein die Rechnung für dergleichen Bataillons quarrès erfodert ebenfalls eine Ausziehung der Quadratwur-

 zel

zel aus einer Zahl, die man vorher nach einer andern Regul zubereiten muß, ehe die Rechnung vorgenommen werden kann. Der Fall würde mit diesem übereinkommen, wenn man mit einer gewissen Anzahl von Bäumen einen viereckten Platz rund umher in vielfachen Reihen besetzen wollte. Ich werde aber diesen Fall, weil ich nicht gerne das leichtere durch das schwerere unterbrechen möchte, in den Anhang versparen.

§. 37.

Der Fall, in welchem die Ausziehung einer Quadratwurzel vor andern nöthwendig wird, ist, wenn es darauf ankömmt, zwischen zwo Zahlen eine mittlere Proportionalzahl zu finden, oder in einer zusammenhängenden Proportion die Zahl zu finden, zu welcher sich die erste zur zweyten so verhalte, als sich diese Zahl zu der dritten verhält. Man nehme z. E. die Zahlen 12 und 27. Wenn wir die noch unbekannte Zahl mit N andeuten, so steht die noch unvollständige Proportion auf folgende Art:

$$12 : N = N : 27.$$

Es gilt bey den zusammenhänden Proportionen, was bey jeden andern Proportionen gilt, daß das Product der beyden äußern Zahlen dem Product der beyden mittlern, das ist, hier dem Quadrat der mittlern Zahl gleich sey, weil hier die zweyte Zahl mit der dritten einerley ist. Es kömmt hier also darauf an, die Zahl zu finden, deren Quadrat 12×27 oder 324 ausmacht, und hiezu ist kein andrer Weg, als aus der Zahl 324 die Quadratwurzel auszuziehen. Diese Wurzel ist 18, und nun ist die Proportion vollständig diese:

$$12 : 18 = 18 : 27.$$

Man braucht diese Berechnung ungemein oft in Geometrischen Fällen, wo es auf die Vergleichung des Inhalts verschiedener Flächen ankömmt, von welchen ich in der

Folge

Folge Exempel geben werde, die den Nutzen derselben völlig ins Licht setzen können.

§. 38.

Man wird aber nur selten auf solche Zahlen in dergleichen Berechnungen zutreffen, die vollkommene Quadrate von ganzen Zahlen wären. Man kennt aus dem Ein mal Eins nur die Zahlen 1. 4. 9. 16. 25. 36. 49. 64. 87. 100, als Quadrate der Zahlen 1. 2. 3. ꝛc. Eine jede andre Zahl hat keine Quadratwurzel in ganzen Zahlen. Z. E. die Wurzel von 30 wird größer als 5 und kleiner als 6 seyn. Man darf indessen nicht erwarten, daß man sie in einem Bruche genau finden werde. Denn es ist unmöglich, daß ein Bruch, er sey ein reiner oder unreiner Bruch, eine ganze Zahl zum Quadrat haben könne. Man hat indessen eine Rechnung, die Wurzeln solcher Zahlen durch Näherung in Decimalbrüchen so genau zu finden, als man es einigermaßen nützlich findet. Man würde durch dieselbe für die Zahl 30 die Wurzel 5,477225 ꝛc. finden. Man nennt Zahlen dieser Art Irrationalzahlen, auch wol im Lateinischen Numeros surdos, woraus in einige teutsche Rechenbücher, welche diese Lehre mit berühren, das Wort: **surdische Zahlen**, eingeflossen ist.

§. 39.

Man findet die Quadratwurzeln solcher Zahlen, die nicht über 10 Millionen sind, sehr bequem durch die Logarithmen, wenn man den Logarithmen einer solchen Zahl durch 2 dividirt, und diese Zahl unter den Logarithmen aufsucht. Z. E. die Zahl 144 hat in den Tabellen den Logarithmen 2,1583625, welcher durch 2 dividirt 1,0791812, den Logarithmen von 12, giebt. Die Zahl 5688225 hat in den großen Tabellen den Logarithmen 6,7549766, die Hälfte desselben ist 3,3774883, welches man

man in den Tabellen, als den Logarithmen von 2385, antrift, welche Zahl die Wurzel von jener ist. Trift der Logarithme nicht genau zu, so sucht man ihn so genau nach, als die Tabellen erlauben, und man hat, wenn die Vorderzahl 1 mehr wird, zehn Theile; ist sie 2 mehr, hundert Theile u. s. f. Z. E. die Zahl 6 hat keine genaue Wurzel. Die Hälfte ihres Logarithmen ist 0,3890756, welche mit der Vorderzahl 5 endlich die Zahl 244949 giebt, und also ist die Wurzel von 6 die Decimalzahl 2,44949. Dieses ist alles, was ich von der Ausziehung solcher Quadratwurzeln, welche nicht genau gefunden werden können, durch Näherung, hier anführen will. Das mehrere bleibt für den Anhang aufbehalten. Eben daselbst werde ich die Reguln zu Ausziehung der Cubicwurzel einrücken, da ich gestehen muß, daß ich keine Exempel für dieselbe anzugeben weiß, die einigen Nutzen in den Geschäften des bürgerlichen Lebens hätten, bevor ich nicht aus der Geometrie gewisse Wahrheiten abgehandelt habe, welche ihren Nutzen am deutlichsten darstellen können.



Geometrische Wahrheiten

zum

Nutzen und Vergnügen

des bürgerlichen Lebens

erläutert.

Wenn ich bey einer unter den Mathematischen Wissenschaften Vorwürfe über die Art, wie ich sie hier abhandle, von denen zu befürchten habe, welche den Vorzug der Mathematischen Wahrheiten in der Ueberzeugung des Verstandes kennen, so ist es die Geometrie. Man wird es für eine wahre Entehrung dieser vortreflichen Wissenschaft halten, wenn ich ihre Wahrheiten aus dem genauen Zusammenhange trenne, der ihnen so wesentlich ist, der sie zu der vollkommensten unter allen Wissenschaften vereinigt, und ohne welchen sie nicht mit Ueberzeugung eingesehen werden können. Man wird vielleicht auf meine übrige Einsicht in dieselbe daraus schließen und glauben, daß mein Vortrag in dieser Wissenschaft auch für die, welche die Geometrie ganz als Wissenschaft lernen wollen, von der wahren Mathematischen Methode ganz entblößt sey, da ich fähig bin, sie in dieser Abhandlung so sehr zu verleugnen. Ich muß diese Vorwürfe über mich ergehen lassen, wenn mein Zweck nicht hinlänglich ist, mich gegen dieselben zu entschuldigen. Man erlaube mir indessen nur anzuführen, daß ich hier in dem größern Theil der Geometrie nichts anders thue, als was die Verfasser der neuesten Anweisungen zur Geometrie in einzelen Theilen derselben zu thun sich genöthigt sehen. Welche von denselben beweist wol das bekannte Verhältniß des Durchmessers zum Umkreis des Circuls? Und dennoch berufen sie sich ohn Unterlaß auf dasselbe, und gründen ihre Reguln zur Berechnung des Circuls und der runden Körper ohne Bedenken auf sie. Wie wenige unter ihnen wagen es, die Gründe der Stereometrie vollständig zu erläutern, und in ihren Beweisen von Wahrheiten, die dahin gehören, alles das beyzubringen, was zu einer gänzlichen Ueberzeugung von ihnen erfodert wird. Aber dennoch verlangen sie einen zuverläßigen Glauben für die Reguln, welche sie zur Berechnung der soliden Räume von allerley Gestalt und Größe angeben. Ich werde indessen die Wahrheiten, welche ich abhandle,

abhandle, nicht gänzlich von denen Gründen, die zu einer Ueberzeugung von denselben leiten können, entblößen, und ich werde wenigstens denen, die eine gänzliche Ueberzeugung durch den Unterricht, welchen ihnen andre Bücher geben können, verlangen, den Schritt sehr erleichtern, wenn sie an dieselbe mit geläuterten Begriffen von den vornehmsten Dingen gehen werden, die zu dieser Wissenschaft gehören.

Erster Abschnitt
von dem
Maasse der Ausdehnung der Körper
als dem
allgemeinen Vorwurf der Geometrie
und insbesondre
von der unmittelbaren Messung der Längen.

§. 1.

Es gehört nicht für uns, den philosophischen Begrif der Wörter Ausdehnung und Raum, und was es heisse, einen Raum einnehmen, zu untersuchen. Der Begrif davon ist bey allen Menschen wenigstens klar, und der bloße Anblick alles dessen, was zu der körperlichen Welt gehört, leitet uns auf die Vorstellung der Ausdehnung.

§. 2.

Doch bemerkt ein jeder in dieser Vorstellung der Ausdehnung eine große Verschiedenheit. Wir haben die einfachste Vorstellung der Ausdehnung, wenn wir einer Sache bloß eine Länge beylegen. Wir gedenken uns eine andre Art der Ausdehnung, wenn wir in einer Sache Länge und Breite vereint bemerken, und wieder eine andre, wenn wir ihr

neben

neben der Länge und Breite zugleich eine Höhe oder Dicke beylegen.

§. 3.

Freylich ist nichts in der körperlichen Welt, bey welchem wir nicht Länge, Breite und Dicke beysammen, und folglich die dritte Art der Ausdehnung bemerkten. Wenn eine Sache auch zu klein ist, als daß unser bloßes Auge deren Länge, Breite und Dicke bemerken könnte, so haben wir doch optische Hülfsmittel, durch welche wir dieselbe deutlich unterscheiden können. Indessen steht es doch in unsrer Macht, eine jede Art der Ausdehnung ohne Rücksicht auf die damit vereinten andern Arten zu betrachten. Wenn wir von der Länge eines Weges reden, so denken wir gar nicht dabey an die Breite des Gefildes, über welches dieser Weg geht, oder an die Dicke des Erdbodens, welcher uns auf diesem Wege trägt. Wenn wir ein Feld übersehen, das wir zu einem gewissen Genusse brauchbar machen wollen, so übersehen wir nur dessen Fläche, das ist, seine durch die Länge und Breite bestimmte Ausdehnung, und auch hier kömmt gar nicht die Dicke des Erdbodens in Betrachtung. Selbst bey denen ausgedehnten Dingen, welchen wir Breite, Länge und Höhe zugleich beylegen, beschäftigt bald die eine, bald die andre besonders unsre Vorstellung, alle drey aber zusammen genommen bestimmen uns in der Schätzung von dessen solider Ausdehnung, das ist, von demjenigen Raum, den der ganze Körper einnimmt, und dessen Größe aus der Länge, Breite und Höhe zusammen bestimmt wird.

§. 4.

Wenn wir uns eine Länge vorstellen, so haben wir dabey die Vorstellung gewisser Gränzen, zwischen welchen diese Länge bestimmt ist, und welche wir gewöhnlich Puncte, oder Endpuncte der Länge nennen. Ein solcher Punct kann ein gewisses Object seyn, das für unser Auge eine merkliche

Grösse hat. Allein es ist gewiß, daß wir an diese Grösse der Puncte gar nicht gedenken, wenn wir sie als Gränzen einer Länge betrachten, welche unsre Aufmerksamkeit ganz beschäftigt. Wenn ich an die Entfernung zwischen Berlin und Hamburg gedenke, so sind beyde Städte die Endpuncte dieser grossen Länge. Allein ich ziehe meine Gedanken von der Grösse dieser Städte ganz ab, und wenn sie ja mir dabey einfiele, so würde ich einen gewissen Ort in diesen Städten oder in ihren äussersten Gränzen mir als den Anfang und das Ende dieser Länge vorstellen, bey welchem ich vollends alle Vorstellung der Ausdehnung aus meinen Gedanken entferne, oder wenigstens dieselbe so klein annehme, daß sie gegen die ganze Länge für Nichts zu rechnen ist. Auf diese Art entsteht die Vorstellung des Mathematischen Punctes, der gar keine Grösse hat, und nur bloß in unsrer Vorstellung existirt, keinesweges aber sinnlich dargestellt werden kann, eben so wenig, als ein Ding in der Körperwelt anzutreffen ist, das bloß Linie, oder bloß Fläche in seiner Ausdehnung wäre.

§. 5.

So oft uns indessen die Ausdehnung einer Sache in die Augen fällt, oder unsre Vorstellung rührt, so ist unser Verstand sogleich geschäftig, dieselbe mit der Ausdehnung andrer ähnlichen Dinge zu vergleichen. Wir gewöhnen uns sehr frühe an diese Vergleichung, die uns eben so natürlich ist, als es unserm Verstande ist, Zahlen, deren Vorstellung sich demselben zugleich darbietet, zu vergleichen, und auf eine gewisse Art gegen einander zu berechnen.

§. 6.

Wir sehen in dieser Vergleichung der ausgedehnten Grössen dieselben als aus einander bestimmt oder entstehend an, und wir bemühen uns so wol, sie auf eine gewisse Art aus einander zu bestimmen, als auch, wenn die Grössen schon bestimmt sind, die Art zu untersuchen, wie sie aus einander

 entstehen,

entstehen, oder sich bestimmen lassen. Die Art, wie Grössen aus einander entstehen, ist ihr Verhältniß, und alles, was wir (Arithmetik §. 2. bis 7.) von dem Verhältniß und der Proportion gesagt haben, hat auch für die ausgedehnten Grössen Statt.

§. 7.

Diese Verhältnisse der ausgedehnten Grössen untersuchen, heißt mit einem bekanntern Ausdrucke **Messen**. Wir verrichten dieses in den meisten Fällen bloß durch das Gesicht. Wir leben nicht lange in der körperlichen Welt, und beschäftigen uns mit der Betrachtung derselben, ohne uns ein sogenanntes *Augenmaaß*, das ist, die Fähigkeit zu erwerben, Grössen, so wie sie ins Auge fallen, mit einander zu vergleichen, und ihr Verhältniß zu einander ohngefähr anzugeben. Wir wenden aber bald eine genauere Vergleichung mit gewissen Grössen an, die wir entweder selbst an den Gliedern unsers Körpers bemerken, oder durch eine gewisse Bewegung und Ausspannung derselben bestimmen können. Daher kömmt die Schätzung der Grössen und Weiten nach Daumbreiten, Fussen, Kopfmaassen, Spannen, Schritten, Klaftern, welches die natürlichen Maassen aller bekannten Völker sind. Unser Augenmaaß vergleicht mit diesen die grössern und kleinern Weiten, an deren genauerer Bestimmung uns einigermassen gelegen ist. Allein es ist nicht möglich, es in diesem Augenmaasse zu einer solchen Genauigkeit zu bringen, welche in den verschiedenen Vorfällen des Lebens erfodert wird. Es kommen zu viele Augenbetrüge vor, welche unser Urtheil in der Schätzung der Grössen irre machen, und wir finden, daß wir in demselben immer ungewisser werden, je grösser dieselben sind. Um uns also davon gewiß zu machen, wenden wir zu einer unmittelbaren Vergleichung kleinerer Längen mit den grössern ein gewisses Werkzeug oder Maaßstab an, in welchem die Länge, die das Maaß derselben abgeben soll, dargestellt

dargestellt wird, ohne jemals eine merkliche Veränderung zu leiden. Wir untersuchen, wie oft dieses Maaß in der größern Länge enthalten sey, und nun haben wir genug zu der deutlichen Vorstellung von den blossen Längen der ausgedehnten Dinge.

§. 8.

Alle dergleichen Maassen können nach Willkühr angenommen werden. Zwar sind die Menschen darinn übereingekommen, daß sie zum gewöhnlichsten Maasse die Länge ihres Fusses angenommen haben, eben wie sie zum ersten Hülfsmittel im Zählen die Finger der Hand angewandt, und dem zufolge die Zahlen in Classen von zehn zu zehn eingetheilt haben. Allein der Fuß ist selbst bey den Menschen so verschiedentlich lang, daß bloß deßwegen keine allgemeine Uebereinstimmung in den Maassen aller Völker Statt haben kann, und auch nun nicht hat wieder eingeführt werden können, so groß auch der Vortheil der menschlichen Gesellschaft seyn würde, wenn man es dahin bringen könnte, daß auf dem ganzen Erdboden nur einerley Maaß eingeführt würde. Allein es wird dieses eben so wenig zu erhalten seyn, als es zu erwarten ist, daß man die Völker zu einer Uebereinstimmung in der Sprache, in den Sitten, und in andern ganz willkührlichen Dingen vereinigen werde.

§. 9.

Indessen ist der Nachtheil von dieser Verschiedenheit in dem Längenmaasse nicht so groß, weil man doch wenigstens im Stande ist, das Verhältniß der Längenmaassen eines Volks zu denen von jedem andern Volke zu bestimmen. Weil man z. E. weiß, daß sich der Pariser Schuh zu dem Londoner Schuh wie 1000 zu $937\frac{1}{2}$ verhält, so kann man in London den Pariser und in Paris den Londoner Schuh in sehr genauem Maasse darstellen, oder wenigstens Längen, die nach dem einen Fußmaasse gemessen sind, nach dem an-

dern berechnen. Man hat diese Verhältnisse der verschiedenen Maassen mit einer Genauigkeit untersucht, die für das gemeine Leben mehr als zulänglich ist, und wir sind daher in den Stand gesetzt, z. E. in Hamburg, und in jedem Orte der Welt ein jedes Maaß aus seinem bekannten Verhältnisse zu dem unsrigen eben so gut zu bestimmen, als wenn eine vollkommene Einigkeit in den Längenmaassen unter den Menschen Statt hätte. Allein ich kann nicht umhin, einer Schwierigkeit zu erwähnen, welche die Natur in den Weg legt, so daß noch in diesem Verhältniß der Längenmaassen viel unzuverläßiges bleibt. Man muß, um dieses Verhältniß der verschiedenen Maassen auszumachen, den Maaßstab des einen oder des andern Volks, von einer soliden Materie gemacht, unter Händen haben. Allein alle Materie, die man dazu wählen kann, ist mit dem veränderten Zustande der Luft gewissen Veränderungen in seiner Ausdehnung unterworfen. Wählt man Metalle dazu, so dehnt sie die Wärme aus, und die Kälte zieht sie zusammen. Bey dem Holz ist dieses zwar nicht so merklich. Aber es biegt sich doch immer weniger oder mehr, nachdem es feucht oder trocken ist. Daher können wir uns nicht versichert halten, das genaue Maaß, z. E. eines Londoner Fusses an einem Maaßstabe, der in London mit der größten Genauigkeit verfertigt worden, zu haben, weil wir nicht wissen, was für kleine Veränderungen derselbe durch den veränderten Zustand der Luft in seiner Ausdehnung und Figur erlitten habe, die, wenn sie auch bey einem einzelen Fusse ganz unerheblich sind, doch bey grossen Längen, wo derselbe sehr oft wiederholt wird, beträchtlich werden. Eben daher wird selbst an einem und demselben Orte das dort angenommene Maaß sich täglich um etwas verändern. Man sieht nicht, wie man diese Schwierigkeit in der Mittheilung der Maassen von einem Volke zum andern heben könne, ohne den Vorschlag des Herrn de la Condamine anzunehmen, welcher darinn besteht: Die Erfahrung hat es hinlänglich bewiesen, daß

das

das Pendul an den Uhren, an einerley Orten auf der Erdfläche, oder auch solchen, die einerley Abstand von der Mittellinie des Erdbodens haben, eine gewisse unveränderliche Länge haben müsse, um in jeder Secunde einmal zu schlagen, und man hat daraus, durch Erfahrung und mathematische Beweise, Regeln gefunden, wie lang es an einem jedem Orte in einem gewissen Abstande von dem Aequator des Erdbodens seyn müsse. Es muß z. E. in Hamburg, wenn wir dessen Geographische Breite auf 53°36′ setzen, 36 Zoll und 7,65 Linien Pariser Maaß lang seyn, wenn es richtig eine Secunde schlägt. Man kann also, wenn man eine Uhr hat, von der man bemerkt, daß sie in Hamburg richtig Secunden schlägt, gewiß seyn, daß man von dem Punct an, wo das Pendul eingehangen ist, bis zu dem sogenannten Schwingungspunct eine Länge von 36 Zoll 7,65 Linien habe, woraus sich der Pariser Fuß selbst ohne Mittheilung eines dort verfertigten Maaßstabes würde abnehmen lassen. Allein, da ich des Schwingungspuncts erwähne, so nenne ich eine Sache, welche nicht ohne große Mühe und ohne die größte Mathematische Sorgfalt sich bestimmen läßt, und also ist dieser Rath wenigstens Schwierigkeiten unterworfen, die ihn an allen Orten unnütz machen, wo nicht ein gründlicher Mathematikverständiger an die Sache mit Hand anlegen kann, der aber, um die Uhr zu berichtigen, worauf alles ankömmt, zu sehr genauen Astronomischen Beobachtungen geschickt und ausgerüstet seyn muß.

§. 10.

Allein gesetzt, die Maaßstäbe, welche man anwendet, wären unveränderlich, wie man es wenigstens für eine kleine Zeit dafür annehmen kann, so ist doch das unmittelbare Messen der Längen noch andern Schwierigkeiten unterworfen. Man versuche es nur eine mäßige Länge, z. E. die Länge eines Zimmers, mit einem einzelen Fußmaasse verschiedene mal überzumessen; so wird man finden, daß jedesmal ein

verschiedenes Maaß des Ganzen herauskömmt, woferne man nicht die gröste Behutsamkeit in der Anlegung des Maasses anwendet. Hat man eine für sich gerade Linie, die man mit dem Maasse verfolgen kann, so ist die Sache noch leicht genug. Allein die Schwierigkeiten werden fast unüberwindlich, wenn eine gerade Linie von erheblicher Länge durch die Luft fort über einem unebenen Boden gemessen werden soll. Man gebraucht zum Werkzeug grosser Messungen ein grösseres Maaß, als den Fuß, nämlich die Ruthe, deren gemeinste Bestimmung auf zehn oder zwölf Fuß ist, und vereinigt mehrere derselben, nämlich fünf bis zehn Ruthen in eine sogenannte Meßschnur oder Meßkette. Jene werden von Hanf gemacht, und auf gewisse Art gewunden und zubereitet, womit man doch nicht ganz verhindern kann, daß sie nicht nach Art aller hänfenen Seile durch die Nässe sich einkürzten, und wenn sie trocken werden, ausdehnten. Diese werden aus Meßing mit so vielen Gliedern gemacht, als sie Fusse enthalten, wobey es schweer zu verhüten ist, daß sie nicht an den Ringen, welche die Glieder verbinden, überschlagen, wodurch die Kette kürzer wird. Bey beyden aber ist es unvermeidlich, daß sie nicht, wenn sie an Stäben, die in die äussersten Ringe einpassen, durch die Luft ausgedehnt werden, sich in der Mitte biegen, und folglich eine mehr oder weniger krumme Linie zwischen ihren Endpuncten ausmachen sollten, da man eigentlich eine gerade Linie aus ihnen haben wollte. Die meiste Mühe findet sich, wenn der Boden sich bald erhebt, bald wieder senkt. Würde man ihn in seinen Krümmungen und Senkungen verfolgen, so würde allemal eine grössere Summe als die wahre Entfernung der Endpuncte entstehn. Man verfährt demnach also: Gesetzt, man wollte die Entfernung der Oerter A und B (Fig. 1.) über das dazwischen liegende Thal messen; so spannt man jedesmal die Meßkette so weit als sie reicht, oder der Abhang des Berges es erlauben will, gerade aus; z. E. von A in C, und fährt so stuffenweise fort, bis man endlich

an

an B kömmt. Man sieht leicht, daß die Summe aller der kleinern horizontalen Linien einer Linie, die von A nach B horizontal hinüber ginge, wenn beyde Oerter in einer Höhe liegen, gleich sey. Gesetzt aber, A läge höher, als B, so würde man hiebey zugleich ausmachen können, wie viel tiefer man bis zu D herabgestiegen sey, als bis zu B hinauf. Eine Messung, welche in vielen Fällen ihren grossen Nutzen hat, wovon ich aber alsdenn erst reden werde, wenn mich Fälle darauf leiten, in denen sie durchaus nothwendig wird.

Bey allem diesen entsteht eine neue Schwierigkeit, nämlich darinn, daß man die einzelen Linien, welche man übermißt, und aus deren Summe die ganze Linie, die man messen will, entsteht, theils vollkommen horizontal, theils so vor einander lege, daß sie ganz in einer ebenen Fläche liegen. Jenes erhält man durch die sogenannte Schrotwage, ein Werkzeug, dessen richtiger Gebrauch weit schweerer ist, als man gemeiniglich glaubt. Dieses erlanget man aber dadurch, daß man, so lange man auf einer Ebene fortmißt, die Stäbe, an denen die Kette ausgespannt ist, so stellt, daß der hinterste auch dem etwas entfernten Auge die vörderen mit dem zuerst gesteckten Merkzeichen insgesammt verdeckt, welches Hülfsmittel aber alsdenn fehlt, wenn man über einen sehr unebenen Boden nach der vorhin beschriebenen Art fortmißt. Ich überlasse indessen die Erläuterung aller derer Handgriffe und Hülfsmittel, welche ein sorgfältiger Landmesser anzuwenden hat, denen Büchern, die ausdrücklich von der practischen Geometrie handeln. Mir ist es genug, die Aufmerksamkeit meiner Leser auf diese Schwierigkeiten geleitet zu haben, welches ihnen wenigstens dazu dienen kann, die Arbeit solcher Leute, welchen sie dergleichen Geschäfte auftragen, in Fällen, die eine grosse Genauigkeit erfodern, zu beurtheilen, ob sie selbst diese Schwierigkeiten hinlänglich kennen, und die nöthige Vorsicht anwenden, um dieselben, wo nicht ganz zu heben, doch zu vermindern. Denn dem ersten Anschein nach ist nichts so leicht als eine gerade

...e zu messen, und in der Ausführung nichts so schweer, so daß ich fast behaupten mögte, es sey niemals eine gerade Linie vollkommen genau gemessen worden.

Zweyter Abschnitt,
Von der Messung solcher Längen, die nicht unmittelbar gemessen werden können.

§. 11.

Allein die Fälle kommen oft vor, in denen man Entfernungen messen will, in solchen Umständen, da die Natur ganz übersteigliche Schwierigkeiten in den Weg legt, daß sie nicht geradezu gemessen werden können. Dergleichen Fälle sind z. E., wenn zwischen den Oertern A und B ein Berg, ein Wald oder eine so unebene oder wol gar durch breite Gewässer unterbrochene Gegend liegt, daß man so wenig seine Meßketten dahinüber tragen, als auch nur von einem Ort bis zum andern sehen kann. Oft macht die Entfernung selbst das Messen so schweer, daß man den Gedanken ganz aufgeben muß, es unmittelbar zu thun. Wenn man z. E. die Weite zwischen unserm Hamburg und dem noch im Gesichte liegenden Lüneburg messen wollte, so würden ausser der Meilenlangen Entfernung die erwähnten Schwierigkeiten die unmittelbare Messung unmöglich machen. Allein die Geometrie findet dennoch Mittel, auch die Länge solcher Entfernungen mit einer Gewißheit auszumachen, die eben so groß ist, als sie seyn könnte, wenn man mit dem Maaßstabe in der Hand von dem einen Orte bis zum andern Fuß vor Fuß gemessen hätte. Hier geht das eigentliche Geschäfte der Geometrie an, welches ich aber nicht mit einiger Vollständigkeit erklären kann, ohne vorher von einigen Begriffen deutliche Erklärungen zu geben, welche in der Folge ohn Unterlaß vorkommen werden.

§. 12.

§. 12.

Eine gerade Linie wird beschrieben, wenn sich ein Punct mit unveränderter Richtung bewegt, und ist also der kürzeste Weg zwischen zween Puncten.

Eine krumme Linie wird durch einen Punct beschrieben, der die Richtung seiner Bewegung beständig ändert.

Die Richtung, mit welcher zwo Linien zusammen stossen, oder die Neigung derselben zu einander ist ein Winkel.

Man nennt Nebenwinkel diejenigen Winkel, welche eine Linie zu beyden Seiten macht, wenn sie auf eine andre Linie nicht völlig in deren Endpuncte fällt. Z. E. in Fig. 2. sind GAB und CAD Nebenwinkel.

Unter den verschiedenen Neigungen oder Winkeln, mit welchen Linien zusammen stossen, ist diejenige die merkwürdigste, wenn eine Linie so auf die andre trifft, daß die Winkel auf beyden Seiten gleich sind. (Fig. 3.) Man nennt einen solchen Winkel CAB einen rechten Winkel, und die Linie AC perpendicular. Doch hat auch ein rechter Winkel an dem Ende einer Linie statt, wenn er gerade so groß ist, als der Nebenwinkel, welcher bey Verlängerung der Linie von A aus entstehen würde. (Fig. 4.) Ein jeder Winkel, der kleiner ist als ein rechter Winkel (CAB Fig. 2.) ist ein spitziger, und der grösser ist, (DAC Fig. 2.) ein stumpfer Winkel.

Wir vergleichen hier den rechten Winkel mit Winkeln, die kleiner und grösser sind, als derselbe, und eben also vergleicht man die Winkel überhaupt mit einander. Allein wir werden von den Hülfsmitteln zur Schäzung der Grösse der Winkel nicht reden können, ohne vorher den Circul beschrieben zu haben.

Der Circul ist eine krumme Linie, welche beschrieben wird, wenn eine gerade Linie sich um einen festen Punct bewegt. Folglich sind in ihr alle Puncte von die-

sem Puncte, welcher der Mittelpunct heißt, gleich weit entfernt. Diese Entfernung oder die Linie C A selbst, welche den Circul beschreibt, Fig. 5. heißt der Halbmesser, oder Radius; eine jede Linie B C D, die durch den Mittelpunct geht, der Durchmesser, oder Diameter, und eine jede andre Linie, die von einem Punct des Umkreises zu dem andern gezogen wird, eine Sehne des Circuls. Ferner wird ein jeder Theil von dem Umkreise des Circuls ein Bogen desselben, ein Stück seiner Fläche, das zwischen zween seiner Halbmesser begriffen ist, (A C B Fig. 5.) ein Ausschnitt, und wenn es zwischen seinem Umriß und einer Sehne eingeschlossen ist, (E A F) ein Abschnitt genannt.

Man theilt den Umkreis des Circuls in 360 gleiche Theile oder Grade, jeden dieser Grade in 60 Minuten, und jede Minute in 60 Secunden, diese aber in 60 Tertien u. s. f., wiewol man die genauern Eintheilungen nach den Secunden nur selten, und noch seltener die nach Tertien bemerkt findet. Die Zeichen, mit welchen man diese Theile des Circuls bemerkt, sind °, ′, ″, ‴, und folgende Zahlen 59° 17′ 15″ werden also ausgesprochen: 59 Grade 17 Minuten 15 Secunden.

Diese Theile des Circuls geben das beste Mittel zur Schätzung der Größe der Winkel, wenn man die Spitze des Winkels an den Mittelpunct eines Circuls bringt. Denn alsdann kann man den Winkel ansehen, als wäre er durch die gerade Bewegung zweener Puncte nach dem Mittelpunct des Circuls zu entstanden, und es ist klar, daß ein jeder andrer Winkel als A C B, z. E. G C B Fig. 5. von einem andern Puncte als A herkommen, folglich zwischen seinen Schenkeln einen andern Bogen als A B abschneiden muß. Wenn nun beyde Bogen A B und G B nach ihren Graden und Secunden eingetheilt wären, so würde man aus der verschiedenen Zahl dieser Theile auf die verschiedene Größe der Winkel schließen können. Nun hat zwar diese

Ein-

Eintheilung des Circuls ihre grosse Schwierigkeit. Es ist leicht den Circul in 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32 Theile und so fort zu theilen, allein die mehresten Eintheilungen, und insonderheit die in sehr kleine Theile lassen sich nicht anders, als durch ein gewisses Augenmaaß zu Stande bringen. Man braucht indessen als ein bequemes Werkzeug zur Schätzung der Winkel einen metallenen halben Circul, der durch das Augenmaaß und gewisse mechanische Handgriffe in erwähnte Grade, und wenn er groß genug ist, in kleinere Theile abgetheilt ist. Ein solcher Winkelmesser heißt in der einfachen Einrichtung, die er haben muß, um Winkel auf dem Papier zu messen, ein Transporteur, in der Größe und Einrichtung aber, welche nöthig ist, um Winkel auf dem Felde zu messen, ein Astrolabium, und mit einem teutschen Namen Winkelmesser, auch wol Theilscheibe. Im Astronomischen Gebrauch würden Werkzeuge dieser Art sehr groß gemacht werden müssen, und folglich zu schwer werden. Man wendet also da nur den vierten Theil des Circuls, oder die so genannten Quadranten, ja wol gar nur Sechs- und Achttheile des Circuls, oder Sextanten und Octanten an.

Wenn gerade Linien auf einer Fläche so neben einander gezogen werden, daß sie gar keine Neigung gegen einander haben, folglich eine immer gleiche Entfernung behalten, so nennt man sie Parallellinien.

§. 13.

Ein Raum, der von dreyen Linien eingeschlossen ist, heißt ein Triangel. Diese Linien können gerade oder krumm seyn. Im ersten Fall heißt der Triangel geradelinicht, (A C B Fig. 7.) in dem zweyten krummlinicht. Wenn eine oder zwo seiner Seiten gerade, die übrigen aber krumm sind, so ist es ein Triangel mit gemischten Linien. Wir werden uns aber mit den beyden letzten Gattungen hier gar nicht beschäftigen dürfen. Wenn alle seine

Seiten

Seiten einander gleich sind, so ist es ein gleichseitiger, (Fig. 7.) sind nur zween derselben gleich, ein gleichschenklichter, (Fig. 8.) und wenn keine der andern gleich ist, ein ungleichseitiger Triangel. (Fig. 9.) Es wird aber nach geometrischen Gründen erwiesen, daß, wenn zwo Seiten einander gleich sind, auch allemal zween Winkel, die diesen entgegen stehen, einander gleich seyn, und daß ein gleichseitiger Triangel auch allemal ein gleichwinklichter seyn müsse.

Man theilt auch die Triangel in gewisse Gattungen in Absicht auf die Winkel ein. Ein Triangel, in welchem alle Winkel spitz sind, heißt ein spitzwinklichter, (Fig. 10.) der, in welchem ein Winkel recht ist, ein rechtwinklichter, (Fig. 11.) und der, in welchem ein Winkel stumpf ist, ein stumpfwinklichter Triangel. (Fig. 12.) Kein geradelinichter Triangel aber kann mehr als Einen rechten oder Einen stumpfen Winkel haben, sondern zween seiner Winkel sind allemal spitz, und überhaupt ist die Summe der Winkel in einem geradelinichten Triangel allemal zween rechten Winkel gleich, und die Summe von deren Maassen beträgt in jedem Triangel, von welcher Figur er auch sey, 180 Grade.

Die Benennung Viereck ist allen Figuren gemein, welche von vier Seiten eingeschlossen sind. Doch ist die anmerkungswürdigste unter ihnen das Quadrat, oder ein Viereck, welches vier gleiche Seiten hat. (Fig. 13.) Ein Viereck, daß bey vier rechten Winkeln die einander entgegen stehenden Seiten gleich hat, heißt ein längliches Quadrat, oder mit einer lateinischen Benennung Rectangulum. (Fig. 14.) Wenn es bey vier gleichen Seiten ungleiche Winkel hat, so nennt man es eine Raute, (Rhombus.) Sind die Winkel ungleich, aber die einander entgegenstehende Seiten gleich, so heißt es Rautenförmig, (Rhomboides.) (Fig. 16.) Allen übrigen Vierecken giebt man den griechischen Namen Trapezium. (Fig. 17.)

Die

Die vier beschriebenen Arten haben die Eigenschaft, daß ihre einander entgegen liegende Seiten gleiche Weite von einander haben, oder parallel sind. Man begreift sie daher auch insgesammt unter der Benennung Parallelogramma.

Alle übrige Figuren werden überhaupt **Vielecke** oder **Polygone**, insbesondre aber nach der Zahl ihrer Seiten **Fünfecke**, **Sechsecke** u. s. f. benannt. Sind ihre Seiten und Winkel einander gleich, so sind sie **regulaire**, sind diese aber entweder alle, oder auch nur einige ungleich, so heissen sie **irregulaire Vielecke**. Jene müssen sich alle in einem Circul beschreiben lassen, dessen Umkreis sie mit ihren Ecken berühren, und es muß sich auch ein Circul in ihnen beschreiben lassen, so daß dessen Umriß alle ihre Seiten berührt. S. Fig. 18 und 19.

Anmerkung.

Hier wäre freylich der Ort, Aufgaben zu der Zeichnung der jetzt beschriebenen Figuren beyzubringen und zu erläutern; allein man wird mir erlauben, lieber auf die Lehr- und Handbücher der Geometrie zu verweisen.

§. 14.

Von allen erklärten Figuren ist keine unsrer Betrachtung so würdig, als der geradelinichte Triangel. Man sieht leicht ein, daß dessen Figur und Größe gänzlich durch dessen Seiten und Winkel bestimmt werde, und daß mehrere Triangel nothwendig einander gleich seyn müssen, wenn ihre Seiten und Winkel insgesammt einander gleich sind. Es scheint also, als wenn man, um überzeugt zu werden, daß Triangel einander gleich seyn, vorher von allen ihren Seiten und Winkeln gewiß seyn müsse, daß diese einander gleich sind. Allein es gehört in der That nicht so viel dazu, um gleiche Triangel zu haben. Man versuche es, zween gleiche Winkel B A C und b a c zu zeichnen. (Fig. 20.) Man gebe ihren beyden Seiten AB und AC, ab und ac einerley

verschiedenes Maaß des Ganzen herauskömmt, woferne man nicht die größte Behutsamkeit in der Anlegung des Maasses anwendet. Hat man eine für sich gerade Linie, die man mit dem Maasse verfolgen kann, so ist die Sache noch leicht genug. Allein die Schwierigkeiten werden fast unüberwindlich, wenn eine gerade Linie von erheblicher Länge durch die Luft fort über einem unebenen Boden gemessen werden soll. Man gebraucht zum Werkzeug groser Messungen ein grösseres Maaß, als den Fuß, nämlich die Ruthe, deren gemeinste Bestimmung auf zehn oder zwölf Fuß ist, und vereinigt mehrere derselben, nämlich fünf bis zehn Ruthen in eine sogenannte Meßschnur oder Meßkette. Jene werden von Hanf gemacht, und auf gewisse Art gewunden und zubereitet, womit man doch nicht ganz verhindern kann, daß sie nicht nach Art aller hänfenen Seile durch die Nässe sich einkürzten, und wenn sie trocken werden, ausdehnten. Diese werden aus Meßing mit so vielen Gliedern gemacht, als sie Fusse enthalten, wobey es schweer zu verhüten ist, daß sie nicht an den Ringen, welche die Glieder verbinden, überschlagen, wodurch die Kette kürzer wird. Bey beyden aber ist es unvermeidlich, daß sie nicht, wenn sie an Stäben, die in die äussersten Ringe einpassen, durch die Luft ausgedehnt werden, sich in der Mitte biegen, und folglich eine mehr oder weniger krumme Linie zwischen ihren Endpuncten ausmachen sollten, da man eigentlich eine gerade Linie aus ihnen haben wollte. Die meiste Mühe findet sich, wenn der Boden sich bald erhebt, bald wieder senkt. Würde man ihn in seinen Krümmungen und Senkungen verfolgen, so würde allemal eine größere Summe als die wahre Entfernung der Endpuncte entstehn. Man verfährt demnach also: Gesetzt, man wollte die Entfernung der Oerter A und B (Fig. 1.) über das dazwischen liegende Thal messen; so spannt man jedesmal die Meßkette so weit als sie reicht, oder der Abhang des Berges es erlauben will, gerade aus; z. E. von A in C, und fährt so stuffenweise fort, bis man endlich

an

an B kömmt. Man sieht leicht, daß die Summe aller der kleinern horizontalen Linien einer Linie, die von A nach B horizontal hinüber ginge, wenn beyde Oerter in einer Höhe liegen, gleich sey. Gesetzt aber, A läge höher, als B, so würde man hiebey zugleich ausmachen können, wie viel tiefer man bis zu D herabgestiegen sey, als bis zu B hinauf. Eine Messung, welche in vielen Fällen ihren grossen Nutzen hat, wovon ich aber alsdenn erst reden werde, wenn mich Fälle darauf leiten, in denen sie durchaus nothwendig wird.

Bey allem diesen entsteht eine neue Schwierigkeit, nämlich darinn, daß man die einzelen Linien, welche man übermißt, und aus deren Summe die ganze Linie, die man messen will, entsteht, theils vollkommen horizontal, theils so vor einander lege, daß sie ganz in einer ebenen Fläche liegen. Jenes erhält man durch die sogenannte Schrotwage, ein Werkzeug, dessen richtiger Gebrauch weit schweerer ist, als man gemeiniglich glaubt. Dieses erlanget man aber dadurch, daß man, so lange man auf einer Ebene fortmißt, die Stäbe, an denen die Kette ausgespannt ist, so stellt, daß der hinterste auch dem etwas entfernten Auge die vörderen mit dem zuerst gesteckten Merkzeichen insgesammt verdeckt, welches Hülfsmittel aber alsdenn fehlt, wenn man über einen sehr unebenen Boden nach der vorhin beschriebenen Art fortmißt. Ich überlasse indessen die Erläuterung aller derer Handgriffe und Hülfsmittel, welche ein sorgfältiger Landmesser anzuwenden hat, denen Büchern, die ausdrücklich von der practischen Geometrie handeln. Mir ist es genug, die Aufmerksamkeit meiner Leser auf diese Schwierigkeiten geleitet zu haben, welches ihnen wenigstens dazu dienen kann, die Arbeit solcher Leute, welchen sie dergleichen Geschäfte auftragen, in Fällen, die eine grosse Genauigkeit erfodern, zu beurtheilen, ob sie selbst diese Schwierigkeiten hinlänglich kennen, und die nöthige Vorsicht anwenden, um dieselben, wo nicht ganz zu heben, doch zu vermindern. Denn dem ersten Anschein nach ist nichts so leicht als eine gerade

...e zu messen, und in der Ausführung nichts so schweer, so daß ich fast behaupten mögte, es sey niemals eine gerade Linie vollkommen genau gemessen worden.

Zweyter Abschnitt,

Von der Messung solcher Längen, die nicht unmittelbar gemessen werden können.

§. 11.

Allein die Fälle kommen oft vor, in denen man Entfernungen messen will, in solchen Umständen, da die Natur ganz übersteigliche Schwierigkeiten in den Weg legt, daß sie nicht geradezu gemessen werden können. Dergleichen Fälle sind z. E., wenn zwischen den Oertern A und B ein Berg, ein Wald oder eine so unebene oder wol gar durch breite Gewässer unterbrochene Gegend liegt, daß man so wenig seine Meßketten dahinüber tragen, als auch nur von einem Ort bis zum andern sehen kann. Oft macht die Entfernung selbst das Messen so schweer, daß man den Gedanken ganz aufgeben muß, es unmittelbar zu thun. Wenn man z. E. die Weite zwischen unserm Hamburg und dem noch im Gesichte liegenden Lüneburg messen wollte, so würden ausser der Meilenlangen Entfernung die erwähnten Schwierigkeiten die unmittelbare Messung unmöglich machen. Allein die Geometrie findet dennoch Mittel, auch die Länge solcher Entfernungen mit einer Gewißheit auszumachen, die eben so groß ist, als sie seyn könnte, wenn man mit dem Maaßstabe in der Hand von dem einen Orte bis zum andern Fuß vor Fuß gemessen hätte. Hier geht das eigentliche Geschäfte der Geometrie an, welches ich aber nicht mit einiger Vollständigkeit erklären kann, ohne vorher von einigen Begriffen deutliche Erklärungen zu geben, welche in der Folge ohn Unterlaß vorkommen werden.

§. 12.

§. 12.

Eine gerade Linie wird beschrieben, wenn sich ein Punct mit unveränderter Richtung bewegt, und ist also der kürzeste Weg zwischen zween Puncten.

Eine krumme Linie wird durch einen Punct beschrieben, der die Richtung seiner Bewegung beständig ändert.

Die Richtung, mit welcher zwo Linien zusammen stossen, oder die Neigung derselben zu einander ist ein Winkel.

Man nennt Nebenwinkel diejenigen Winkel, welche eine Linie zu beyden Seiten macht, wenn sie auf eine andre Linie nicht völlig in deren Endpuncte fällt. Z. E. in Fig. 2. sind GAB und CAD Nebenwinkel.

Unter den verschiedenen Neigungen oder Winkeln, mit welchen Linien zusammen stossen, ist diejenige die merkwürdigste, wenn eine Linie so auf die andre trifft, daß die Winkel auf beyden Seiten gleich sind. (Fig. 3.) Man nennt einen solchen Winkel CAB einen **rechten Winkel**, und die Linie AC **perpendicular**. Doch hat auch ein rechter Winkel an dem Ende einer Linie statt, wenn er gerade so groß ist, als der Nebenwinkel, welcher bey Verlängerung der Linie von A aus entstehen würde. (Fig. 4.) Ein jeder Winkel, der kleiner ist als ein rechter Winkel (CAB Fig. 2.) ist ein **spitziger**, und der grösser ist, (DAC Fig. 2.) ein **stumpfer Winkel**.

Wir vergleichen hier den rechten Winkel mit Winkeln, die kleiner und grösser sind, als derselbe, und eben also vergleicht man die Winkel überhaupt mit einander. Allein wir werden von den Hülfsmitteln zur Schätzung der Grösse der Winkel nicht reden können, ohne vorher den Circul beschrieben zu haben.

Der Circul ist eine krumme Linie, welche beschrieben wird, wenn eine gerade Linie sich um einen festen Punct bewegt. Folglich sind in ihr alle Puncte von die-

sem Puncte, welcher der Mittelpunct heißt, gleich weit entfernt. Diese Entfernung oder die Linie C A selbst, welche den Circul beschreibt, Fig. 5. heißt der Halbmesser, oder Radius; eine jede Linie B C D, die durch den Mittelpunct geht, der Durchmesser, oder Diameter, und eine jede andre Linie, die von einem Punct des Umkreises zu dem andern gezogen wird, eine Sehne des Circuls. Ferner wird ein jeder Theil von dem Umkreise des Circuls ein Bogen desselben, ein Stück seiner Fläche, das zwischen zween seiner Halbmesser begriffen ist, (A C B Fig. 5.) ein Ausschnitt, und wenn es zwischen seinem Umriß und einer Sehne eingeschlossen ist, (E A F) ein Abschnitt genannt.

Man theilt den Umkreis des Circuls in 360 gleiche Theile oder Grade, jeden dieser Grade in 60 Minuten, und jede Minute in 60 Secunden, diese aber in 60 Tertien u. s. f., wiewol man die genauern Eintheilungen nach den Secunden nur selten, und noch seltener die nach Tertien bemerkt findet. Die Zeichen, mit welchen man diese Theile des Circuls bemerkt, sind °, ′, ″, ‴, und folgende Zahlen 59° 17′ 15″ werden also ausgesprochen: 59 Grade 17 Minuten 15 Secunden.

Diese Theile des Circuls geben das beste Mittel zur Schätzung der Größe der Winkel, wenn man die Spitze des Winkels an den Mittelpunct eines Circuls bringt. Denn alsdann kann man den Winkel ansehen, als wäre er durch die gerade Bewegung zweener Puncte nach dem Mittelpunct des Circuls zu entstanden, und es ist klar, daß ein jeder andrer Winkel als A C B, z. E. G C B Fig. 5. von einem andern Puncte als A herkommen, folglich zwischen seinen Schenkeln einen andern Bogen als A B abschneiden muß. Wenn nun beyde Bogen A B und G B nach ihren Graden und Secunden eingetheilt wären, so würde man aus der verschiedenen Zahl dieser Theile auf die verschiedene Größe der Winkel schließen können. Nun hat zwar diese

Ein-

Eintheilung des Circuls ihre grosse Schwierigkeit. Es ist leicht den Circul in 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32 Theile und so fort zu theilen, allein die mehresten Eintheilungen, und insonderheit die in sehr kleine Theile lassen sich nicht anders, als durch ein gewisses Augenmaaß zu Stande bringen. Man braucht indessen als ein bequemes Werkzeug zur Schätzung der Winkel einen metallenen halben Circul, der durch das Augenmaaß und gewisse mechanische Handgriffe in erwähnte Grade, und wenn er groß genug ist, in kleinere Theile abgetheilt ist. Ein solcher Winkelmesser heißt in der einfachen Einrichtung, die er haben muß, um Winkel auf dem Papier zu messen, ein Transporteur, in der Größe und Einrichtung aber, welche nöthig ist, um Winkel auf dem Felde zu messen, ein Astrolabium, und mit einem teutschen Namen Winkelmesser, auch wol Theilscheibe. Im Astronomischen Gebrauch würden Werkzeuge dieser Art sehr groß gemacht werden müssen, und folglich zu schweer werden. Man wendet also da nur den vierten Theil des Circuls, oder die so genannten Quadranten, ja wol gar nur Sechs- und Achttheile des Circuls, oder Sextanten und Octanten an.

Wenn gerade Linien auf einer Fläche so neben einander gezogen werden, daß sie gar keine Neigung gegen einander haben, folglich eine immer gleiche Entfernung behalten, so nennt man sie Parallellinien.

§. 13.

Ein Raum, der von dreyen Linien eingeschlossen ist, heißt ein Triangel. Diese Linien können gerade oder krumm seyn. Im ersten Fall heißt der Triangel geradelinicht, (A C B Fig. 7.) in dem zweyten krummlinicht. Wenn eine oder zwo seiner Seiten gerade, die übrigen aber krumm sind, so ist es ein Triangel mit gemischten Linien. Wir werden uns aber mit den beyden letzten Gattungen hier gar nicht beschäftigen dürfen. Wenn alle seine

Seiten

Seiten einander gleich sind, so ist es ein gleichseitiger, (Fig. 7.) sind nur zween derselben gleich, ein gleichschenklichter, (Fig. 8.) und wenn keine der andern gleich ist, ein ungleichseitiger Triangel. (Fig. 9.) Es wird aber nach geometrischen Gründen erwiesen, daß, wenn zwo Seiten einander gleich sind, auch allemal zween Winkel, die diesen entgegen stehen, einander gleich seyn, und daß ein gleichseitiger Triangel auch allemal ein gleichwinklichter seyn müsse.

Man theilt auch die Triangel in gewisse Gattungen in Absicht auf die Winkel ein. Ein Triangel, in welchem alle Winkel spitz sind, heißt ein spitzwinklichter, (Fig. 10.) der, in welchem ein Winkel recht ist, ein rechtwinklichter, (Fig. 11.) und der, in welchem ein Winkel stumpf ist, ein stumpfwinklichter Triangel. (Fig. 12.) Kein geradelinichter Triangel aber kann mehr als Einen rechten oder Einen stumpfen Winkel haben, sondern zween seiner Winkel sind allemal spitz, und überhaupt ist die Summe der Winkel in einem geradelinichten Triangel allemal zween rechten Winkel gleich, und die Summe von deren Maassen beträgt in jedem Triangel, von welcher Figur er auch sey, 180 Grade.

Die Benennung Viereck ist allen Figuren gemein, welche von vier Seiten eingeschlossen sind. Doch ist die anmerkungswürdigste unter ihnen das Quadrat, oder ein Viereck, welches vier gleiche Seiten hat. (Fig. 13.) Ein Viereck, daß bey vier rechten Winkeln die einander entgegen stehenden Seiten gleich hat, heißt ein länglichtes Quadrat, oder mit einer lateinischen Benennung Rectangulum. (Fig. 14.) Wenn es bey vier gleichen Seiten ungleiche Winkel hat, so nennt man es eine Raute, (Rhombus.) Sind die Winkel ungleich, aber die einander entgegenstehende Seiten gleich, so heißt es Rautenförmig, (Rhomboides.) (Fig. 16.) Allen übrigen Vierecken giebt man den griechischen Namen Trapezium. (Fig. 17.)

Die

Die vier beschriebenen Arten haben die Eigenschaft, daß ihre einander entgegen liegende Seiten gleiche Weite von einander haben, oder parallel sind. Man begreift sie daher auch insgesammt unter der Benennung Parallelogramma.

Alle übrige Figuren werden überhaupt **Vielecke** oder **Polygone**, insbesondre aber nach der Zahl ihrer Seiten **Fünfecke**, **Sechsecke** u. s. f. benannt. Sind ihre Seiten und Winkel einander gleich, so sind sie **regulaire**, sind diese aber entweder alle, oder auch nur einige ungleich, so heissen sie **irregulaire Vielecke**. Jene müssen sich alle in einem Circul beschreiben lassen, dessen Umkreis sie mit ihren Ecken berühren, und es muß sich auch ein Circul in ihnen beschreiben lassen, so daß dessen Umriß alle ihre Seiten berührt. S. Fig. 18 und 19.

Anmerkung.

Hier wäre freylich der Ort, Aufgaben zu der Zeichnung der jetzt beschriebenen Figuren beyzubringen und zu erläutern; allein man wird mir erlauben, lieber auf die Lehr- und Handbücher der Geometrie zu verweisen.

§. 14.

Von allen erklärten Figuren ist keine unsrer Betrachtung so würdig, als der geradelinichte Triangel. Man sieht leicht ein, daß dessen Figur und Größe gänzlich durch dessen Seiten und Winkel bestimmt werde, und daß mehrere Triangel nothwendig einander gleich seyn müssen, wenn ihre Seiten und Winkel insgesammt einander gleich sind. Es scheint also, als wenn man, um überzeugt zu werden, daß Triangel einander gleich seyn, vorher von allen ihren Seiten und Winkeln gewiß seyn müsse, daß diese einander gleich sind. Allein es gehört in der That nicht so viel dazu, um gleiche Triangel zu haben. Man versuche es, zween gleiche Winkel BAC und bac zu zeichnen. (Fig. 20.) Man gebe ihren beyden Seiten AB und AC, ab und ac einerley

einerley Länge; so wird die Lage der Puncte B, C und b, c so bestimmt, daß die Linien zwischen beyden unmöglich in der Länge so wenig, als in der Lage gegen die beyden übrigen Linien desselben Triangels ungleich ausfallen können. Folglich werden beyde Triangel ABC und abc einander gleich werden, und wir können überhaupt gewiß seyn:

I. **Wenn in zween oder mehrern Triangeln ein Winkel und die beyden Seiten, die ihn einschliessen, gleich sind, so sind ihre übrigen Winkel, ihre übrige Seite, und auch die Fläche der Dreyecke einander gleich.**

Man dehne diesen Satz nicht zu weit aus, und nehme nicht etwan die Triangel überhaupt für gleich an, wenn man in ihnen zwo Seiten und einen Winkel gleich befindet. Es wird nothwendig erfodert, daß die Winkel zwischen den gleichen Seiten liegen. In der 21 und 22sten Figur haben beyde Triangel die Winkel A und a gleich, und die Seiten AB und BC sind den Seiten ab und ac gleich. Die Triangel selbst sind aber keinesweges gleich, weil die Winkel A und a nicht zwischen den gleichen Linien AB, AC und ab, ac liegen.

Man wird ebenfalls immer einerley Dreyecke zeichnen, so oft man sie unter dieser Bedingung zeichnet, daß man eine Seite AB und ab (Fig. 23.) in beyden gleich annimmt, und Linien von den Endpuncten A, B und a, b aus unter einerley Winkeln zieht, und es ist auch überhaupt wahr:

II. **Wenn in zween oder mehrern Triangeln eine Seite und zween Winkel gleich sind, so ist in den ganzen Triangeln auch alles übrige gleich.**

Eben also ist auch dieses eine Geometrische Wahrheit:

III. **Wenn in zween oder mehrern Triangeln alle drey Seiten AB und ab, AC und ac, BC und bc, (Fig. 24.) gleich sind, so sind ihre Winkel und ihre Flächen einander gleich.**

§. 15.

Diese drey Sätze sind von einem weitläuftigen Nutzen. Fast alle Beweise derer Wahrheiten, welche in den Geometrischen Anweisungen folgen, gründen sich darauf. Wir werden aber bloß eine Anwendung derselben für diejenigen Fälle geben, in welchen es auf die Messung einer Linie ankömmt, die den vorhin §. 11. erwähnten Schwierigkeiten unterworfen ist.

Man nehme also den Fall an, daß man die Breite eines Berges an seinem Fusse messen wolle. Die zu messende Linie AB (Fig. 25.) geht durch den Berg, und es ist an keine unmittelbare Messung derselben zu gedenken, da sie nicht einmal dem Auge bloß liegt. Man kann indessen diese Linie in einen Triangel bringen, wenn man einen dritten Punct C absteckt, von welchem aus man die Puncte A und B sehen, und die Entfernung bis zu ihnen so wol, als den Winkel zwischen beyden ACB, messen kann. Alsdenn sind in dem Triangel A C B drey Theile bekannt, nämlich zwo Linien A C und C B, und der Winkel A C B, den dieselben einschliessen. Jetzt haben wir genug, um einen Triangel zu machen, der diesem Triangel gleich sey, und in welchem folglich eine Seite der Linie A B gleich seyn wird. Wir dürfen zu dem Ende nur die Linien A C und C B in D und E verlängern, bis sie von dem Punct C aus den Linien A C und C B gleich werden; der Winkel D C E bleibt alsdenn ebenfalls unverändert, und wir haben in dem Triangel D C E die Linie D E der Linie A B gleich, die wir nunmehr unmittelbar messen können. Es wird alsdenn eben so gut seyn, als wenn wir die Linie A B selbst gemessen hätten.

Man wird eben so verfahren können, wenn zwischen A und B ein Teich oder Morast, oder ein Wald liegt, der die unmittelbare Messung der Linie A B verhindert.

Gesetzt aber zwischen den Puncten A und B läge ein Fluß, oder irgend eine andere Hinderniß, welche es unmöglich machte,

einerley Länge; so wird die Lage der Puncte B, C und b, c so bestimmt, daß die Linien zwischen beyden unmöglich in der Länge so wenig, als in der Lage gegen die beyden übrigen Linien desselben Triangels ungleich ausfallen können. Folglich werden beyde Triangel ABC und abc einander gleich werden, und wir können überhaupt gewiß seyn:

I. **Wenn in zween oder mehrern Triangeln ein Winkel und die beyden Seiten, die ihn einschliessen, gleich sind, so sind ihre übrigen Winkel, ihre übrige Seite, und auch die Fläche der Dreyecke einander gleich.**

Man dehne diesen Satz nicht zu weit aus, und nehme nicht etwan die Triangel überhaupt für gleich an, wenn man in ihnen zwo Seiten und einen Winkel gleich befindet. Es wird nothwendig erfodert, daß die Winkel zwischen den gleichen Seiten liegen. In der 21 und 22sten Figur haben beyde Triangel die Winkel A und a gleich, und die Seiten AB und BC sind den Seiten ab und ac gleich. Die Triangel selbst sind aber keinesweges gleich, weil die Winkel A und a nicht zwischen den gleichen Linien AB, AC und ab, ac liegen.

Man wird ebenfalls immer einerley Dreyecke zeichnen, so oft man sie unter dieser Bedingung zeichnet, daß man eine Seite AB und ab (Fig. 23.) in beyden gleich annimmt, und Linien von den Endpuncten A, B und a, b aus unter einerley Winkeln zieht, und es ist auch überhaupt wahr:

II. **Wenn in zween oder mehrern Triangeln eine Seite und zween Winkel gleich sind, so ist in den ganzen Triangeln auch alles übrige gleich.**

Eben also ist auch dieses eine Geometrische Wahrheit:

III. **Wenn in zween oder mehrern Triangeln alle drey Seiten AB und ab, AC und ac, BC und bc, (Fig. 24.) gleich sind, so sind ihre Winkel und ihre Flächen einander gleich.**

§. 15.

§. 15.

Diese drey Sätze sind von einem weitläuftigen Nutzen. Fast alle Beweise derer Wahrheiten, welche in den Geometrischen Anweisungen folgen, gründen sich darauf. Wir werden aber bloß eine Anwendung derselben für diejenigen Fälle geben, in welchen es auf die Messung einer Linie ankömmt, die den vorhin §. 11. erwähnten Schwierigkeiten unterworfen ist.

Man nehme also den Fall an, daß man die Breite eines Berges an seinem Fusse messen wolle. Die zu messende Linie AB (Fig. 25.) geht durch den Berg, und es ist an keine unmittelbare Messung derselben zu gedenken, da sie nicht einmal dem Auge bloß liegt. Man kann indessen diese Linie in einen Triangel bringen, wenn man einen dritten Punct C absteckt, von welchem aus man die Puncte A und B sehen, und die Entfernung bis zu ihnen so wol, als den Winkel zwischen beyden ACB, messen kann. Alsdenn sind in dem Triangel A C B drey Theile bekannt, nämlich zwo Linien A C und CB, und der Winkel A C B, den dieselben einschliessen. Jetzt haben wir genug, um einen Triangel zu machen, der diesem Triangel gleich sey, und in welchem folglich eine Seite der Linie A B gleich seyn wird. Wir dürfen zu dem Ende nur die Linien A C und C B in D und E verlängern, bis sie von dem Punct C aus den Linien A C und C B gleich werden; der Winkel D C E bleibt alsdenn ebenfalls unverändert, und wir haben in dem Triangel D C E die Linie D E der Linie A B gleich, die wir nunmehr unmittelbar messen können. Es wird alsdenn eben so gut seyn, als wenn wir die Linie A B selbst gemessen hätten.

Man wird eben so verfahren können, wenn zwischen A und B ein Teich oder Morast, oder ein Wald liegt, der die unmittelbare Messung der Linie A B verhindert.

Gesetzt aber zwischen den Puncten A und B läge ein Fluß, oder irgend eine andere Hinderniß, welche es unmöglich machte,

machte, einen Punct zu finden, von welchem aus man nach B oder nach A messen könnte, aber doch nicht hinderte, von A nach B zu sehen. (Fig. 26.) Die Sache wird in diesem Falle nichts schweerer, als im vorigen. Wir können den Winkel B A C so wol als den Winkel A C B, nebst der Linie A C messen, und haben alsdenn zween Winkel und eine Linie, welche hinlänglich sind, um einen Triangel, der diesem gleich sey, zu bestimmen. Wir dürfen zu dem Ende nur die Linie A C bis in D hinaustragen, die Linie C B über E unbestimmt hinaus und eine dritte Linie D E unter dem Winkel B A C fortführen, bis sie die Linie C E erreicht. Diese Linie D E wird alsdenn der Linie A B gleich, und ihr Maaß giebt das Maaß der Linie A B.

Wir würden so gar durch ähnliche Wege die Weite zweener Oerter erfahren können, deren Lage so ist, daß wir zu keinem von beyden kommen, und auch nur unsre Entfernung von einem derselben messen können. (Fig. 36.)

§. 16.

Allein man wird in der Ausführung der jetzt beschriebenen Messungen viele Mühe und Arbeit, und unüberwindliche Schwierigkeiten finden, welche die Lage der Gegend in den Weg legt, wenn dieselbe hinter dem Punct C bergigt, morastig, oder durch einen Fluß unterbrochen ist. Man wird nur selten den Raum finden, welcher nöthig ist, um einen so großen Triangel, als die Triangel A B C in beyden Figuren sind, abstecken zu können, und wenn es auch sich thun liesse, so macht es bey sehr großen Weiten unsägliche Mühe. Meine Leser können also zum voraus die erklärten Methoden als beynahe unbrauchbar ansehen, und ich würde sie nicht einmal beschrieben haben, wenn ich mir nicht durch sie den Weg zur Erläuterung besserer Hülfsmittel gebahnet hätte, um große Entfernungen ohne so viel Beschwerlichkeiten, und selbst in denen Fällen, wo jene in der Ausführung ganz unmöglich werden, zu messen. Ich finde aber zu deren Erläu-

terung

terung einige Begriffe zu erklären nöthig, welche dieser Sache ihr ganzes Licht geben müssen.

§. 17.

Wir haben überhaupt den Begriff der Aehnlichkeit bey Dingen, die wir in ihren Bestimmungen übereinkommen sehen. Nothwendig aber ist es, die philosophische Aehnlichkeit von der mathematischen zu unterscheiden. Jene ist eine Uebereinstimmung der Dinge in ihren wesentlichen Eigenschaften, durch welche sie zu Dingen einer Art werden, oder auch in gewissen zufälligen Bestimmungen; und von dieser rede ich nun weiter nicht. Diese, die mathematische Aehnlichkeit ist eine Uebereinstimmung in der Figur und äusserlichen Gestalt der Dinge, und von dieser reden wir im gemeinen Leben am häufigsten. Wir nennen z. E. einen Menschen dem andern ähnlich, wenn wir eine Uebereinstimmung in der Bildung ihres Körpers, und vornemlich ihres Gesichts bemerken. Eine Gleichheit der Grösse kömmt hiebey gar nicht in Betrachtung. Nichts hindert uns, das kleinste Gemählde einem völlig erwachsenen Menschen, oder das kleine Gesicht eines halbjährigen Kindes dem Gesichte seines Vaters ähnlich zu nennen. Wir wollen indessen näher entwickeln, was uns zu diesem Urtheile von der Aehnlichkeit oder Uebereinstimmung der Figur der Dinge veranlaßt, und wir wollen die Beyspiele dazu von den einfachsten Figuren, den Triangeln, nehmen.

§. 18.

Ich habe (Fig. 27. 28. 29.) drey Triangel neben einander gestellt. Sie haben alle drey eine metaphysische Aehnlichkeit, sind Dinge einer Art, sind Triangel. Aber niemand wird ihnen allen eine Aehnlichkeit in dem Verstande beylegen, in welchem man dieses Wort nimmt, wenn man von der Figur der Dinge redet, und ich bin gewiß, meine Leser werden sich alle vereinigen, lieber den ersten und den

zweyten, als den zweyten und den dritten Triangel einander ähnlich zu nennen, ungeachtet die beyden letztern an Grösse einander weit näher, als jene kommen. Sie werden mehr unterscheidendes in der Figur der beyden letztern, als in der Figur der beyden erstern bemerken. Sie bemerken in diesen beyden:

1) Daß ihre Linien sich nicht zu einander auf einerley Art neigen, oder einerley Winkel machen. An jenen aber bemerkt das Auge keinen Unterschied darin.

2) Der Verstand, welcher sehr geschwinde darauf verfällt, alle Größen, die ihm vorkommen, mit einander zu vergleichen, vergleicht die Seiten des zweyten und dritten Triangels mit einander, und findet darinn jedesmal etwas unterscheidendes. Die Seiten $\alpha\beta$ und $\beta\gamma$, verglichen unter sich und mit den Seiten a b und b c, sind auf eine ganz verschiedene Art in einander enthalten. Dagegen sind in den Triangeln I und II nicht nur die Winkel für das Auge gleich, sondern in der Vergleichung der Seiten AB, BC und der Seiten a b, b c findet sich, so viel das Auge wahrnehmen kann, die genaueste Uebereinstimmung. Es bleibt also nichts übrig, wodurch wir diese Figuren von einander unterscheiden können, als die Größe, die aber bey der Aehnlichkeit in keine Betrachtung kömmt, und wir nennen sie daher ähnlich.

Ich sehe dieses Exempel nach meiner Absicht für hinlänglich an, um den Satz als Wahrheit fest zu setzen: **Figuren sind einander ähnlich, wenn die Winkel in ihnen einander gleich sind, und die Seiten je zwo und zwo genommen einerley Verhältniß haben. Eben so wahr ist es, daß, wenn Figuren einander ähnlich sind, ihre Winkel gleich sind, und ihre Seiten einerley Verhältniß haben.**

Anmerkung.

Man wird vielleicht glauben, daß ich eine Sache nur in dunkle Ausdrücke einzuhüllen suche, worinn sich alle Welt hinlänglich

sich versteht, so bald nur das Wort Aehnlichkeit erwähnt wird. Allein die Anwendung der hier gegebenen Erklärungen wird mich durch den Nutzen derselben rechtfertigen, und man wird dieselben nicht mehr dunkel finden, wenn ich nur noch erinnere, daß wir gänzlich nach diesen Begriffen verfahren, so oft wir ein Bild von einer Sache entwerfen wollen. 1) Eine jede Größe schickt sich für dies Bild, denn sie ändert oder bestimmt nichts in Ansehung der Aehnlichkeit. 2) Aber wir vergleichen die Größe der Theile in dem Urbilde oder der Sache, die wir entwerfen wollen, mit einander, und das Verhältniß, welches wir hier finden, behalten wir in dem Bilde bey. Wir zeichnen, was halb so lang ist, als ein andrer damit verglichener Theil, auch halb so lang in dem Bilde, und nicht etwan eben so groß, als dieser Theil ist. Ist die Breite eines Theils in dem Urbilde ein Drittheil von dessen Höhe, so beobachten wir eben dies Verhältniß in dem Bilde. 3) Wir geben den Theilen eben dieselbe Lage, die sie in dem Urbilde haben, in dem Bilde wieder. Wir setzen nicht nur jedes an die ihm zukommende Stelle, sondern bestimmen alles noch genauer durch die Winkel, die wir in dem Urbilde entwerfen. Was aufrecht steht, zeichnen wir aufrecht, was gelehnt ist, in derselben Neigung, welche es in dem Original selbst hat.

§. 19.

Wenn wir in der Geometrie von ähnlichen Figuren reden, so reden wir von einer vollkommenern Aehnlichkeit, als mit welcher wir zufrieden sind, wenn wir im gemeinen Leben von Aehnlichkeit reden. Wir erfodern z. E. zur Aehnlichkeit der Dreyecke eine vollkommene Gleichheit der Winkel und eine vollkommene Uebereinstimmung in dem Verhältniß der Seiten des einen und des andern Dreyecks. Gesetzt also, wir könnten in den Fällen §. 15, welche Fig. 25 und 26 erklären, es dahin bringen, ein vollkommen ähnliches Bild der Triangel ABC zu entwerfen, welchen Vortheil würde uns dieses nicht geben, um das Maaß der Linie AB in dem einen und dem andern Dreyeck ABC zu erfahren? Es seyn solche Bilder die beygezeichneten kleinen Triangel abc, abc Fig. 25 und 26. Wir würden

alsdenn sagen können: wie sich a c zu a b in dem Bilde verhält, so verhält sich in dem großen Dreyeck A C zu A B. Allein das Verhältniß der beyden Linien a c und a b ist leicht entdeckt, wenn wir sie nach einem genau eingetheilten Maaßstabe vergleichen, und nun können wir A C so gleich bestimmen. Gesetzt a b Fig. 25 und 26 enthält 188 Theile von demjenigen Maaßstabe, von welchem a c 114 enthält, A C enthielte aber nach dem großen Maasse, welches man im Feldmessen gebraucht, auch 114 Theile, z. E. Fusse, so müßte A B nothwendig auch 188 Fusse enthalten.

Das Geschäfte desjenigen, welcher große Entfernungen geometrisch messen will, wird also nun ganz ein anders, als welches wir §. 15. beschrieben haben. Er wird, wo er keine gleiche Triangel abstecken kann, um das Maaß einer Linie in diesen zu erfahren, nur Bilder der großen Triangel zeichnen dürfen, in welchen die ihm unbekannten Linien liegen. Er wird dieses lieber in jedem Falle thun, wo er auch gleiche Triangel auf dem Felde abstecken könnte, weil doch die Zeichnung eines ähnlichen Triangels viel leichter ist, und geschwinder fortgeht. Allein, wie ist diese vollkommene Aehnlichkeit zu erlangen? Dieses will ich jetzo so gut, als es mir mit Uebergehung schweere Beweise möglich ist, erklären.

§. 20.

Wir haben oben §. 14. drey Fälle angezeigt, in welchen man von der Gleichheit zweener Triangel gewiß werden kann, wenn man nur von der Gleichheit dreyer Theile an denselben gewiß ist. Man hat ebenfalls drey Fälle, in welchen es erwiesen ist, daß Triangel einander vollkommen ähnlich seyn müssen, wenn man nur von gewissen Winkeln derselben gewiß ist, daß sie einander gleich sind, oder von gewissen Seiten, daß sie einerley Verhältniß haben.

Der erste Fall: Triangel sind einander ähnlich, wenn in zweeen Triangeln zween Winkel gleich sind.

Man

Man setze, wir wüßten von beyden Triangeln ABC und abc, Fig. 30 und 31, daß der Winkel A dem Winkel a, und der Winkel B dem Winkel b gleich sey, so kann man von der genauesten Aehnlichkeit der ganzen Triangel und von dem gleichen Verhältniß ihrer Linien vollkommen gewiß seyn.

Ich habe in diesen und andern Figuren die gegebenen und bekannten Linien mit einem Strich, der sie schneidet, die Winkel mit einem Bogen, alle unbekannte Theile aber mit o bemerkt.

Der zweyte Fall: **Wenn in zween Triangeln ein Winkel dem andern gleich ist, und die Seiten, welche die gleichen Winkel einschliessen, einerley Verhältniß haben.**

Wenn wir z. E. von den Triangeln ABC und abc, Fig. 32 und 33, nur dieses wissen, daß der Winkel A dem Winkel a gleich ist, und die Linie AC sich zu BC auf eben die Art wie ac zu bc verhält, so ist auch die Gleichheit der übrigen Winkel und die Proportion AC:AB = ac:ab gewiß.

Der dritte Fall: **Wenn in zween Triangeln die Seiten, welche neben einander auf einerley Art liegen, einerley Verhältniß haben.**

Wenn wir z. E. von beyden Triangeln ABC und abc alle Seiten kennen, und wissen, daß AB:AC = ab, ac, daß AB:BC = ab:bc und BC:AC = bc:ac, so sind beyde Figuren völlig einander ähnlich, und jeder Winkel dem andern gleich. (Fig. 34. 35.)

§. 21.

Wir wollen diese Sätze auf die vorhin (§. 15.) angenommenen Fälle anwenden, um zu sehen, wie viel leichter sich nun das Maaß der in denselben als unbekannt angenommenen Linien erfahren lasse, als es durch gleiche Triangel sich thun ließ. In der 25sten Figur ging die Linie AB durch einen

Berg. Eben die Theile, welche uns (§. 15.) dazu halfen, einen Triangel abzustecken, der dem Triangel ABC gleich war, nemlich der Winkel C die Linien AC und BC sind uns nun hinlänglich, um einen Triangel zu zeichnen, der ein dem Triangel ABC vollkommen ähnliches Bild sey. Gesetzt der Winkel C hätte bey einer genauen Ausmessung 100 Grade, die Linie AC sey 114 und die Linie BC 131 Ruthen lang, so dürfen wir nur einen Winkel auf dem Papiere zeichnen, der genau das Maaß von dem Winkel C habe, und seinen Schenkeln oder Seiten eben so viel von irgend einem kleinem Maaßstabe geben; so hat nunmehr der zweyte Fall statt. Die Triangel werden einander ähnlich, und wir können gewiß seyn: wie sich ac verhält zu ab, so verhalte sich auch AC zu AB. Nun erfahren wir sehr leicht, wie viel Theile von ac die Linie ab enthalte; eben so viel Theile enthält AB von AC; und da ab in dem Bilde oder ähnlichem Triangel 188 derer Theile enthält, deren ac 114 hat, so muß auch AB 188 derer Ruthen enthalten, deren AC 114 enthält.

In der 26sten Figur ging die Linie AB über einen Fluß weg. Wir können indessen zween Winkel A und C messen. Ich nehme an, daß sie 47 und 96 Grade zum Maaß haben. Wir können diese Winkel auf dem Papiere an einer Linie zeichnen, welcher wir nach einem kleinen Maaßstabe so viel Theile geben, als AC im Feldmaasse enthält. Z. E. 114 Ruthen. Nun ist der kleine Triangel dem größern völlig ähnlich, und das Verhältniß von ac zu ab ist dem von AC zu AB völlig gleich. Das erste Verhältniß erfahren wir ohne Mühe. Dadurch wird auch das andre bekannt, und weil nun ab 188 derer Theile enthält, deren ac 114 hat, so muß auch AB in dem großen Triangel 188 Ruthen enthalten.

Wir können so gar durch dergleichen ähnliche Figuren zu einer Kenntniß des Maasses solcher Entfernungen gelangen, deren Endpunkte so liegen, daß wir zu keinem derselben

selben von unserm Stande aus gelangen können. Gesetzt die beyden Oerter A und B (Fig. 36.) liegen beyde auf jener Seite eines Flusses, oder sie liegen sehr entfernt von uns und von einander, oder eine rauhe Gegend macht es uns unmöglich, die Entfernung von uns und einem derselben zu messen, so verfährt man auf folgende Art: Man wählt eine ebene Gegend, wo man durch eine unmittelbare Messung eine Linie bestimmen kann, die im Verhältniß der Linie, welche wir messen wollen, nur nicht gar zu klein ist, und von deren Endpuncten wir nach A und B sehen können. Diese Linie sey CD. Von ihrem Endpuncte C aus nimmt man das Maaß derer Winkel, welche die von C nach A und nach B gehende Gesichtslinien mit der Linie CD machen; von dem Puncte D aus nimmt man die Winkel zwischen den Linien AD, BD und eben derselben Linie CD. Nun hat man genug, um eine Figur zu zeichnen, die der Figur ABCD ähnlich sey, und in dieser Figur wird cd zu ab eben das Verhältniß haben, welches auf dem Felde CD zu AB hat. Gesetzt CD hätte 160 Ruthen, und cd hätte eben so viel Theile von einem kleinern Maasse, und nun fände sich, daß ab 240 Theile hätte, so muß auch AB eben so viel Ruthen enthalten. Daß die Figur abcd der grössern ähnlich sey, ist so schweer nicht einzusehen. Denn der Triangel acd ist dem Triangel ACD, und der Teiangel bcd dem Triangel BCD ähnlich. AD und BD verhalten sich daher in beyden Triangeln zu ad und bd auf einerley Art, denn sie verhalten sich wie CD und cd. Die Winkel zwischen beyden Linien sind auch gleich. Wir haben also den zweyten (§. 20.) erklärten Fall an den Triangeln ABD und abd, und folglich werden dieselben einander ähnlich, und AB und ab haben noch immmer das Verhältniß, welches CD und cd hatten. Das Maaß also, welches wir für ab im Kleinen finden, ist das Maaß für AB im großen.

§. 22.

Diese letzte Messung giebt noch den Vortheil, daß man von einer Linie C D aus mit wenig gemehrter Mühe die Entfernungen aller Oerter, die man in einer Gegend übersieht, messen, und eine der ganzen Gegend, die zwischen diesen Entfernungslinien begriffen ist, ähnliche Figur entwerfen kann. Gesetzt man befände sich in einer Gegend, welche unter andern die Gegenstände A. B. E. F. G. H. I. hätte. (Fig. 37.) Man würde also nur zween etwas entfernte Puncte aussuchen dürfen, von welchen aus man alle diese Gegenstände übersehen, und zwischen denen man die Entfernung bequem und zuverläßig messen könnte. Diese Linie C D heißt alsdenn die Standlinie. Von ihren Endpuncten aus mißt man die Winkel, welche die Gesichtslinien nach allen diesen Oertern hinaus mit der Standlinie machen. Nun hat man alles, was nöthig ist, um ein Bild der ganzen Gegend, (Fig. 38.) zu entwerfen, indem man eine Linie c d auf das Papier und an derselben eben dieselben Winkel aufträgt, welche man in dem Felde gefunden hatte. Man kann alsdenn von allen Linien in dieser Figur a b, b e, e f, g h, h i, i a beweisen, daß sie eben das Verhältniß zu c d haben, welches A B, B E, E F, G H, H I, I A zu C D haben, und daß also diese leztern eben das Maaß auf dem Felde haben müssen, welches diese auf dem Papiere angeben.

Dieses ist die beste und gewisseste Methode, einen Plan oder Zeichnung einer kleinern oder größern Gegend zu entwerfen, auch einer solchen, welche größer ist, als daß sie auf einmal von den erwählten Standpuncten C und D übersehen werden könnte. Denn gesezt, es läge hinter A und B eine Gegend, welche wir mit in unsere Zeichnung bringen wollten, die aber nicht in C und D gesehen werden könnte; so ist nunmehr die Entfernung von A bis B eben so zuverläßig gemessen, als es mit dem Maaßstabe in der Hand geschehen könnte, und diese Linie A B kann nun eine neue

Stand-

Standlinie abgeben, von welcher aus man die ganze Gegend auf die vorbeschriebene Art übermessen, und ihren Plan mit dem Plan der zuerst gemessenen Gegend in Verbindung bringen kann, wenn man nur dasselbe Maaß beybehält, und an die Linie a b die gefundenen Winkel anträgt. Man wird auf diese Art von einem ganzen Lande einen Plan oder Charte entwerfen können, ohne mehr als eine Linie unmittelbar nachgemessen zu haben. Doch muß diese Linie immer größer angenommen werden, je größer die Gegend ist, welche man entwerfen will. Für ein Feld, worinn die größten Entfernungen unter 1000 Ruthen betragen, würde eine Linie von 100 bis 200 Ruthen genug seyn. Für ein Land, dessen größter Durchschnitt schon einige Meilen beträgt, müßte eine solche Linie wenigstens 400 bis 500 Ruthen enthalten, und man würde sie einige Meilen lang nehmen, und mit der größten Sorgfalt mehr als einmal nachmessen müssen, wenn es darauf ankäme, eine richtige Landcharte solcher Länder und Reiche zu entwerfen, als unser Deutschland ist, wie man es in der That in Frankreich ausgeführt hat.

§. 23.

Ich muß von den Werkzeugen zu dieser Messung etwas sagen. Zu einer solchen, wie ich sie hier beschrieben habe, gebraucht man gewöhnlich nur eine gute Meßkette und einen Winkelmesser oder Astrolabium, welches um so viel zuverläßiger ist, je größer dessen Durchmesser ist, und auch um so viel genauer eingetheilt werden kann. Der Durchmesser desselben wird durch Hülfe der sogenannten Diopter in die Richtung der Standlinie gebracht, und die Lage der Gesichtslinien zu den Objecten hinaus vermittelst anderer Diopter, die auf einem beweglichen Linial um den Mittelpunct des Instruments sich bewegen, bestimmt.

Man braucht in der Aufmessung kleinerer Gegenden ein Werkzeug, welches das **Meßtischlein** genannt wird, wo die Winkel sowol als das ganze Bild der Gegend unmittelbar

auf das Papier getragen werden können. Allein der Gebrauch desselben ist wenig zuverläßig, und das Astrolabium hat wenigstens den Vorzug, daß es für große und kleine Gegenden gebraucht werden kann. Doch muß man, weil es zu weitläuftig ist, die Zeichnungen auf dem Felde zu entwerfen, wenigstens einen groben Entwurf so gleich auf der Stelle machen, auf den man die gefundenen Maassen der Winkel trägt, um daraus den Plan ins Reine ausarbeiten zu können.

Man mag nun dieses thun, oder die Zeichnung unmittelbar auf den Meßtisch tragen, so wird ein Maaßstab nöthig, der sehr viele Theile enthalte, und gegen das Feldmaaß ein sehr kleines Verhältniß habe. Ein jeder einfacher Maaßstab, welcher auf eine einzele Linie getragen wird, würde, wenn man sehr viel Theile in ihn tragen wollte, leicht zu groß werden, oder die Eintheilung für das Auge zu schweer zu unterscheiden seyn, wiewol die Theile sich sonst am leichtesten an ihm zählen lassen. Man gebraucht also einen so genannten verjüngten **Maaßstab**, dergleichen in den gewöhnlichen Mathematischen Bestecken befindlich, aber nicht für den practischen Mathematiker hinlänglich sind, der fast bey jedem Plan einen andern Maaßstab nöthig hat. Man verfertigt denselben auf folgende Art: Da der Maaßstab dreyerley Theile enthalten soll, von welchen die kleinsten in den mittleren zehn- in den größten hundertmal enthalten seyn müssen, so nimmt man den mittlern Theil nach einer ohngefähren Schätzung an, wie er sich zu dem Risse, den man zeichnen will, schicken mögte. Man trägt diesen auf eine Linie A D von A aus (Fig. 39.) zehnmal fort bis in B, und die ganze Linie A B so weit, als es der Raum verstattet, oder der Maaßstab lang werden soll. Um die kleinsten Theile zu erhalten, setzt man eine Linie an A rechtwinklicht an. Auf diese trägt man zehn Theile, von welcher Größe man will, gegen C. Durch die Theilungspuncte zieht man Parallellinien mit A D. Nachdem dieses geschehen, zieht man aus B. E. F. G. Parallellinien

nien mit A C, welche jene Parallellinien rechtwinklicht schneiden. Alsdenn wird eine Linie C 9 von C nach dem neunten mittleren Theilungspunct schräge über gezogen, und mit diesen neun andre Linien durch die übrigen Theilungspuncte parallel, wodurch der ganze Maaßstab fertig ist. Denn nun verlängern sich die Linien alle bis an die schrägen Linien um Zehntheile der mittleren Theile, und man hat Hunderttheile der Linie A B mit den Zehntheilen derselben. Der Gebrauch des Maaßstabes wird einigermassen deutlich werden, wenn man die Puncte bemerkt, welche in der Figur in der dritten und achten Linie mit Strichen durchschitten sind. Von dem untersten bis zum zweyten Punct in der dritten Linie zählt man 300, von dem zweyten bis zum dritten 3, von dem dritten bis zum vierten 70, folglich in allem 373 Theile. In der achten Linie zählt man von dem untersten bis zum zweyten Punct 200, von dem zweyten bis zum dritten 8, und von dem dritten bis zum vierten 50 Theile. Ich scheue mich, mein Buch durch genauere Beschreibung der Werkzeuge, der Kennzeichen, wornach man sie beurtheilen kann, ob sie gut und richtig verfertiget worden, und aller Handgriffe in deren Anwendung auszudehnen. Der mündliche Unterricht, practische Versuche, und die Vorzeigung wol gearbeiteter Werkzeuge muß hiebey das beste thun. Wer aber dennoch aus Büchern lieber lernen will, wird in Penthers practischer Geometrie sehr vieles finden, wo die bekanntesten Instrumente mit einer fast überflüßigen Sorgfalt beschrieben, und im Kupferstich zu sehen sind.

Ich will noch mit wenigem der so genannten Boussole erwähnen. Das Hauptstück an derselben ist ein in seine Grade, auch wol halbe Grade eingetheilter Circul, der sich im Mittelpunct nach allerley Richtung wenden läßt, da mittlerweile eine um eben denselben Mittelpunct bewegliche Magnetnadel ihre unveränderte Richtung nach einerley Weltgegend behält. Es lassen sich daraus die Winkel beurtheilen, welche der Durchmesser des Circuls, wenn er nach einer

einer Linie vermittelst der an ihm befestigten Durchsichten gerichtet, und nun nach einer andern Linie hinaus gerichtet wird, beschreibt. Dieses Werkzeug hat gewisse Vorzüge vor dem Astrolabium, theils im Gebrauch, theils in der Ausarbeitung, welche nicht so vielen Fehlern ausgesetzt ist, als die von jenem. Allein man verliert den Vortheil der genauen Eintheilung des Circuls, welche man bey jenem anbringen kann, und die Boussole ist nicht brauchbar, wenn man Höhen messen, oder von einer Höhe herab oder von unten hinaufwärts Winkel messen will.

§. 24.

In vielen Vorfällen des bürgerlichen Lebens wird es zur Nothwendigkeit gewisse Höhen zu messen. Wir können hiebey zween Fälle annehmen:

1) Man will untersuchen, wie weit ein Ort auf dem festen Lande über die eigentliche Horizontalfläche, die man in der Meeresfläche am zuverläßigsten hat, erhaben sey. Oder:

2) Man verlangt zu wissen, wie hoch ein Ort oder Gegend über die andere erhaben, oder wie viel entfernter sie von dem Mittelpunct der Erde sey.

Von dem ersten Fall werde ich hier wenig sagen können. Das beste Mittel, sich hievon einigermassen gewiß zu machen, giebt das Barometer ab. Deutsche Leser, die von dem Gebrauch desselben in Höhen-Messungen sich unterrichten wollen, finden die deutlichste und vollständigste Belehrung in Herrn Hofrath Kästners Abhandlung, die er seinen Anmerkungen über die Markscheidekunst angehängt hat.

In dem zweyten Fall giebt es zween Nebenfälle. Entweder:

a) Der Ort, dessen Höhe man wissen will, ist mit einem steilen Fuß über den Ort, von welchem ab man messen will, erhoben, und ein Punct auf demselben, den man für den erhabensten annehmen kann, von dem andern Orte aus sichtbar. Es ist z. E. ein steil aufgeführtes Gebäude, oder ein

gäher

gäher Berg oder Felsen, dessen Spitze nahe und ferne deutlich in die Augen fällt. Oder:

b) Er liegt in einer Gegend, die unmerklich sich nach einer oder mehreren Seiten erhebt oder absinkt, so daß die Gegend auf mancherley Art unterbrochen wird, und das Auge nicht einmal gewiß werden kann, welcher von beyden Orten der höhere oder der niedrigere sey. (Fig. 48.) Ich werde von beyden Fällen umständlich reden müssen.

§. 25.

In dem ersten gehet die Geometrie fast eben die Wege, um zu ihrem Zweck zu kommen, welche sie wählt, um Linien, die auf ebenen Flächen liegen, zu messen. Gesetzt man wollte die Höhe des Gebäudes A B (Fig. 40.) messen. Hier ist ein Vortheil, der sich nur selten findet, daß man bis an die Perpendicularlinie, welche man messen will, kommen kann. Ist nun auch der Boden von dem Grunde des Gebäudes ab flach und horizontal, so mißt man von einem Puncte C aus, der eine mäßige Entfernung von dem Gebäude hat, die Linie C A, so genau als nur möglich. In C mißt man den Winkel A C B durch das Astrolabium, dessen Fläche hier perpendicular gegen den Horizont gestellt werden muß, so daß man die Linie B A sich vorstellen kann, als läge sie genau in der fortgesetzten Fläche desselben. Der Winkel bey A darf nicht gemessen werden. Man kennt ihn schon, daß er recht sey, und nun kennt man in dem Triangel A B C zween Winkel. Dieses ist genug, um einen Triangel a b c zu zeichnen, welcher jenem großen Triangel ähnlich ist, in welchem man aber der Seite a c eben die Zahl von Theilen nach dem verjüngten Maaßstabe giebt, welche A C im Feldmaasse hat. Das Verhältniß, welches nun a b zu a c hat, und welches ich erfahre, wenn ich auf dem Papier diese Linie nachmesse, hat auch A B zu A C. Wenn also a c 94, und A C 94 Theile, jede von ihrem Maaßstabe enthalten, und man findet für a b 61 Theile, so

hat

hat A B eben so viel Fusse im großen Maaß, wenn man A C in Fussen ausgemessen hat.

Die Umstände aber sind sehr verändert, wenn ich nicht zu dem Fuß des Gebäudes kommen kann, oder wenn A B (Fig. 41.) die Höhe eines Berges und ganz in demselben versteckt ist. Man mißt in diesem Fall eine horizontale Linie C D von einer beliebigen Länge, die aber gegen die ganze Höhe beträchtlich groß seyn muß, und von deren Endpuncten man nach der Spitze B der Höhe sehen kann. In dem Triangel D C B können die Winkel B D C und B C D gemessen werden, wobey aber große Behutsamkeit angewandt werden muß, damit das Astrolabium genau in einer Fläche liege, wenn es in dem Punct D, und nachher in dem Punct C gestellt wird. Alsdenn ist genug, einen Triangel b c d (Fig. 42.) zu zeichnen, welcher jenem großen Triangel ähnlich sey, und in welchem man das Maaß der Linie c b, und folglich auch das von C B erfährt, wenn man an eine Linie c d, welche so viel Theile des verjüngten Maaßstabes als C D im Feldmaaße hat, die gemessenen Winkel trägt. Nun verlängert man die Linie c d, und zieht auf sie aus b die Linie b a perpendicular. Hiedurch entsteht ein neuer Triangel a b c, von welchem man beweisen kann, daß er dem Triangel A B C ähnlich sey. Denn die Winkel bey C und bey c sind einander gleich, zufolge der Geometrischen Wahrheit, daß die Nebenwinkel gleicher Winkel einander gleich sind; und die Winkel bey A und a sind recht. Wir können also sagen: wie sich a b zu b c verhält, so verhält sich auch A B zu B C. Wir wissen aber schon das in der Zahl gleiche Maaß von b c und B C nach ihren verschiedenen Maaßstäben. Folglich ist auch das Maaß von a b auf dem verjüngten Maaßstabe gleich dem Maasse von A B nach dem Feldmaasse. Gesetzt a b enthielte 151 Theile von jenem, so hat auch A B 151 Theile von diesem Maasse.

In diesen beyden Fällen ist der kleine Theil von der ganzen Höhe nicht mit gemessen, welcher der Höhe von der

Erde bis zum Mittelpunct des Winkelmessers gleich ist. Man muß also diese noch hinzu thun, um die ganze Höhe zu haben.

Allein man findet selten nahe an dem Fuß der Höhen, die man messen will, einen Boden, der eben genug wäre, um auf die vorhin erklärte Art zu verfahren. Gewöhnlich wird derselbe sich gegen den Fuß der Höhe hinab- oder von demselben wegsenken, und man ist genöthigt, an dem schrägen Fuß des Berges die Messung vorzunehmen. Die Geometrie hilft uns indessen auf folgende Art zum Zweck: Man mißt, wie vorhin, an dem abhängenden Grunde eine Linie C D, (Fig. 43.) und an derselben die Winkel A C D und A D C. Man kann hiedurch auf vorhin erklärte Art so wol die Linie A D als A C erfahren. Nun stellt man den Durchmesser des Winkelmessers in D ganz horizontal, und mißt zugleich den Winkel A D B. Alsdenn hat man genug, um einen Triangel a b d (Fig. 44.) zu zeichnen, der dem Triangel A B D ähnlich ist, indem er zween gleiche Winkel von diesem hat. Ist die Linie C D gegen den Berg abhängend, (Fig. 45.) so nimmt man den Winkel A D B, und zeichnet einen Triangel a b d, der dem Triangel A B D ähnlich sey. In beyden giebt a b das Maaß der Höhe A B an.

Man hat freylich Ursache in den letztern Fällen die Kunstgriffe zu bewundern, durch welche man zur Wissenschaft von der Länge einer Linie kömmt, von welcher das Auge nicht einmal den Endpunct sieht, und welche ganz in dem Berge versteckt ist. Indessen ist die Ausführung sehr großen Schwierigkeiten unterworfen. Es gehört ungemein viel dazu, den Durchmesser des Instruments ganz horizontal, und es selbst in eine Fläche an den beyden verschiedenen Orten D und C zu stellen. Dieß ist nicht ein Mangel der Wissenschaft selbst, von welcher man es nicht erwarten kann, daß sie die Fehler aufhebe, welche die Hand und das Auge begehen, wenn es zur Ausübung ihrer Regeln

kömmt. Indessen kann man die Schwierigkeiten selbst so wenig heben, daß die Messungen der Höhen sehr unzuverläßig bleiben, und man erfährt dieselben überhaupt mit geringerer Mühe und sicherer durch das Barometer.

§. 26.

Der Fall, da eine unmerklich abhängende Höhe zu messen ist, kömmt in den Geschäften des bürgerlichen Lebens weit öfter vor, als jener, den gewöhnlich nur unsre Wißbegierde für uns wichtig macht. Ein Bach oder Fluß läuft unstreitig dahin, wo der Erdboden abhängt. Er treibt durch seinen Strom eine Mühle in A und in B. (Fig. 47.) Er würde eine zweyte in C treiben können, wenn man wüßte, daß durch die dazu nöthige Stemmung des Wassers in C nicht etwan das Wasser zu hoch gegen die Mühle in A gehoben werden, oder der für die Mühle in B nöthige Strom in C zu sehr geschwächt werden würde. Oder ein Bach verfließt ganz ungenutzt in einen größern Strom. Man würde eine Mühle anlegen, wenn der Fall des Erdbodens, über den er fließt, hoch genug dazu wäre. Um sich hievon zu versichern, muß der Abhang desselben gemessen werden. Allein die bisher erklärten Methoden würden hier gar zu sehr trügen. Die leichteste Art, dieses zu erfahren, wenn die Weite nicht sehr groß ist, ist folgende: Man nimmt eine Schrotwage, (A B Fig. 48.) deren horizontales Lineal zwölf bis sechszehn Fuß lang ist. Man bringt sie auf Stäben, die in die Erde eingeschlagen werden, in die horizontale Lage. Man merkt an diesen Stäben an, wie viel man die Schrotwage jedesmal niedriger oder höher angelegt habe, und hieraus läßt sich der Fall des Bodens leicht beurtheilen. Allein, weil bey großen Entfernungen diese Mühe gar zu groß, und zu oft wiederholt werden würde, so wendet man lieber andre Werkzeuge an, deren wesentliches darinn besteht: Ein Lineal (A B Fig. 49.) mit dergleichen Durchsichten, als an dem Winkelmesser

gewöhnlich

gewöhnlich angebracht werden, oder ein Fernrohr von 18 bis 24 Zoll Länge, dessen Axe durch ein mit demselben fest zusammenhängendes Gewicht in horizontaler Stellung erhalten wird, hängt frey an einem gewissen dazu eingerichteten Gestelle. Die Probe, ob es genau horizontal hänge, ist, wenn man durch die Durchsichten ebendasselbe Object erblickt, sowol, wenn man von B nach A hindurch sieht, als auch wenn man es umkehrt und die Durchsicht bey A an das Auge bringt. Im Gebrauche desselben muß eine weisse Tafel, die sich an einer Stange auf und nieder verschieben läßt, auf eine gewisse Gegend getragen, und so lange an der Stange verschoben werden, bis das Auge den Mittelpunct derselben genau in der Mitte der Durchsicht oder des Fernrohrs gewahr wird. Von diesem Mittel herunter mißt man bis auf den Boden. Gesetzt nun; es fänden sich in C von unten bis in die Mitte der Tafel 7 Fuß, die Durchsicht in A aber wäre nur 5 Fuß von der Erde erhaben, so wäre der Boden in C 2 Fuß niedriger, als in A. Wenn aber dagegen in D nur 2 Fuß bis an die Mitte der Tafel gemessen würden, so wäre der Boden in D 3 Fuß höher als in A. Man wird auf eben die Art von C und D aus in andre Gegenden fortmessen, und also für ziemlich lange Weiten den Abhang oder die Erhöhung des Bodens ohne weitere Mühe messen können, als welche das Gehen von einem Ort zum andern, und das Forttragen der Werkzeuge verursacht. Wenn die Weiten sehr groß sind, so mischen sich einige Schwierigkeiten, theils wegen der Krümmung der Erde, theils wegen der Brechung des Lichts, ein, welche die Mathematiker durch Versuche und Berechnungen zu heben angewiesen haben, deren Erläuterung mich zu weit führen würde. Ich merke nur an, daß eine solche Ausmessung unmerklicher Höhen das sey, was man mit einem französischen Ausdruck Nivelliren nennt.

§. 27.

Die vorhin erklärten Messungen durch ähnliche Figuren bleiben indessen sehr großen Schwierigkeiten unterworfen. Was für Fehler in der Messung der Linien begangen werden können, habe ich oben §. 10. erinnert. Die Messung der Winkel ist leichter. Allein es ist überaus schweer, die Werkzeuge zu deren Messung so richtig auszuarbeiten, daß man von dem Maaß derselben auf das genaueste gewiß seyn könnte. Noch weniger sind die Fehler in der Zeichnung der Figuren zu vermeiden, und wir können in den vorhin erklärten Messungen nur unter der Voraussetzung annehmen, wir kennen das Maaß der Linien, welches wir zu wissen wünschen, daß wir glauben, der Figur vollkommen die mathematische Aehnlichkeit mit der großen Figur auf dem Felde gegeben zu haben, welche sie zufolge §. 19. bekömmt, wenn wir die Winkel genau so groß machen, als sie in jener sind, und der Maaßstab, von welchem wir die Linien abtragen, vollkommen richtig ist. Allein ein kleiner Fehler in Zeichnung der Winkel, der durch die Unrichtigkeit des Transporteurs, oder in der Anlage desselben entsteht, verändert die Länge der Seiten gewiß um einen oder mehrere kleine Theile des verjüngten Maaßstabes, und eben so viel fehlt alsdann an dem Maaß der Linie im Großen.

Indessen bleibt es doch gewiß, daß in einem Triangel, wo drey Theile in einer gewissen Lage, zufolge §. 14, bestimmt sind, alles übrige nur auf eine Art ausfallen könne. Jenen Fehlern in der Ausmessung der Linien und Winkel ist nicht anders, als durch die genaueste Sorgfalt und Richtigkeit der Instrumente abzuhelfen. Die Fehler in der Zeichnung fallen weg, wenn man, anstatt die Triangel zu zeichnen, ihre Theile trigonometrisch berechnet. Denn, wiewol man auch in den Berechnungen irren kann, so hat man doch noch immer die Zahlen vor Augen, und kann die Fehler in ihnen aufsuchen, oder Proben davon anstellen, welche uns gewiß machen, ob wir gefehlt haben, oder nicht.

Allein

Allein von der Zeichnung eine Probe zu machen, ist nicht möglich, ohne sie mit der Figur, von welcher man sie entworfen hat, durch wiederholte Nachmessung aller ihrer Theile zu vergleichen. Aber eben dies ist die Ursache, warum man Triangel in ähnliche Figuren bringt, weil sich an den großen Triangeln nicht alles durch unmittelbare Messung schätzen und bestimmen läßt.

Da ich die Trigonometrie nicht weiter erläutern werde, als in so ferne sie zur Berichtigung der Maassen großer Weiten dienen kann, so will ich hier nur diejenigen Aufgaben aus derselben mit beybringen, welche uns in den vorher erklärten Fällen zu einer größeren Gewißheit von denen Maassen, die wir suchen, verhelfen können.

§. 28.

Ich werde aber vorher einige Kunstwörter erklären müssen, die der Trigonometrie eigen sind, und welche die Geometrie nicht nützt.

Man beschreibe aus der Spitze eines Winkels A C B, welcher entweder zu einem Triangel gehören, oder besonders gezeichnet seyn mag, einen Circul oder Bogen mit beliebigem Radius. (Fig. 50.) Der Bogen E D ist zwar das Maaß des Winkels A C B, (s. oben §. 12.) Aber nun ziehe man auch aus E die Linie E F perpendicular auf den Radius C D. Diese Linie E F heißt der Sinus des Bogens E D. Man sieht leicht ein, daß für diesen Winkel in diesem Circul diese Linie von einer genau bestimmten Länge sey; eben also ist die den Circul berührende und rechtwinklicht in D aufstehende Linie G D zwischen den Schenkeln des Winkels A C B genau bestimmt. Diese Linie ist der **Tangent** des Winkels A C B. Mat hat Mittel gefunden, die Längen dieser Linien für jede Winkel, so wie ihr Maaß von Minute zu Minute sich verändert, in so kleinen Theilen zu berechnen, deren viele Millionen in dem Radius des Circuls enthalten sind, und man hat diese Zahlen in gewisse Tabellen

gebracht, welche man die Sinustafeln nennt. Man hat ferner durch die Geometrie bewiesen, daß in allen Triangeln sich die Sinus der Winkel, wie die Seiten verhalten, welche diesen Winkeln entgegen stehn.

Anmerkung.

In den Sinustafeln sind die Sinus und Tangenten der Winkel nicht weiter als für 90 Grade berechnet. Denn wir können aus dem Punct E nicht mehr als eine Linie E D perpendicular auf den Radius ziehen. Der stumpfe Winkel A C H, der Nebenwinkel des spitzen Winkels A C B, hat also keinen andern Sinus, als eben diese Linie E D. Es ist eben so mit den Tangenten bewandt, und daher giebt allemal die Linie, welche der Sinus oder Tangente eines spitzen Winkels ist, auch den Sinus oder Tangenten des stumpfen Nebenwinkels ab. Wenn man also den Sinus oder den Tangenten eines Winkels, z. E. von 110 Grad haben will, so sucht man nur in den Tabellen bey 70 Grad auf.

§. 29.

Wir können hievon so gleich die Anwendung auf den §. 15 und 21. durch geometrische Zeichnungen (Fig. 26.) aufgelöseten Fall machen. Wir kennen in dem Triangel A B C die Winkel A und C, folglich auch den dritten Winkel B, wenn wir 47 und 96 Grad addiren, und ihre Summe von 180 Grad abziehn. Er hat 37 Grade zum Maaße. Zufolge des zu Ende des vorigen §. erwähnten Satzes verhält sich der Sinus des Winkels B zu der Seite A C, wie der Sinus des Winkels C zu der Seite A B. In dieser Proportion sind die drey ersten Glieder insgesammt bekannt. Das vierte, oder die Seite A B, würde also durch die Proportionsregul ebenfalls bekannt werden. Die Tabellen geben für den Sinus des Winkels B bey 37° die Zahl 6156615, und für den Sinus des Winkels C bey 96° oder vielmehr 84° die Zahl 9945218. Der Rechnungssatz würde folgender seyn:

Sin. ang. B : A C = Sin. ang. C : A B
6018150 — 114 — 9945219

Allein

Allein diese großen Zahlen sind schweer zu berechnen, und man kann gar leicht dabey irren. Es würde also ein großer Vortheil seyn, wenn man die Logarithmen hier brauchen könnte. Aber hiefür ist hinlänglich gesorgt. Neper wurde eben durch die Schwierigkeit der trigonometrischen Rechnungen veranlaßt, auf die Erfindung der Logarithmen zu denken, um dieselben zu erleichtern, und die von ihm ursprünglich herrührende Tabellen haben daher, neben den eigentlichen Zahlen der Sinus und Tangenten, die zu denselben gehörigen Logarithmen, mit welchen wir die Rechnung leichter also anstellen:

Log. von dem Sinus des Winkels C = 99976143
Log. der Seite A C = 20569049

Summe 120545192
Log. von dem Sinus des Winkels B = 97794630

Log. der Seite A B = 22750562

Man findet bey diesem Logarithmen die Zahl 188, welche also das Maaß dieser Linie in Ruthen ist. Wir werden noch einige Schuhe finden, wenn wir eben denselben Logarithmen mit der Characteristik 3 aufsuchen, da derselbe mit dem Logarithmen der Zahl 1884 am genauesten übereinkömmt. Wir würden noch 9 Zolle dazu finden, wenn wir denselben unter der Characteristik 4, in den größern Tabellen suchten, oder dieses sogleich gethan hätten. Eine Genauigkeit, die bey der fleißigsten Zeichnung nicht erhalten werden kann.

§. 30.

Der im 15ten und 21sten §. beschriebene erste Fall ist weit schweerer. In demselben (man s. Fig. 25.) sind der Winkel C und die Seiten A C und B C bekannt. Man kann aber keine Proportion so einrichten, daß in derselben drey Theile bekannt, und der vierte unbekannt wäre.

z. E. es ist wahr, daß sich der Sinus des Winkels B zu der Seite A C verhält, wie der Sinus des Winkels C zu A B. Allein diese Proportion entdeckt uns nichts, weil der Sinus des Winkels B, so wie der Winkel selbst, unbekannt ist. Indessen weiß man, wie viel die Summe der beyden Winkel A und B betrage. Man würde einen jeden derselben wissen können, wenn man auch ihre Differenz wüßte. Denn es ist eine arithmetische Wahrheit, daß wenn zu der halben Summe von zwo unbekannten Größen die halbe Differenz hinzu gethan wird, die größere, wenn aber diese von jener abgezogen wird, die kleinere herauskomme. Nun wird aus geometrischen Gründen erwiesen, daß sich hier die Summe der beyden bekannten Seiten A B und A C, zu deren Differenz, so wie der Tangent von der halben Summe der Winkel A und B zu dem Tangenten ihrer halben Differenz verhalte. Dieß giebt ein Mittel an, wie wir die Winkel A oder B finden, und folgends die ganze Aufgabe auflösen können. Wir ziehen zuförderst 100°, das Maaß des Winkels C, von 180 ab. Es bleiben 80 Grad, die Summe der Winkel A und B. Deren halbe Summe beträgt also 40°. Nun wenden wir folgende Proportion an:

$$BC + AC : BC - AC = \text{Tang.}\ \tfrac{1}{2} A + B : \text{Tang.}\ \tfrac{1}{2} A - B.$$

$$245 - 17 - \text{Tang.}\ 40^\circ \text{ oder } 8390996.$$

Wenn man diese Rechnung logarithmisch ausführt, so steht sie auf folgende Art:

log. des Tang. von 40° = 99238135
log. der Zahl 17 = 12304489

Summe = 111542624
log. der Zahl 245 = 23891661

log. des Tang. von 3° 20′ = 87650963

Die

Die halbe Differenz ist also 3°20′. Der Winkel A, als der größre, weil er der größern Seite entgegen steht, hat demnach 43°20′, und B, als der kleinere, 36°40′ zum Maasse. Nun können wir A B durch zwo verschiedene Proportionen bestimmen:

Sin. ang. B : A C = Sin. ang. C : A B

oder Sin. ang. A : B C = Sin. ang. C : A B

In beyden sind nunmehr die drey ersten Größen bekannt. Wir wollen die erste logarithmisch berechnen:

Log. von dem Sinus des Winkels C =	99933515
Log. der Seite A C =	20569049
Summe =	120502564
Log. von dem Sinus des Winkels B =	97760897
Log. der Seite AB =	22741667

Man trift bey diesem Logarithmen in den Tabellen ebenfalls die Zahl 188 an. Wenn man ihn aber unter der Characteristik 4 aufsucht, so findet man noch die Zahlen 11 dahinter, das ist: 1 Schuh 1 Zoll, wenn 188 Ruthen sind. Man erkennt eben hiebey die größere Genauigkeit der trigonometrischen Rechnung. Unsere ähnlichen Zeichnungen geben uns zwar, wenn wir sie sehr sorgfältig machen, für beyde Fälle einerley Zahl von Ruthen mit derjenigen, welche die Rechnung giebt. Dieß ist alles, was man von der genauesten Zeichnung erwarten kann, wenn sie nicht nach einem sehr grossen Maaßstabe gemacht sind. Diese aber giebt uns in dem ersten Fall noch 4 Schuh 9 Linien, in dem zweyten 1 Schuh 1 Linie darüber, und folglich zwischen beyden einen Unterschied von 3 Schuh 8 Linien an, wovon uns die Zeichnungen nichts entdecken können.

§. 31.

Ich gestehe es, daß ich diese Rechnung für zu schweer halte, als daß sie aus einem einigen Exempel könne hinlänglich

lich verstanden werden. Sie ist aber von einem um so viel größern Nutzen, weil sie in allen denen Fällen wieder vorkömmt, welche mit demjenigen übereinkommen, welchen Fig. 36. vorstellt, da man nämlich Weiten zu messen hat, zu deren beyden Endpuncten man gar nicht kommen kann, oder auch nicht gehen will, welche man dennoch von einer angenommenen Standlinie aus mißt. Ich will hievon ein Exempel an der Entfernung unsers Nicolai Thurms und des Altonaischen Kirchthurms nehmen, welches für Leser aus dieser Gegend einigen Reiz haben wird, da es sich auf die Entfernung zweener ihnen sehr wol bekannter Oerter bezieht, welche unmittelbar zu messen ganz unmöglich seyn würde, und sie dabey einsehen können, wie man durch trigonometrische Berechnung in seinem Zimmer, und ohne eins von beyden Objecten unter Augen zu haben große Entfernungen berechnen könne, wenn man die Gründe zu dieser Rechnung einmal durch wirkliche Messung aufgenommen hat.

B C (Fig. 51.) die Standlinie, 265 Ruthen von zehn Hamburger Fuß lang, erstreckt sich längst dem verdeckten Wege der Sternschanze bis zum Wall. A ist die ohngefähre Lage des Altonaer, N des Nicolai Thurms. Der Winkel A B C hat 92°56′, der Winkel N B C 18°56′ zum Maaße. An dem Punct C ist der Winkel ACB 68°22′, und der Winkel N C B 150°32′ groß. Man kann hieraus in dem Triangel A B C den spitzen Winkel bey A und in dem Triangel B N C den Winkel bey N bestimmen. Jener hat 18°42′, dieser 10°32′. Dieß ist alles, was man bey der Berechnung voraus setzen darf. Man wähle nun zuförderst, ob man den Triangel A N B, oder den Triangel A N C berechnen wolle. In beyden ist A N eine Seite. Allein wir kennen von beyden nur einen Winkel, in jenem A B N = 74°, in diesem A C N = 82°10′. Die Seiten, welche den einen oder den andern Winkel einschliessen, sind nicht unmittelbar bekannt. Sie werden es

aber,

aber, wenn wir sie als Seiten der Triangel ABC und NBC berechnen. Dieß geschicht auf folgende Art:

Sin. ang. B A C : B C = Sin. ang. A C B : A B.

log. des Sinus des Winkels A C B = 99682784
log. der Seite B C = 24232459

Summe = 123915243
log. des Sinus des Winkels B A C = 95059811

log. der Seite A B = 28855432

Welcher Logarithme in den Tabellen 768 Ruthen 3 Schuh 2 Zoll giebt.

Sin. ang. B N C : B C = Sin. ang. B C N : B N.

log. des Sinus des Winkels B C N = 96918919
log. der Seite B C = 24232459

Summe = 121151378
log. des Sinus des Winkels B N C = 92619941

log. der Seite B N = 28531437

Man findet in den Tabellen bey diesem Logarithmen 713 Ruthen und 9 Zoll.

Wir kennen nunmehr in dem Triangel A B N, den ich zu mehrerer Deutlichkeit, Fig. 52. besonders darstelle, einen Winkel A B N und die Seiten A B und N B, die ihn einschliessen. Wir müssen daher, um in ihm die Linie A N zu berechnen, eben so verfahren, wie in dem zweyten Falle, und da wir die Summe der Winkel A und N wissen, ihre halbe Differenz, wie vorhin, auf folgende Art berechnen:

AB + BN : AB — BN = Tang. $\frac{1}{2}$ N + A : Tang. $\frac{1}{2}$ N — A.
1481°4'1" — 55°2'3" — 53°

log. des Tang. von 53° = 101228856
log. der Zahl 5523 = 37421750

Summe = 138650606
log. der Zahl 148141 = 51706752

log. des Tang. ½ N — A = 86943854

Dieser Logarithme giebt in der Tabelle der Tangenten 2°49′57″. Der größere Winkel bey N, welcher der größern Seite entgegen steht, hat demnach 55°49′57″, der kleinere bey A 50°10′3″. Nun kann ich zuletzt aus folgender Proportion rechnen:

Sin. ang. N : A B = Sin. ang. B : A N.

log. des Sinus des Winkels B = 99828416
log. der Seite A B = 28855432

Summe = 128683848
log. des Sinus des Winkels N = 99177151

log. der Distanz A N = 29506697

Wir finden bey diesem Logarithmen in den Tabellen 892 Ruthen 6 Schuh 2 Zoll für die berechnete Weite beyder Thürme.

Anmerkung.

Ich habe in der 52sten Figur zur Uebung für die Wissensbegierigen die Data zur Berechnung der Entfernung des Wandesbecker und Eppendorfer Thurms angegeben. B C ist eben dieselbe Standlinie von 2650 Schuhen, und die Maassen der Winkel sind an Bogen, die von einem Schenkel zum andern gehen, bemerkt. Die vier Proportionen, welche trigonometrisch berechnet werden müssen, sind folgende:

1) Für den Triangel W B C.
Sin. ang. B W C : B C = Sin. ang. W B C : C W.

2) Für den Triangel E B C.
Sin. ang. B E C : B C = Sin. ang. E B C : E C.

Wenn

Wenn man nun die Summe der Linien C W und E C, ihre Differenz, und die halbe Summe der Winkel E W C und W E C weiß, so berechnet man:

3) Für den Triangel E W C.

$$W C + E C : W C - E C = \text{Tang.}\ \tfrac{1}{2}\ W E C + E W C : \text{Tang.}\ \tfrac{1}{2}\ W E C - E W C.$$

Aus dieser halben Differenz beyder Winkel und ihrer halben Summe sucht man den einen oder den andern dieser Winkel, und rechnet:

4) Für eben diesen Triangel E W C.

$$\text{Sin. ang. } W E C : W C = \text{Sin. ang. } W C E : E W.$$

§. 32.

Die Ausmessung krummer Linien gehört für die höhere Mathematik. Ihrer sind unendlich viele Arten. Man hat daher ungemein viele Reguln zu der Schätzung ihrer Länge, und zur Erkenntniß ihrer vornehmsten Eigenschaften erdacht, und seit etwa hundert Jahren die Algebra mit ausnehmend gutem Erfolge auf sie angewandt. Die Hauptabsicht bey ihnen ist, sie mit einer geraden Linie zu vergleichen, und auf diese Art ihr Maaß in dem Maaße der geraden Linie zu finden. Dieses nennt man, eine krumme Linie rectificiren. Allein diese Dinge sind von meinem Zweck zu sehr entfernt. Nur muß ich etwas von dem Circul und der Rectification desselben sagen, als einer Sache, die für viele Fälle des gemeinen Lebens sehr wichtig ist.

Ich habe oben §. 13. erinnert, daß man um ein jedes Vieleck einen Circul beschreiben könne. Man beschreibt ihn um ein Sechseck am leichtesten, indem man nur die Seite desselben A B zum Radius annehmen, und damit aus dem Mittelpunct C einen Circul beschreiben darf. Der Umriß des Circuls und des Vielecks sind indessen sehr von einander unterschieden. Beyde kommen einander näher, wenn man aus dem Sechseck ein Zwölfeck macht, indem man einen Punct D in der Mitte zwischen A und B sucht, und von diesem aus den Radius an dem Circul herum trägt. (S. Fig. *. Tab. VIII.) Man kann auf eben diese Art ein reguläres

reguläres Polygon von 24 Seiten u. s. f. in dem Circul zeichnen, und dessen Seiten berechnen. Archimedes, der so bekannte Mathematiker des Alterthums, berechnete die Seiten eines Sechsundneunzig-Ecks, das er in dem Circul, und eines andern, das er um den Circul beschrieb. Er fand daraus, daß der Umriß des Circuls etwas mehr als $3\frac{1}{7}$mal größer, als der Durchmesser desselben wäre, oder wenn der Durchmesser 7 Theile enthält, der Umriß etwas mehr als 22 derselben enthalte. Dieses Verhältniß ist schon für viele Vorfälle im gemeinen Leben hinlänglich. Wenn z. E. ein Faßbinder ein Band um eine Tonne schlagen will, so mißt er den Durchmesser desselben dreymal über, und giebt etwas zu. Wenn man um einen Hut eine vergüldete Borte setzen will, so nimmt man den Durchmesser desselben dreymal und etwas darüber. Man hat aber nachher mit etwas veränderten Methoden den Umriß solcher Vielecke berechnet, die weit mehr Seiten haben, und andere weit genauere Verhältnisse gefunden. In kleinen Zahlen ist dasjenige das genaueste, welches von einem Holländer, Petrus Metius, in den Zahlen 113 : 355 gegeben ist. Hat z. E. der Diameter des Circuls 113 Füsse, so enthält der Umriß desselben 355 und etwa $\frac{1}{1000}$ eines Fusses darüber. Eine Kleinigkeit, welche man im gemeinen Leben nicht achtet. Man ist indessen nicht dabey bestehen blieben. Wir haben von einem Leidenschen Professor, Ludolf von Cölln, ein Verhältniß, das in diesen Zahlen ausgedruckt: 100000, 000000, 000000, 000000, 000000, 000000 : 314159, 265358, 979323, 846264, 338327, 950288, aber dennoch nicht genau ist. Man nimmt von diesem Verhältnisse gewöhnlich nur die Zahlen 100 : 314, oder weil hieran ohngefähr $\frac{1}{6}$ fehlt, 100 : $314\frac{1}{6}$. Endlich hat ein Franzose, de Lagny, ein Verhältniß in 127 Ziefern angegeben, wo der Theile zwar so viel werden, daß sie in einer Linie, die von der Sonne bis zur Erde reicht, noch nicht sichtbar seyn würden. Allein dennoch ist dieses Verhältniß

nicht

nicht genau, und es fehlt noch immer etwas an der wahren Länge des Umrisses. Kurz es ist keine Hoffnung, daß man die wahre Länge des Umkreises von dem Circul in Theilen des Durchmessers jemals ganz scharf werde ausdrucken können. Man hat aber es schon zu einer Genauigkeit gebracht, welche mehr als hinlänglich für alle Vorfälle des Lebens ist, und man wird, wenn z. E. die Frage wäre, wie groß der Umriß des Circuls sey, dessen Durchmesser 45 Fuß ist, dieselbe mit großer Genauigkeit auflösen, wenn man auf folgende Art nach der Regul de Tri rechnet:

100 — 314 — 45 [141,3

etwas genauer, aber zu groß 7 : 22 — 45 [141,43

noch genauer 100 — $314\frac{1}{6}$ — 45 [141,375

am genauesten aber und nur mit dem Fehler von etwa $\frac{1}{2000}$ eines Fusses, wenn man rechnet:

113 — 355 — 45 [141,372

Man kann aus eben diesen Verhältnissen die Länge eines jeden Bogens von dem Circul berechnen, wenn man die Zahl seiner Grade weiß. Zum Exempel: man wollte in dem Circul, dessen Durchmesser 45 Fuß enthält, die Länge eines Bogens wissen, welcher 55 Grade enthält, so würde man ihn auf folgende Weise finden. Alle 360 Grade des ganzen Circuls enthalten 141,372 eines Fusses, der Bogen wird also in dem Verhältniß 360 : 55 kleiner seyn. Der Rechnungssatz ist demnach folgender:

360 — 55 — 141,372 [21,599.

Eben die angegebenen Verhältnisse dienen, den Durchmesser eines Circuls zu finden, wenn man den Umriß vorher bestimmt hat, und ihn von einer gewissen Größe haben will. Man will z. E. einen Circul haben, dessen Umriß genau 100 Fuß enthalte, und folglich den Radius dazu wissen, so kehrt man nur das Verhältniß um, und rechnet auf folgende Art:

314 — 100 — 100 [31,847.

Oder nach des Pet. Metius Verhältnisse:

355 — 113 — 100 [31,831.

An-

Anmerkung.

Auf dieses Verhältniß des Durchmessers zu dem Umkreise des Circuls kömmt in der sogenannten Quadratur des Circuls alles an; einer Untersuchung, die den Mathematikverständigen aller Zeiten so viel zu schaffen gemacht hat, und wovon wir unten die Absichten und den Nutzen zeigen wollen, wenn wir von der Ausmessung der Circulfläche reden werden. Es ist indessen alles in dieser Sache gethan, was man nur verlangen oder erwarten kann, und, wie man gestehen muß, daß noch immer etwas an der genauen Bestimmung des Umkreises fehlt, so läßt es sich auch nicht hoffen, daß man ganz genau es jemals werde bestimmen, und folglich auch nicht, daß man den Circul jemals genau werde quadriren können, wiewol man beydes den Umriß des Circuls, und die Fläche desselben so scharf berechnen kann, daß das fehlende keinem menschlichen Auge mehr sichtbar bleibt.

Dritter Abschnitt.

Von der Messung der Flächen.

§. 33.

Man hat eben so häufige Veranlassungen, die Ausdehnung einer Fläche zu untersuchen, als man bey den Linien hat, ihre Länge zu messen; und wir messen bloß deßwegen in manchem Falle die Linien, weil wir die Größe der Fläche, welche von diesen Linien eingeschlossen ist, daraus beurtheilen können. Dem Besitzer eines Stückes Land ist wenig daran gelegen, zu wissen, wie lang oder wie breit sein Acker sey, wenn er nicht eben dadurch die Fläche desselben erfahren, und beurtheilen könnte, wie viel sich auf demselben säen lasse, und wie viel er ihm eintragen könne.

Eine Fläche aber kann nicht anders, als durch eine Fläche gemessen werden, und überhaupt muß die Größe, welche das Maaß einer andern abgeben soll, mit dieser von einer Art seyn, und einen Theil derselben vorstellen, von welchem

man

man wissen will, wie oft er in dieser Grösse enthalten sey. Es gehört ferner zu einem Maasse, daß man von demselben eine deutliche und bestimmte Vorstellung habe, und daß man sich dasselbe deutlich, als in der gemessenen Grösse enthalten, vorstellen könne. Man hat also zum Maaß der Fläche diejenige Fläche gewählt, deren Vorstellung die einfachste unter allen Flächen ist. Diese ist das Quadrat. Alle andre §. 13. beschriebene Flächen werden theils durch ihre Seiten, theils durch ihre Winkel bald so, bald anders, bestimmt. Das Quadrat aber wird bloß durch eine Seite bestimmt, und wenn ich diese kenne, so kenne ich das ganze Quadrat. Es füllt auch den Raum derer Flächen, die ich ausmessen will, am genauesten aus, da alle andre Flächen gar leicht einen Raum zwischen sich lassen würden, wenn man sie in eine Figur neben einander stellen wollte.

§. 34.

Wie man nun zu dem Maaß der Längen gewisse bestimmte Linien unter dem Namen der Ruthen, Fusse, Zolle, Linien eingeführt hat, so hat man auch zum Maasse der Flächen Quadratruthen, Quadratfusse, u. s. f. beliebt, das ist, solche Quadraten, deren Seite eine Ruthe, ein Fuß rc. ist. Hiebey aber ist nothwendig eine andre Eintheilung der grössern Maassen in kleinere entstanden, als welche bey den Längen Statt hat. Die Ruthe enthält in der gewöhnlichen geometrischen Eintheilung zehn Fusse. Die Quadratruthe aber enthält den Raum von zehn mal zehn Quadratfussen, dieser Quadratfuß hundert Quadratzolle, und der Quadratzoll hundert Quadratlinien, wie Fig. 54. ausweiset, wo A B eine Ruthe, A D einen Fuß vorstellen mag. An A B haben zehn Quadratfusse Raum, an A C aber kann diese Reihe von Quadratfussen zehnmal wiederholt werden, ehe sie den ganzen Raum ausfüllt. Es ist eben so bewandt, wenn A B einen Schuh, und A D einen Zoll, oder A B einen Zoll, und A D eine Linie vorstellt. Ist aber vom zwölftheiligen

Maasse die Rede, so enthält die Quadratruthe zwölf mal zwölf, oder hundert vier und vierzig Quadratfusse, dieser eben so viel Quadratzolle, und der Quadratzoll eben so viel Quadratlinien.

Bey dem Ausmessen einer Fläche geht also unsere Untersuchung dahin, zu wissen, wie vielmal eine Quadratruthe, Quadratfuß rc. in derselben enthalten sey. Dieß läßt sich am besten bey den rechtwinklichten Vierecken einsehen, wenn man Fig. 55. deren Seiten A B und A C nach einem gewissen Maasse, z. E. Fussen eintheilt. Aus der Länge der Seite A B, welche 9 Fuß enthält, sehen wir, daß 9 Quadratfusse an derselben Raum haben, und aus der Länge der Seite A C, daß diese Schichte von 9 Quadratfussen in der ganzen Fläche fünfmal Platz habe, folglich die ganze Fläche den Quadratfuß 45mal enthalte. Dieses wird am deutlichsten, wenn man die ganze Fläche durch Parallellinien durchschneidet, welche lauter Quadrate zwischen sich bilden. Allein man wird diese Mühe bald zu weitläuftig finden, und einsehen, daß die Fläche nicht dadurch etwan so groß werde, weil sie von Linien auf diese Art durchschnitten wird, sondern daß man die Zahl der in ihr Raum habenden Quadrate zuverläßig erfahre, wenn man die Seiten mißt, und die Zahlen ihres Maasses mit einander multiplicirt.

§. 35.

Allein diese Regul scheint für nichts weiter, als für die rechtwinklichten Vierecke, zu dienen. Denn die schiefwinklichten, die Raute und das rautenförmige Viereck enthalten die Quadrate nicht genau, sondern lassen (Fig. 56.) an ihren Seiten eine Menge Triangel übrig. Es ist aber in der Geometrie erwiesen:

Wenn ein schiefwinklichter und ein rechtwinklichtes Parallelogramm gleiche Grundlinien und gleiche Höhen haben, so ist ihre Fläche gleich groß. Z. E. das Viereck A B C D (Fig. 57.) ist dem Viereck E F G C gleich

gleich, wie die Grundlinie A B der Grundlinie E F gleich ist, und sie einerley Höhe, nämlich C E, haben. Wie wir nun das letztere ausmessen würden, indem wir seine Grundlinie durch seine Höhe multipliciren, so verfahren wir auch nicht anders mit dem ersteren, und es gilt für das schiefwinklichte Parallelogramm überhaupt diese Regul:

Man zieht in oder an demselben von oben herab auf die Grundlinie, (welche allenfalls zu dem Ende verlängert wird) eine Linie perpendicular, um die Höhe desselben zu bestimmen. Man mißt diese sowol, als die Grundlinie nach einem gewissen Maasse aus. Das Product von beyden ist der Inhalt des Parallelogramms in Quadraten von einem dem Maasse ähnlichen Namen. Hat man z. E. die Grundlinie und die Höhe in Ruthen gemessen, so bekömmt man den Inhalt in Quadrat-Ruthen; ist es in Fussen geschehen, in Fussen u. s. f. Gesetzt also A B C D wäre ein Feld, dessen Seite A B 12 Ruthen, die Höhe oder Perpendicularlinie aber 73 Ruthen enthielte, so wäre der Inhalt 876 Quadratruthen. Wenn aber A B über die 12 Ruthen noch 4 Fuß, und die Höhe 73 Ruthen und 7 Fuß enthielten, so müßten wir die ganzen Zahlen in Fussen, nämlich 124 und 737 Fussen ausdrucken; und das Product dieser Zahlen 91388 gäbe das Maaß der Fläche in Quadratfussen an, von welcher Zahl man nur die beyden letztern Ziefern abschneiden dürfte, um die Zahl der Ruthen zu bemerken, wenn zehnfußige Ruthen verstanden sind. Sind die Ruthen zwölffußige, so sind sowol die Zahlen des Längen- als des Flächenmaasses anders. Jene sind 148 und 883. Das Product giebt 130684 Quadratfusse, welche wir hier durch 144 dividiren müssen, um die Zahl der Quadratruthen zu haben, welche nun 907 wird, und 76 Quadratschuh übrig läßt.

§. 36.

Wenn wir die schiefwinklichten Parallelogrammen auszumessen wissen, so wird es leicht, auch die Flächen der

Triangel zu berechnen. Denn dieß ist eine geometrische Wahrheit:

Ein jeder Triangel A B C (Fig. 58.) ist die Hälfte eines Parallelogramms A B C D, das mit demselben gleiche Grundlinie und gleiche Höhe hat.

Wir würden also des Triangels A B C Flächeninhalt erfahren, wenn wir das Parallelogramm aus seiner Grundlinie und Höhe berechneten, und von diesem Inhalt die Hälfte nehmen. Wer aber zu rechnen weiß, sieht wol, daß **man diesen Inhalt des Triangels geschwinder erfahre, wenn man von dem Maasse der Höhe oder der Grundlinie die Hälfte annimmt, und dann die andre Zahl ganz multiplicirt.** Wenn z. E. die Grundlinie 45 Ruthen, die Höhe 68 Ruthen enthielte, so wäre es bequemer, die Höhe halb zu nehmen, und so würde das Product von 45 durch 34, oder die Zahl 1530 den Inhalt des Triangels in Quadratruthen anzeigen: Wäre aber die Grundlinie 44, und die Höhe 67, so würde man lieber von jener die Hälfte nehmen, und dadurch die Höhe multipliciren: Das Product ist alsdenn 1474.

§. 37.

Von der Ausmessung der Triangel ist der Schritt sehr leicht zur Berechnung aller geradelinichten Flächen. Denn diese lassen sich insgesammt in Triangel theilen, wenn man aus einem Winkel in den andern Linien zieht, die man alsdenn **Diagonalen** nennt, aber sich dabey hütet, daß keine derselben die andre schneide. Wir wollen hievon sogleich die Anwendung auf Fig. 59. machen. A B C D E F A sey die Figur eines Feldes, welches durch die Diagonalen C A, C F, C E in vier Triangel getheilt ist. Die Figur zeigt die Maasse so wol der zu Grundlinien der Triangel angenommenen Diagonalen, als ihrer Höhen. Man findet den Inhalt dieser Triangel auf folgende Art:

A C

A C = 220		A C = 220		
½ B G = 60		½ F H = 82		
Triang. A B C = 13200		Triang. A F C = 18040		
E C = 256		E C = 256		
½ F I = 82		½ D K = 105		
Triang. C F E = 20992		Triang. C D E = 26880		

Man bringt diesen Inhalt der einzelen Triangel in eine Summe:

13200
18040
20992
26880

Summe = 79112

Diese Summe ist der gesuchte Inhalt der ganzen Figur in Quadratruthen, wenn die Maasse der Linien in Ruthen genommen ist.

Anmerkung.

Man kann hiebey folgenden Vortheil anwenden. Zween dieser Triangel ABC und A F C haben die Grundlinie AC gemein. Denn der Ausdruck Grundlinie deutet bey den Figuren nicht allemal eine auf dem Papier zu unterst liegende Linie, sondern eine jede Linie an, auf welche man ihre Höhe referirt. Anstatt diese Linie durch die Hälfte der Linie B G, und hernach durch die von F H zu multipliciren, nehme man die halbe Summe dieser beyden Linien 142, und multiplicire dadurch A C, so hat man auf einmal den Inhalt des Vierecks ABCF. Man verfahre auf eben die Art mit dem Viereck C D E F, und addire den Inhalt von beyden. Man sieht leicht ein, daß diese Rechnung geschwinder zum Zweck führe, und eben das, was jene, leiste.

§. 38.

Man kann diese Messung entweder unmittelbar anstellen, oder sie alsdenn vornehmen, wenn man die Fläche

schon aufgenommen, oder in einer ähnlichen Figur auf das Papier gebracht hat. Man wird das erste bequem genug verrichten können, wenn das Feld nicht sehr groß, und dabey rechtwinklicht ist, so daß man dessen Höhe in einer von seinen Seiten unmittelbar mißt. Wenn aber die Figur verschoben ist, so mißt man bequemer ihre Höhe auf dem Papier aus, wo dieselbe, wenn anders das Feld recht aufgenommen ist, gerade eben das Maaß im kleinen angeben muß, was diese Höhe, wenn sie auf dem Felde wirklich gezogen wäre, angeben würde. Dieß ist die Ursache, welche das Aufnehmen der Landgüter, oder die Entwerfung derselben in richtigen Zeichnungen so nothwendig macht, wenn man von deren Werth und Ertrage gewiß seyn will. Ich habe oben §. 22. diejenige Methode erläutert, welche für diesen Fall die allgemeinste ist, um von einer ganzen Gegend auf einmal die vornehmsten Gegenstände in einen Plan zu bringen. Man wird sie aber bey einzelen Feldern besonders wiederholen müssen, um ihre Figur und Größe genauer zu bestimmen. Bey waldichten Gegenden läßt sie sich nicht so leicht anwenden, weil hier die Aussicht auf etwas entfernte Gegenstände benommen ist, zu welchen hinaus man die Winkel messen muß. Doch wird der Umriß und die Lage des Waldes in dem Plane der Gegend gehörig bezeichnet werden, wenn die den Wald umgebende Gegend richtig aufgemessen ist. Will man aber genau verfahren, so mißt man die Linien, die den Umriß des Waldes ausmachen, besonders, samt den Winkeln dazwischen. Wäre z. E. die Gegend (Fig. 59.) eine waldichte Gegend, deren Winkel in den Puncten A. B. C. D. E. F. mit Signalen bemerkt wären, so mässe man von A bis E herum die einzelen Linien AB. BC. CD. DE mit den Winkeln zwischen denselben auf das genaueste. Die Linien A F und E F dürfen nicht gemessen werden, sondern werden in ihrer Länge und Lage richtig bestimmt, wenn alles übrige richtig ist, und die Winkel in A und E scharf gemessen werden. Dieser

Vortheil

Vortheil ist deßwegen sehr wichtig, weil selten ein Wald sich ganz umgehen läßt, sondern gewöhnlich auf einer oder der andern Seite Morast, oder Wiesen, oder Teiche neben sich hat.

Anmerkung.

Mein Zweck erlaubt mir nicht, mehr als die allgemeinsten Einsichten in das Geschäfte des Landmessers hier anzugeben. Ich setze Leser voraus, welche sich nicht selbst mit demselben bemengen, aber doch oft dasselbe Leuten, die sich für geschickt dazu ausgeben, auftragen wollen. Diese werden aus meinen bisherigen Erläuterungen theils die Schwierigkeit einer solchen Arbeit, theils die Gründe einsehen, welche dabey müssen befolgt werden, um sie richtig und genau auszuführen. Es gehört viel dazu, um nicht durch jene zu ermüden, und es kömmt ohne Zweifel daher, daß man so wenig zuverläßige Plane von kleinen oder großen Gegenden zu sehen bekömmt. Wer im Messen geübt ist, erwirbt sich nach und nach ein gewisses Augenmaaß, und man kömmt bald dahin, daß man sich lieber auf dieses verläßt, als alle kleine Gegenstände sorgfaltig aufmißt. Dieses ist die Fertigkeit derjenigen Leute, welche die Franzosen Ingenieurs Geographes nennen, die, wenn sie eine Gegend nur von einer Höhe übersehen, einen Plan derselben nach dem blossen Augenmaaß mit einer Genauigkeit entwerfen können, welche oft erstaunenswürdig ist. Wiewol dieses oft hinlänglich in der Entwerfung einer Landcharte ist, wo es nicht so sehr darauf ankömmt, ob an einer Entfernung, die für eine Meile ausgegeben wird, einige Ruthen fehlen, so wird doch dieß Augenmaaß nimmer so zuverläßig, als es derjenige verlangt, welcher den ganzen Ertrag seines Landgutes aus dem Grundriß desselben beurtheilen will. Wenn hier an der Länge oder Breite eines großen Feldes einige Ruthen fehlen, so giebt dieses in der Fläche einen Fehler von vielen Quadratruthen. Giebt man zuviel an, so hält der Eigner sein Feld für größer, als es ist. Die Einsaat richtet sich darnach, das Feld wird über die Gebühr besäet, und der Eigner und seine Nachfolger verlieren jährlich an der Saat ein beträchtliches, welches dem Lande nicht zu Gute kommen kann. Und gewiß, ein jeder Besitzer eines Landgutes würde, wenn er dasselbe von einem Landmesser aufnehmen lassen will, einen großen Vortheil davon haben, wenn er sich zuvor von den Gründen dieser Arbeit unterrichten liesse, um gehörig auf

jenen Acht geben, und ihn in der Aufmerksamkeit unterhalten zu können, welche nothwendig ist, wenn er ihm einen zuverläßigen Plan liefern soll.

§. 39.

Die Felder haben nur selten geradelinichte Gränzen. Allein, weil man hier nicht auf Kleinigkeiten sieht, so übersieht man die kleinen Krümmungen, welche hier vorfallen, und nimmt die Gränzen von einem Winkel, wo sie sich merklich biegen, bis zum andern als gerade Linien an. Man hat daher in den gewöhnlichen Fällen der practischen Geometrie keine Veranlassung, sich um die Reguln zur Ausmessung krummlinichter Flächen zu bekümmern, welche eine sehr tiefsinnige Mathematik voraussetzen.

Der Circul bleibt uns indessen wichtig genug, um die Reguln zu erläutern, nach welchen derselbe berechnet werden muß. Eben die Gründe, durch welche die Mathematiker das Verhältniß des Durchmessers zum Umkreise aus der Vergleichung des Circuls mit den Polygonen erwiesen haben, (s. oben §. 32.) leiten auf die Wahrheit, daß

der Circul einem Triangel gleich ist, der zur Grundlinie den Umriß des Circuls, und zur Höhe den Radius hat.

Dieses vorausgesetzt, **werden wir den Inhalt eines Circuls finden, wenn wir den Umriß desselben nach dem oben §. 32. gegebenen Verhältniß berechnen, und das gefundene Maaß durch den halben Radius multipliciren.**

Wir wollen z. E. einen Circul annehmen, dessen Durchmesser 12 Zoll enthält. Nach dem Verhältnisse 113 : 355 ist dessen Umriß 37 Zoll 7 Linien. Der halbe Radius ist 3 Zoll oder 30 Linien. Das Product von 377 durch 30 beträgt 11310 Quadratlinien, oder 113 Quadratzoll und 10 Quadratlinien.

Ein andres Beyspiel mag ein Circul von 45 Ruthen im Durchmesser abgeben. Seine Peripherie ist nach eben demselben

demselben Verhältniß 141°3′7″2‴. Der vierte Theil des Durchmessers ist 11°2′5″0‴. Das Product ist 1590°43′50″00‴, wo man sogleich die Zahl der Quadratruthen, Fusse und Zolle hat, indem man von zwo zu zwo Ziefern deren Zeichen setzt, als wenn man durch 100 dividirt hätte. (§. 36.)

Wir wollen zum dritten Exempel den größten Circul an unsrer Erdkugel nehmen, welcher entsteht, wenn wir uns die Erde, als durch den Mittelpunct getheilt, gedenken, welcher Circul der vierte Theil von der Oberfläche der Erde ist. Hier hat der besondere Fall statt, daß man den Durchmesser aus dem Umriß finden muß. Dieser wird, wie bekannt, auf 5400 teutsche Meilen geschätzt. Der Durchmesser wird daraus in dem Verhältnisse 355 : 113 beynahe 1719 Meilen groß gefunden. Man nimmt aber gewöhnlich 1720 Meilen an, weil man doch weiß, daß der eigentliche Umriß nicht ein so vollkommener Circul ist. Mit dem vierten Theil dieses Radius, 430 Meilen, multiplicirt man den Umriß, so giebt das Product 2,322000, den Inhalt des Circuls in Quadratmeilen.

Vierter Abschnitt.

Von der Vergleichung ähnlicher Flächen mit einander.

§. 40.

Wenn man den Inhalt von zwo verschiedenen Flächen berechnet, so hat man die Zahlen, die das Verhältniß dieser Flächen anzeigen. Allein man verlangt oft das Verhältniß von zwo Flächen zu wissen, ohne ihren Inhalt zu berechnen, oder man will statt einer gegebenen Fläche eine andre ihr ähnliche bestimmen, welche von ihr ein gewisser Theil sey, oder ein gegebenes Verhältniß zu ihr habe.

z. E. man hat einen Circul, dessen Durchmesser drey Fuß, und einen andern, dessen Durchmesser sieben Fuß ist. Es ist in manchen Fällen nöthig zu wissen, wie viel kleiner der eine als der andre sey. Oder man will statt eines Circuls von bestimmter Größe einen andern bestimmen, der in gewissem Verhältniß kleiner oder größer sey. Diese Untersuchung wird einen Nutzen haben, der in der Folge für uns überaus wichtig ist. Ausser dem, daß in der Schätzung der Flächen selbst diese Frage sehr oft vorkömmt, so kann man auch, ohne hierinn gewiß zu seyn, die soliden Maassen trockener und flüßiger Dinge auf keine Art vergleichen. Die Geometrie wird eben hierinn besonders nützlich, und sie stellt uns hier vor allerley Irrthümern und Betrügen sicher, welche für den, der ihre Wahrheit nicht kennt, so häufig als unvermeidlich sind. Ich werde hier zween Fälle nach einander abhandeln: 1) Nach welchen Reguln man die Verhältnisse schon bestimmter ähnlicher Flächen untersuchen müsse. 2) Wie man aus einer Fläche eine andre ihr ähnliche in jedem gegebenen Verhältnisse bestimmen könne.

§. 41.

Um uns den ersten Fall deutlich vorzustellen, nehme man zween Quadrate A B C D und E F G H, (Fig. 60.) und messe die Seite des einen und des andern nach einerley Maasse aus. Gesetzt die Seite des einen A B enthielte 9 Fuß, und die Seite des andern 13 Fuß; so findet man den Inhalt von beyden in Quadratfussen, indem man diese Zahlen durch sich selbst multiplicirt, und man sieht nun deutlich, wo anders die Regul von Berechnung der Quadrate §. 34. einigen Grund hat, daß sich die Flächen dieser Quadrate, wie die Quadratzahlen ihrer Seiten 81 und 169, verhalten. Eben dieses ist der Grund, warum man denen Zahlen, die durch Multiplication einer Zahl durch sich selbst entstehen, die Benennung des Quadrats gegeben hat.

Die

Die Geometrie beweiset dieses auf eine allgemeine Art von den Quadraten, selbst in dem Fall, den man freylich in der Praxis nicht gewahr wird, wenn die Seiten derselben so bestimmt sind, daß sie sich gar nicht durch einerley Maaß ausmessen lassen, wie klein man auch immer dieses Maaß annimmt, dergleichen Linien incommensurabel nennt.

Sie beweiset aber auch überhaupt:

Daß alle ähnliche Figuren sich wie die Quadrate ihrer gleichnahmigen Seiten verhalten.

Man nehme z. E. zween Triangel, A B C und E D F, (Fig. 61.) die einander ähnlich sind, man messe diejenigen Seiten A B. D E, die den gleichen Winkeln C und F entgegen stehen, und zeichne auf denselben deren Quadrate A B H G und D E K I, so haben die Flächen der Triangel eben das Verhältniß, welches die Quadrate haben. Die Berechnung derselben beståttigt dieses, und es ist auch hier nicht schweer, die Gründe davon einzusehen. A B habe 12, die Höhe C L 15, D E 8, die Höhe F M 10 Theile. Diese vier Zahlen verhalten sich auf einerley Art, weil überhaupt **in ähnlichen Triangeln die Grundlinien und Höhen sich auf einerley Art zu einander verhalten.** Man kann indessen die Proportion 12 : 15 = 8 : 10 auch so ausdrucken:

12 : 12 ⋈ exp. = 8 : 8 ⋈ exp. (s. Arithm. §. 7.)

Nun multiplicire man die beyden ersten und die letzten Glieder durch einander. Ihre Producte sind 12 ⋈ 12 ⋈ exp. = 12 ⋈ 12 ⋈ 15 in unserm Exempel, und 8 ⋈ 8 ⋈ exp. = 8 ⋈ 10. Man hat also die Quadrate von 12 und von 8 beyde durch den Exponenten der Proportion multiplicirt. Wenn aber zwo Zahlen durch eine dritte multiplicirt werden, so bleibt ihr Verhältniß unverändert. (Arithm. §. 13.) Daher verhalten sich diese Producte der Quadrate durch den Exponenten noch immer, wie die Quadrate. Die Hälfte dieser Producte giebt den Inhalt der Triangel,

Denn hier sind noch die ganzen Grundlinien durch die ganzen Höhen multiplicirt. Diese Hälften verhalten sich ebenfalls wie die ganzen Producte, die sich wie die Quadrate verhielten.

Diese Wahrheit ist indessen allgemein für alle ähnliche Figuren, und wir können diese allgemeine Regul zur Vergleichung derselben festsetzen:

> **Wenn man die Vergleichung der Fläche von ähnlichen Figuren anstellen will, so nehme man das Längenmaaß von denjenigen Seiten, die eine ähnliche Lage in beyden Figuren haben, multiplicire dieses Maaß durch sich selbst; diese Quadratzahlen geben an, wie viel größer oder kleiner die eine als die andre sey.**

Man kann eben hiedurch zum voraus wissen, wie viel größer oder kleiner eine Figur werden werde, wenn man das Maaß einer ihrer Linien größer oder kleiner annimmt. Wenn man z. E. den Radius eines Circuls doppelt so groß annimmt, und damit einen Circul beschreibt, so wird er viermal, nimmt man den Radius dreyfach, so wird er neunmal größer. Nimmt man statt vier Theile, die der Radius hat, deren fünfe, so wird das Verhältniß der Circul wie 16 zu 25 seyn. Nimmt man aber drey Theile für den Radius, so ist das Verhältniß zu jenem 9:16. Nimmt man statt einer Ruthe im Radius einen Fuß, so wird der Circul, eben wie das Quadrat des Fusses, 100mal kleiner, und überhaupt verhalten sich die Circulflächen bey verschiedenem Radius wie die Quadratzahlen des Radius von einem jeden Circul.

§. 42.

Dieß leitet uns ziemlich deutlich auf den zweyten §. 40. erwähnten Fall, da man eine Fläche in einem gewissen

Verhältniß

Verhältniß vermehren, oder vermindern will. **Man muß nämlich alsdenn das Maaß der Seiten so wählen, daß deren Quadratzahlen das angenommene Verhältniß haben.** Wenn wir z. E. ein viermal kleineres Quadrat aus einem größern machen wollten, so werden wir nur die Hälfte seiner Seite zum Maaß der Seite des andern Quadrats annehmen dürfen. Alsdenn verhalten sich die Quadrate wirklich wie 1 : 4. Es würde sich eben so mit den Circuln verhalten. Mit der Hälfte des Radius beschreiben wir einen viermal, mit dem Drittheile einen neunmal kleinern Circul, u. s. f.

Die Sache wird aber schweerer in der Ausführung, wenn die Zahlen nicht so angenommen sind, daß man ihre Quadratwurzeln unmittelbar wissen kann. Z. E. man wollte einen Circul haben, der dreymal so groß als ein gegebener Circul wäre. Hier wird man seltsame Fehler und Ungewißheit bey den Unwissenden in der Mathematik wahrnehmen, die gewöhnlich glauben, alles sey schon gut, wenn sie nur den Radius dreymal größer annehmen. Wir haben aber schon erwähnt, daß dieses einen neunmal größern Circul gebe, und man sieht überhaupt wol ein, daß man hier ein solches Maaß für den Radius suchen müsse, dessen Quadrat die Zahl 3 sey, kurz, daß man die Quadratwurzel von 3 berechnen müsse.

Dieß ist ein Fall, für welchen die oben (Arithm. §. 37.) gegebene Regul zur Ausziehung der Quadratwurzel unzulänglich ist, und in welchem man dieselbe durch Näherung suchen muß. Denn 3 hat weder 1, noch 2 zur Quadratwurzel, sondern dieselbe wird zwischen diese beyde Zahlen fallen. **Man erfährt die Quadratwurzel in Decimaltheilen, wenn man an die Zahl 3 zwo Nullen anhängt, hieraus die Wurzel zieht, und dieses so oft fortsezt, als man es gut findet.** Die Rechnung steht auf folgende Art:

3[1,732

```
      3 [ 1,732
      1
   ---------
      2 | 00
        | 27
      1 | 89
   ----------
          11 | 00
           3 | 43
          10 | 29
       ----------
              71 | 00
              34 | 62
              69 | 24
           ----------
               1 | 76 | 00
               3 | 46 | 4
```

Wir hören hier mit der Rechnung auf, da wir kein volles Zehntausendtheil mehr nehmen können, und bey weiter fortgesetzter Rechnung auf Hunderttausendtheile gerathen würden, die sich doch in keinem Maasse mehr ausdrucken lassen.

Die Quadratwurzel beträgt also 1 und 732 Tausendtheile. Man müßte also den Radius um diese Theile vergrößern, und, wenn der Radius des ersten Cirkuls 1 Ruthe wäre, noch 7 Fuß 3 Zoll und 2 Linien dazu nehmen, so würde der Circul beynahe dreymal größer werden. Die übrigbleibende Zahl ist zwar sehr groß, allein sie zeigt nur 176 Quadratlininien, und überhaupt ohngefähr $1\frac{3}{4}$ Quadratzoll an. Wollte man den Circul doppelt größer haben, so müßte man die Quadratwurzel aus der Zahl 2 ziehen, und darnach das Maaß desselben einrichten.

Wenn man Circul oder ähnliche Flächen verkleinern, oder überhaupt sie in dem Verhältniß gewisser Brüche verändern will, so ist es am leichtesten, die

Zahlen

Zahlen des Verhältnisses in Decimalbrüche zu verwandeln, und aus diesen die Quadratwurzel auszuziehen. Doch muß man eine ebene Zahl von Bruchziefern hinter dem Comma haben. Z. E. ich suche den Circul, welcher $\frac{3}{5}$ von einem andern, der einen Fuß im Radius hat, in der Fläche enthielte. $\frac{3}{5}$ ist = $\frac{60}{100}$, oder 0,60, oder auch 0,6000 u. s. f. Aus dieser nach Gutdünken fortgesetzten Zahl ziehe ich die Quadratwurzel. Sie ist 0,7746. Ein Radius in diesen Decimaltheilen bestimmt, giebt beynahe einen $\frac{2}{5}$mal kleinern Circul an, dem nicht vollends anderthalb Quadratlinien fehlen.

§. 43.

Indessen lehrt die Geometrie verschiedene Wege, beyde Fälle durch eine leichte Zeichnung aufzulösen, und überhaupt die Flächen in allerley Verhältnissen zu vermehren und zu vermindern.

Der erste von denen Sätzen, welche die Gründe hiezu enthalten, ist dieser:

> **An einem rechtwinklichten Triangel ist das Quadrat der Linie, welche dem rechten Winkel entgegen steht, so groß als die Quadrate derer Seiten, die den rechten Winkel einschliessen, zusammen genommen.**

A B C (Fig. 62.) ist ein rechtwinklichter Triangel, dessen Seite B C 5 Theile, A C 4 und A B 3 enthält. Das Quadrat von B C beträgt 25, das von A C 16, und das von A B 9 Quadrate, die aus dem Maasse bestimmt sind, nach welchem diese Linien ausgemessen sind.

Dieser Satz ist allgemein wahr, nicht nur in Absicht auf Quadrate, sondern auch für alle ähnliche Figuren, was für ein Verhältniß auch die Linien des rechtwinklichten Triangels haben mögen. Wenn man mit den Seiten A B, A C und B C des rechtwinklichten Triangels Circul beschreibt, so ist der

Circul,

Circul, dessen Radius B C gleich ist, so groß als die beyden andern zusammen genommen. Wenn man ähnliche Vielecke, reguläre oder irreguläre, beschreibt, deren gleichnahmige Seiten oder Diagonalen man von den Seiten eines rechtwinklichten Triangels nimmt, so ist das größte von diesen so groß, als die beyden andern zusammen genommen. (Fig. 63.)

Anmerkung.

Dieser Satz ist der so berühmte Pythagoräische Lehrsatz, dessen Erfindung dem Pythagoras so viel Freude machte, daß er, der gemeinen Erzehlung nach, den Musen ein großes Opfer zur Dankbarkeit brachte. Er bewies ihn aber nur von den Quadraten. Euklides aber hat ihn in seinem 6ten Buche von allen ähnlichen Figuren bewiesen. Er wird auch wegen seines großen Nutzens in der höhern Mathematik gewöhnlich Magister Matheseos genannt. Ich will seinen Nutzen in den Vorfällen des gemeinen Lebens durch einige Aufgaben erläutern.

§. 44.

Er läßt sich am leichtesten anwenden, um Flächen in einem gewissen Verhältnisse zu vermehren. Wenn ich z. E. ein Quadrat A B C D (Fig. 64.) doppelt so groß machen will, so darf ich nur in demselben die Diagonal B D ziehen, und auf derselben ein Quadrat zeichnen. Denn nun ist in dem rechtwinklichten Triangel A B D das Quadrat der Linie B D so groß, als das Quadrat von A B und A D, oder, weil beyde Linien einander gleich sind; so groß, als das Quadrat der Linie A B zweymal genommen. Will ich einen Circul verdoppeln, so setze ich den Durchmesser, oder auch den Radius desselben mit sich selbst rechtwinklicht zusammen: ziehe zwischen beyden Endpuncten eine Linie, die nun der Durchmesser oder der Radius eines doppelt so großen Circuls ist. Will man ein Quadrat oder Circul dreymal so groß haben, so sucht man zuerst die Seite oder den Radius B C für die doppelte Figur, setzt alsdenn die Linie A B in B D noch einmal an diese rechtwinklicht an, und zieht

dem rechten Winkel gegenüber die Linie C D. Nun ist das Quadrat oder der Circul von C D so groß, als das Quadrat oder der Circul von C B und B D zusammen genommen, folglich zweymal und einmal, das ist, 3mal so groß, als das von A B. (Fig. 65.) Wenn ich an dieser Figur die Linie C B rechtwinklicht ansetze, werde ich die Seite für das 5fache Quadrat oder Circul ziehen, und auf diese Art die Figur in jedem Verhältniß ganzer Zahlen vergrößern können.

Ich werde es aber auch in andern Verhältnissen thun können. Das Quadrat der halben Seite von A B ist der vierte Theil des ganzen Quadrats. Setze ich also an A B die halb so große Linie A C, (Fig. 66.) so habe ich in der Linie C D die Seite eines Quadrats, welches so groß als das ganze Quadrat von A B und das Viertheil desselben ist, folglich $\frac{5}{4}$ des Quadrats von A B enthält.

Wir können hierinn noch weiter gehen, und die Quadrate in gewissen Verhältnissen vermindern. Wenn wir über der Seite A B (Fig. 67.) eines Quadrats einen halben Circul schlagen, diesen in zween Theile in C theilen, so sind die Linien A C und C B einander gleich, und der Triangel A B C ist rechtwinklicht. Ihre Quadrate sind demnach so groß, als das Quadrat von A B, weil der Winkel bey C recht ist. Denn alle Triangel, die man in einem halben Circul beschreibt, sind rechtwinklicht. Sie sind aber eins so groß, als das andre, und daher jedes die Hälfte des Quadrats A B. Wenn ich die Hälfte von A B nehme, (Fig. 68.) und von A aus an den Umriß des Circuls in C trage, alsdenn C B ziehe, so ist das Quadrat dieser Linie $\frac{3}{4}$ von dem Quadrat der Linie A B. Denn A Cq ist $\frac{1}{4}$ von A Bq, weil A C die Hälfte von A B ist. B Cq aber macht mit diesem A Cq so viel aus, als das ganze A Bq. Folglich ist dasselbe alleine $\frac{3}{4}$ von A Bq. Nachdenkende werden hierinn Anleitung genug finden, um die Zeichnungen in

allerley

allerley Verhältnissen zu verändern, wenn sie diese verschiedenen Zeichnungen mit einander verbinden.

§. 45.

Die Geometrie lehrt aber noch einen andern Satz von großer Wichtigkeit, und von einem noch allgemeinern Nutzen zur Veränderung und Vergleichung der Figuren in allerley Verhältnissen. Er ist dieser:

> **Wenn man in einem halben Circul (Fig. 69.) auf den Durchmesser desselben eine Linie C D von dem Umriß des Circuls her perpendicular ziehet, so ist diese Linie die mittlere Proportionallinie zwischen den beyden Theilen des Durchmessers A D und D B.**

Wir müssen, um diesen Satz anzuwenden, noch eine Eigenschaft der zusammenhängenden Proportion, deren wir oben (Arithm. §. 23.) erwähnt haben, hier erklären. Sie ist diese:

> **Wenn drey Größen in einer zusammenhängenden Proportion fortgehen, so verhält sich das Quadrat der ersten zu dem Quadrat der zweyten, wie sich die erste Größe zu der dritten verhält.**

Weil z. E. $2:6 = 6:18$
so verhält sich: $2 \times 2 : 6 \times 6 = 2:18$
das ist: $4:36 = 2:18$
Oder weil: $3:5 = 5:8\frac{1}{3}$
so ist folglich: $9:25 = 3:8\frac{1}{3}$.

Es verhält sich nicht anders mit den Linien, und wenn die Linie A B (Fig. 70.) sich zu C D verhält, wie C D zu E F, so verhält sich das Quadrat, oder ein Circul, oder eine jede Figur auf A B, zu einer jeden andern ähnlichen Figur auf C D, wie sich A B zu E F verhält. Ist also A B ein Drittel von E F, so ist auch die erste dieser Figuren ein Drittel

von

von der andern groß. Eben so verhält es sich mit zwo ähnlichen Figuren auf den Linien G H und I K, (Fig. 71.). Wenn GH : IK = IK : LM, und GH ist $\frac{4}{3}$ von LM, so ist die Figur auf G H $\frac{4}{3}$, oder um $\frac{1}{3}$ größer, als die auf I K. Man kann hievon folgenden Gebrauch in Vergleichung ähnlicher Figuren machen.

§. 46.

Wenn wir eine Figur in gewissem Verhältnisse der Fläche verändern wollen, doch so, daß die Aehnlichkeit unverändert bleibe, so nimmt man eine seiner Seiten, trägt an dieselbe in gerader Linie eine andere, die zu dieser das angegebene Verhältniß hat, beschreibt darüber einen Circul, und zieht aus dem Punct, wo diese Linien zusammen gehen, eine Linie perpendicular an den Umriß des Circuls. Wenn an dieser Linie eine ähnliche Figur gezeichnet wird, so hat sie zu der ersten Figur das gesuchte Verhältniß.

Z. E. Man wollte statt des Circuls, oder der Figur ABCD, (Fig. 72. und 73.) einen andern Circul oder Figur haben, welche um ein Drittheil kleiner wäre, als dieser Circul oder Figur, so nehme man eine Linie BC, (Fig. 74.) welche $\frac{2}{3}$ von AB, dem Radius des Circuls oder der Seite der Figur beträgt. Diese setze man an AB in gerader Linie, theile die ganze Linie AC in zween gleiche Theile, beschreibe aus dem Mittelpunct D einen halben Circul AEB. Nun ziehe man die Linie BE perpendicular aus B. Diese ist der Radius eines Circuls, (Fig. 75.) oder die gleichnahmige Seite einer Figur a b c d, (Fig. 76.) welche zu jenen beyden (Fig. 72. und 73.) sich wie 2 zu 3 verhalten.

Man wird eben dieses in Zahlen verrichten können, wenn man zwischen den Zahlen 2 und 3 die mittlere Proportionalzahl sucht. Dieß geschicht durch die Ausziehung der Quadratwurzel aus dem Product von 2 × 3 oder 6. (Arithm. §. 37.) Allein was ist diese Wurzel für eine

Zahl? Sie ist grösser als 2, und kleiner als 3, und wird also noch einige Zehntheilchen über 2 enthalten. Man erfährt auch diese durch Ausziehung der Quadratwurzel in Decimaltheilen, wie in dem Exempel §. 42. Man ziehe aus 6 die Quadratwurzel 2, welche ihr am nächsten kömmt, und hängt an den Rest zwo Nullen, durch welche man die Rechnung fortsetzt, als wäre es die Zahl 600 gewesen. Hiedurch lernt man die Zehntheile kennen. Thut man dieses noch einmal, so bekömmt man Hunderttheile, u.s.f. Man bekömmt auf diese Art die Zahl 2,4494, doch nicht als die genaue Wurzel, und eine nach diesem Maasse bestimmte Linie giebt uns eine Figur, die zu der ersten Figur das gesuchte Verhältniß 2 : 3 mit einer hinlänglichen Genauigkeit hat.

Anmerkung.

Ich habe hier ein Exempel gewählt, welches den Nutzen von der Ausziehung der Quadratwurzel durch Näherung auf eine vorzügliche Art darthut. Wozu würde es uns helfen, wenn wir die Wurzel nicht weiter als in ganzen Zahlen zu berechnen wüßten? Daß es eine mittlere Proportionalzahl zwischen 2 und 3 gebe, ist unstreitig. 2 kann es nicht seyn, denn es ist ungereimt zu sagen: daß 2 : 2 = 2 : 3. Daß es nützlich sey, sie zu suchen, weil sie uns in den Stand setzt, die Figur in einem gewissen Verhältnisse zu verändern, ist aus den bisherigen Erläuterungen klar: daß sie nur durch Ausziehung der Quadratwurzel gefunden werde, ist oben (Arithm. §. 37.) gezeigt. Wir brauchen also nothwendig eine Methode, die uns diese Zahl in Brüchen bekannt mache, und zwar in so kleinen Brüchen, als wir es nur immer, der Genauigkeit halber, wünschen können. Wir können durch diese Wege beydes arithmetisch und geometrisch alle Verwandlungen der Figuren mit Beybehaltung ihrer Aehnlichkeit vornehmen. Und es ist leicht einzusehen, daß diese Erfindung der mittlern Proportional uns viel weiter, und leichter zu unserm Endzwecke führe, als der §. 43. erklärte Pythagoräische Lehrsatz.

Man hat, um diese Vergleichung der Figuren zu erleichtern, auf dem bekannten Instrument, dem Proportionalcircul, eine Linie angebracht, in welcher die Abtheilungen nach einer aus einer gewissen Linie fortgehenden geometrischen Progreßion

greßion genommen sind, und man kann nach den Verhältnissen dieser Linie andre Linien proportioniren, welche alsdenn die Seiten der Figuren abgeben, die man in dem gegebenen Verhältnisse verändern will. Ich würde mein Buch zu sehr ausdehnen müssen, wenn ich den Gebrauch dieses Instruments hier beschreiben wollte, und mich ohne große Weitläuftigkeit nicht verständlich ausdrucken können. Der mündliche Unterricht leistet hierin mehr in einer Viertelstunde, als was ich hier auf vielen Bogen erklären könnte.

§. 47.

In einer zusammenhängenden Proportion ist das Quadrat der mittlern Zahl so groß, als das Product der ersten und dritten Zahl. (Arithm. §. 37.) In der Geometrie ist dieses eine ähnliche Wahrheit:

> **Wenn drey Linien in zusammenhängender Proportion stehen, so ist das Quadrat der mittlern Linie so groß, als das länglichte Quadrat (Rectangulum) zwischen den beyden übrigen Linien.**

Wir werden durch diesen Satz in den Stand gesetzt, ein jedes Rectangulum in ein Quadrat zu verwandeln. Man nehme z. E. ein Rectangulum A D B E (Fig. 77.) zwischen den Linien AD und DB, (Fig. 69.) so ist CDFG, (Fig. 78.) das Quadrat der Linie DC, genau so groß, als dieses Rectangulum, und wir werden überhaupt für jedes Rectangulum ein Quadrat angeben können, wenn wir die mittlere Proportional zwischen den Seiten desselben suchen. Dieß ist ein deutliches Exempel von der eigentlich sogenannten Quadratur einer geradelinichten Fläche, bey welcher sich nicht das unbestimmte entdeckt, welches sich in den meisten Fällen äussert, wenn man eben dieselbe Aufgabe arithmetisch auflösen, und zwischen denen Zahlen, die das Maaß von zwo Linien angeben, die mittlere Proportionalzahl durch Ausziehung der Quadratwurzel suchen will, welche man selten genau, sondern fast immer nur durch Näherung,

findet. Euklides lehrt in einer Menge Aufgaben und Lehrsätze, wie man alle geradelinichte Figuren in Rectangula und alsdenn in Quadrate, ohne Rechnung, und bloß durch Zeichnungen verwandeln könne. Allein man geht nicht immer so weit, und eine geradelinichte Figur ist so gut als quadrirt, wenn man ihren Inhalt durch dergleichen Berechnungen, zu welchen wir oben Anleitung gegeben haben, bestimmt hat. Zieht man aus diesem Inhalt in Zahlen die Quadratwurzel, so hat man die Seite des Quadrats, welches dieser Figur gleich ist. Z. E. wenn wir aus dem §. 37. berechneten Inhalt der 59sten Figur 79112° die Quadratwurzel 281°2′7″ gefunden haben, so können wir nun ein derselben gleiches Quadrat zeichnen.

§. 48.

Wir können eben das von dem Circul sagen. Es ist eben so gut, als wäre er quadrirt, wenn man seinen Inhalt, nach der oben §. 39. angegebenen Anweisung, scharf berechnet hat. Will man aber ein Quadrat angeben, das ihm ähnlich wäre, so kann man aus seinem berechneten Inhalt noch die Quadratwurzel ziehen, und alsdenn das Quadrat zeichnen, das dem Circul gleich ist. Z. E. ein Circul, dessen Durchmesser 500 Zoll beträgt, enthält beynahe 1963′54″. Die Quadratwurzel hievon ist 4431‴. Beschreibt man auf einer Linie von diesem Maasse ein Quadrat, so fehlt ein Achttheil eines Quadratfusses daran, daß dasselbe nicht dem ganzen Circul gleich werde. Wem dieses noch zu viel dünkt, der nehme noch $\frac{1}{10}$ einer Linie dazu, so fehlen nur noch $3\frac{1}{2}$ Quadratzolle, nimmt er aber $\frac{2}{10}$ einer Linie, so hat er $5\frac{1}{3}$ Quadratzoll zu viel.

Indessen haben sich die Mathematikverständige alter und neuer Zeiten sehr viel Mühe gegeben, eine solche geometrische Quadratur des Circuls ausfündig zu machen, als wir an dem Rectangulo gewiesen haben, bey der sich gar kein Fehler sinnlich wahrnehmen liesse, vielweniger die Rechnung

einen

einen verriethe. Allein es ist Zeit, die Hoffnung aufzugeben, daß dieses jemals ausfündig gemacht werden könne. Und wenn es auch einmal dazu käme, so wird man doch immer lieber durch die genaue Rechnung, wozu die Gründe schon lange gegeben sind, als durch geometrische Zeichnung es auszuführen wählen. Man findet auch in der That, daß zuweilen nur noch Halbwissende, die nicht wissen, was schon vor ihnen in dieser Sache gethan sey, ihre Zeit und ihr Nachdenken in der Erfindung der Quadratur des Circuls verschwenden.

Fünfter Abschnitt.

Von der Messung der soliden Räume.

§. 49.

Es sind unstreitig derer Fälle weit mehr, in welchen wir diese Messung brauchen, als derjenigen, in welchen Linien und Flächen zu messen vorkommen, und wir messen in den meisten Fällen diese letztern nur in der Absicht, um zu der Kenntniß des soliden Maasses dadurch zu gelangen. Alles was ich §. 40. bis 48. von der Vergleichung der Flächen gesagt habe, wird uns hier in der Vergleichung der soliden Maassen allererst recht nützlich werden. Aller Handel und Wandel hat gewisse Körper zum Vorwurf, deren Preis man nach der körperlichen Ausdehnung bestimmt. Bey den meisten flüßigen Waaren wird uns ein solches Ausmessen des Raums, den sie einnehmen, unumgänglich nothwendig. Bey den trocknen Waaren überhebt uns freylich das Abwägen derselben dieser Mühe. Allein eigentlich hat dieses Abwägen keine andre Absicht, als die, welche das Ausmessen hat. Wenn ich zehn Pfund von einer gewissen Waare kaufe, so bezahle ich deßwegen zehnmal mehr Geld, als ich für ein Pfund bezahlen würde, weil ich mich

versichert halte, daß ich nun zehnmal mehr von der körperlichen Masse der Waare, die ich verlange, bekomme, als ich in einem Pfunde bekommen würde. Man wiegt insgemein nur die Waaren ab, bey welchen das Messen nicht zuverläßig ist, weil sie in grobe Stücke zertheilt, das Maaß, in welchem man sie ausmessen würde, nicht genau ausfüllen, und bald mehr, bald weniger Raum zwischen sich frey lassen würden. Allein, so bald eine Waare entweder flüßig, oder in viele kleine Körper zertheilt ist, welche so genau über einander fallen, daß sie in dem Maasse keine große Lücken lassen können, wie z. E. Korn und kleine Gesäme, so zieht man das Messen als zuverläßiger und geschwinder vor, und nimmt höchstens zuweilen das Gewicht mit zu Hülfe. Allein wir müssen auch oft Körper ausmessen, die eine solide Masse von gewisser Größe ausmachen, welche wir nicht mehr in Stücke zertheilen können oder wollen, um sie in ein gewisses Maaß mit einander zu schütten, und da ihren Betrag zu erfahren. Wir haben z. E. von einer gewissen flüßigen Waare ein ganzes Faß voll. Wir werden nicht immer dieses Faß ausleeren, und bey einzelen Quartieren oder Stübchen ausmessen, sondern lieber sein Maaß, so wie es da angefüllt liegt, erfahren wollen. Oder wir wollen große Körper zusammen tragen, und dabey vorher wissen, wie viel wir von einer gewissen Materie brauchen, um diese Körper zusammen zu setzen. Ich will z. E. ein Gebäude aufführen. Aber ehe ich die Materialien dazu anschaffe, muß ich zum voraus den Raum, welchen dessen Mauren einnehmen werden, noch ehe sie aufgeführt sind, wissen, und die Zahl der Steine, den Vorrath von Kalk und andern Materialen daraus bestimmen. Es sind insonderheit Fälle der letztern Art, für welche die Reguln dienen, welche ich hier erklären werde.

Anmerkung.

Hier wäre der Ort, die geometrischen Körper zu beschreiben. Weil aber viele derselben nicht für meine Absicht dienen, so werde

werde ich ihre Erklärungen und Figuren so einrücken, wie mich der Vortrag meiner Reguln zur Ausmessung derselben auf sie nach und nach leiten wird.

§. 50.

Die erste Frage für uns ist hiebey, was für ein Maaß sich für die Körper annehmen lasse. Daß es selbst ein Körper seyn, oder mit den Körpern, die wir ausmessen wollen, einerley Ausdehnung haben müsse, ist klar. Wir werden aber den Körper nehmen müssen, dessen Vorstellung die einfachste ist. Das Quadrat ist die einfachste Figur unter den Flächen, und unter den Körpern ist der einfachste derjenige, welcher von sechs Quadraten eingeschlossen ist, welchen wir einen Würfel (Cubus) nennen. Man s. Fig. 75. wo er, so wie die übrigen Figuren der Körper, nicht mit seinen geometrischen Eigenschaften, sondern in einer gewissen Perspectiv gezeichnet worden. Er ist eben so lang, als breit und hoch, und alles wird in ihm durch Eine Seite bestimmt. Er füllt auch den Raum der Körper auf das genaueste aus, und die er nicht ausfüllt, lassen sich bequem mit denen vergleichen, bey welchen er dieses thut.

Man benennt aber diese Würfel, eben wie die Quadrate, von dem Maaß ihrer Seite: Cubicruthen, wenn ihre Seite eine Ruthe, Cubicschuhe, wenn dieselbe ein Schuh ist, u. s. f. Doch sind diese cubischen Ruthen und Schuhe, so wie die Ruthen und Schuhe im Längenmaasse, unterschieden. Eine Cubicruthe läßt sich nach Cubicschuhen ausmessen, und enthält deren, wie unten deutlich gemacht werden wird, im zehntheiligen Maasse tausend. Ein Cubicschuh enthält tausend Cubiczoll, und ein Cubiczoll tausend Cubiclinien. Im zwölftheiligen Maasse aber muß man 1728 der kleinern Würfel auf den Würfel des größern Maasses rechnen.

§. 51.

Einen Körper ausmessen, heißt demnach, die Zahl der Cubicruthen, Schuhe u. s. f. angeben, in welche dessen

ganze Ausdehnung eingetheilt werden kann. Um sich dieses deutlich vorzustellen, muß man bey denen Körpern anfangen, deren Seitenflächen rechtwinklicht zusammen stehen. Denn nur diese lassen sich in dergleichen Würfel ganz genau eintheilen. Man stelle sich den Körper ABCDE (Fig. 79.) vor: Seine rechtwinklichte Grundfläche hat auf einer Seite AB 9, auf der andern BC 7 Fuß, und enthält folglich §. 34. 63 Quadratfuß. Auf ihr hat also eine Schichte von 63 cubischen Fußen, die nur einen Fuß hoch ist, Raum. Allein, weil eben dieser Körper auch 5 Fuß hoch ist, so hat diese Schichte in demselben fünfmal Platz, und also läßt er sich in fünf Schichten, jede von 63 Cubicfuß, das ist, in allem in 315 Cubicfuß eintheilen. Hätte eine jede Seite eine Ruthe oder 10 Fuß, so würden auf der Grundfläche zehn mal zehn Cubicfuß, und in dem ganzen Körper 10 ⋊ 10 ⋊ 10 oder 1000 Cubicfuß Raum haben, welches die eben gegebene Erläuterung von der Eintheilung der Cubicruthen, Cubicfüsse ꝛc. hinlänglich erklären wird. Man wird hieraus überhaupt diese Regul zur Berechnung der rechtwinklichten Körper einsehen:

> **Man messe die Länge, Breite und Höhe derselben aus, und multiplicire die Zahlen dieser Maassen durch einander. Das Product giebt die Maasse des ganzen Körpers.**

§. 52.

Bey den rechtwinklichten Körpern stehen die entgegengesetzten Seiten einander parallel. Allein Körper können auch schiefwinklicht, und dennoch von sechs Flächen eingeschlossen seyn, die einander parallel liegen. Man begreift diese insgesammt unter der griechischen Benennung Parallelepipedum, welche nichts anders, als einen Körper mit parallelen Flächen andeutet, und diese Körper kommen sehr häufig auszumessen vor. Z. E. alle Mauren sind ein solches Parallelepipedum. Allein die schiefwinklichten fassen

den

den Würfel nicht ganz genau, sondern lassen, eben wie die verschobenen Parallelogrammen, wenn man sie durch Quadrate ausmessen wollte, Lücken übrig. Doch dieß macht die Sache nicht schweerer. Denn es ist in der Geometrie erwiesen; daß

Alle Parallelepipeden, wenn sie gleiche Grundflächen und Höhen haben, einander gleich sind.

Man darf also bey diesen nur ihre Grundfläche, nach der §. 35. gegebenen Regul und ihre Höhen messen, so ist das Product von den Zahlen ihrer Maassen das Maaß dieser Körper in Würfeln einer mit dem Namen des Längenmaaßes übereinstimmenden Benennung.

§. 53.

Ja diese Regul bleibt noch bey allen denen Körpern unverändert, welche überhaupt eine geradelinichte Unterfläche und eine derselben gleiche Oberfläche haben, und an den Seiten von so vielen Parallelogrammen eingeschlossen sind, als die Grundfläche Seiten hat, die aber nicht insgesammt, oder wol gar keine, eine der andern parallel sind. Eine solche Figur heißt mit einem griechischen Namen **Prisma.** Fig. 80. und 81. stellen dergleichen Körper vor: einen von der einfachsten Art, dessen Grundfläche ein Triangel, und einen vielseitigen, dessen Grundfläche ein Vieleck ist. Beyde sind verschoben. Es ist deutlich, daß eigentlich keine Würfel den Raum derselben ausfüllen können. Allein die Geometrie beweiset, daß sie einem rechtwinklichten Parallelepipedo gleich seyn, dessen rechtwinklichte Grundfläche der Grundfläche von einem solchen Prisma, die Höhe aber der Höhe desselben, gleich ist. Man kann sie demnach als solche berechnen, und gewiß seyn, daß man eben so viel körperlichen Raum in diesem Prisma habe, als in jener Figur durch die Berechnung sich finden würde.

Man nehme z. E. in Fig. 80. an, daß A B 8, C D 6, und E F 15 Fuß groß sey, so ist der Flächeninhalt der

Grundfläche, §. 36, 24 Quadratfuß, der Inhalt von dem Prisma aber 24 ⋈ 15 oder 360 cubische Fuß. In der 81sten Figur aber sey der, nach §. 37, berechnete Inhalt der Grundfläche 37 Quadratfuß, die Höhe aber sey 18 Fuß, so ist der ganze Inhalt des Körpers 37 ⋈ 18 oder 666 cubische Fuß.

§. 54.

Diese Regul gilt nun auch für die Cylinder oder Walzen, das ist, solche Körper, deren Grund- und Oberfläche zween gleiche Circul, und die von einer krummen Seitenfläche eingeschlossen sind. (Fig. 82.) Man berechnet auch hier die Grundfläche zufolge §. 39. als einen Circul, und multiplicirt das Flächenmaaß derselben durch das Maaß der Höhe. Z. E. der Durchmesser A B sey 5 Fuß, so ist der Inhalt des Circuls 19′63″. Dieser wird durch die Höhe 16′0″ multiplicirt, und giebt für den soliden Inhalt des Cylinders 314′080″. Man verfährt eben so, wenn der Cylinder, wie z. E. Fig. 83, verschoben ist, wo ich ebenfalls nur die Grundfläche durch das Maaß der Höhe E D multiplicire.

Diese Figur kömmt oft auszumessen und zu berechnen vor. Man nehme an, daß in einem Gebäude ein runder Pfeiler, der in der Dicke 3 Fuß, in der Höhe 25 Fuß hat, aufgeführt werden solle. Oder er sey von solidem Stein ausgehauen, und solle nun zu Wasser fortgebracht werden, da man seinen soliden Inhalt, und aus demselben sein Gewicht schätzen muß. Wir werden alsdenn durch keine andre, als diese Berechnung zu unserm Zweck kommen.

§. 55.

Die Fässer, in denen wir flüßige Materien aufbehalten, haben eine der Walze gewissermassen ähnliche Figur. Man wird leicht voraus sehen, daß ich aus der eben erklärten Berechnung die Reguln zur Berechnung ihres Inhalts ableiten

ableiten werde. Aber diese Reguln sind nicht hinlänglich, weil kein Faß genau die Figur eines Cylinders hat. Berechnete man es als einen Cylinder, dessen Grundfläche so groß als der Boden des Fasses, seine Höhe aber der Länge des Fasses gleich wäre, so würde man zu wenig nehmen. Wenn man es aber als den Cylinder berechnete, dessen Grundfläche dem mittlern Durchschnitt des Fasses gleich ist, so würde man zu viel bekommen. Ueberhaupt ist die Figur des Fasses so irregulär, und wird in der Bearbeitung auf so mannigfaltige Art verändert, daß man nicht erwarten kann, eine beständige und allgemeine Regul für alle Fässer zu bestimmen. Man hat indessen eine Regul angenommen, die zwar nicht bewiesen werden kann, welche aber die Erfahrung mehr, als man es billig erwarten könnte, bestättigt.

Man mißt (Fig. 84.) den Durchmesser A B des Bodens vom Fasse, und den Durchmesser C D unter der Seitenöffnung oder Spundloche C in der Mitte desselben. Man nimmt das Mittel zwischen beyden auf diese Art gefundenen Linien. Dieses bestimmt den Durchmesser einer Grundfläche, deren Inhalt durch die Länge des Fasses A E multiplicirt wird, und den soliden Inhalt des Fasses giebt.

Laßt uns also annehmen, der kleinere Durchmesser enthielte 22, der größere 26 Zoll, so würde das Mittel von beyden 24 Zoll seyn. Ein Circul mit diesem Durchmesser enthält 452''40 Quadratzoll. Nun enthalte die Länge 5 Fuß oder 60,0 Zoll. Jene Zahl durch 600 multiplicirt, giebt 27144 Cubiczoll, und da ein Quartier Hamburger Maaß 266 Cubiczoll enthält, so würde der Inhalt des Fasses 102 Quartier und 12 Cubiczoll darüber betragen.

Allein man hat hier mit Grunde ein anderes Maaß, als den Cubicfuß oder Zoll, erwählt. Gesetzt wir hätten einen Cylinder, von einer gleichen Weite und Höhe, A B (Fig. 85.) dessen

dessen Inhalt genau dem Inhalt eines Quartiers gleich wäre, und Fig. 86. stellte den Cylinder vor, dessen Inhalt dem zu messenden Fasse gleich angenommen wird, so würden wir beyde auf folgende Art vergleichen können: Man nehme von dem Cylinder (Fig. 86.) den Theil E D, welcher mit dem kleinen Cylinder einerley Höhe E C hat. Dieser würde in dem Verhältniß größer seyn, in welchem seine Grundfläche E H G größer ist als die Grundfläche des kleinen Cylinders. Dieses zu wissen darf man nur die Durchmesser der Grundflächen messen, und deren Quadratzahlen nehmen. E G sey 4mal größer als A C, so ist der Circul E H G 16mal größer als dieser kleine Circul, und der große Cylinder hält in der Höhe E C 16 Quartiere. Nun sey aber der ganze Cylinder 8mal höher als der kleine, oder als E C, so läßt sich der kurze Cylinder E D 8mal wiederholt in ihm gedenken, und also enthält der ganze Cylinder, und folglich das ihm gleiche Faß 8 $\times$ 16 oder 128 Quartiere.

Hiemit kömmt diejenige Art, die Fässer auszumessen, oder wie man es gewöhnlich nennt, zu visiren überein, welche man als die zuverläßigste und allgemeinste anwendet. Man muß dazu zuvörderst ein cylindrisches Maaß von gleicher Höhe und Weite verfertigen lassen, welches genau ein Quartier, oder Stübchen, oder sogenanntes Viertel, nach welchem man die Branntweinsfässer ausmißt, enthält. Der Durchmesser oder Höhe desselben ist die Einheit, woraus alles gemessen wird. Zu einer geschwinden Vergleichung der Grundflächen aber wird eine Seite des Maaßstabes nach denen Grundsätzen eingetheilt, welche ich in dem vierten Abschnitt erläutert habe, nämlich so, daß man auf dieselbe die Linien aufträgt, deren Quadrate, wie die Zahlen 2, 3, 4, 5 u. s. f. anwachsen. Fig. 87. stellt einen dergleichen Maaßstab vor. Dessen Theile sind ungleich, und die Linie A 1. deutet den Durchmesser des Maasses an, A 2. eine Linie, deren Quadrat oder Circul 2mal so groß, als

als die von A 1, sind, A 3. giebt einen 3mal grössern Circul an, u. s. f. Man erfährt also durch Anlegung dieser Seite sogleich ohne weitere Berechnung die Grösse der Grundflächen an den Fässern. Doch muß auch hier der Durchmesser in der Mitte der Fässer genommen, und mit dem Circul, oder nach dem Augenmaasse das Mittel zwischen beyden Puncten genommen werden. Z. E. der kleinere Durchmesser des Fasses endigte sich an 5, der grössere an 6, so würde das Mittel ohngefähr mit $5\frac{4}{5}$ zutreffen, und dieses nennt man das Maaß des reducirten Durchmessers. Allein, weil an den Fässern nicht immer die Boden gleich groß sind; so wird sehr oft noch eine Reduction der beyden Durchmesser an dem Ende nöthig, und dieser reducirte Durchmesser wird alsdenn mit dem Durchmesser des Fasses in der Mitte verglichen. Die andere Seite des Maaßstabes B C (Fig. 88.) wächst nach gleichen Theilen aus der Linie A 1. an, und dient, die Längen der Fässer mit der Höhe des Maasses zu vergleichen. Die Zahl, welche entsteht, wenn man das mit der einen Seite genommene Maaß des reducirten Durchmessers mit dem an der andern Seite gefundenen Maaß der Länge multiplicirt, giebt den Inhalt des Fasses. Jenes sey z. E. an einem Stück Brannteweín $7\frac{1}{2}$, dieses 12, so ist der Inhalt des ganzen Fasses 90 Viertel. Jenes sey $6\frac{1}{4}$, dieses $9\frac{1}{2}$, so ist der Inhalt $59\frac{3}{8}$ Viertel.

Man hat einen andern Weg die Fässer zu visiren erwählt, welcher viel leichter im Gebrauch ist, aber eigentlich nur bey Fässern von einer ganz ähnlichen Figur statt hat, und also an denen Orten sehr wol eingeführt werden kann, wo man den Wein oder Branntewein in einerley Fässer füllt, aber in Handelsstädten, wo die Fässer oder Fustagen aus so vielen Orten, und von so verschiedener Figur zu messen vorkommen, nicht gebraucht werden kann, wofern man nicht eben so viele Maaßstäbe, als verschiedene Figuren von Fässern hat.

Der

Der Grundsatz, nach welchem dieser Maaßstab ausgearbeitet wird, von welchem wir unten umständlicher reden werden, ist dieser: Daß sich die Körper von ähnlicher Figur, wie die Cubiczahlen ihrer gleichnahmigen Seiten verhalten. Man läßt also zuvörderst ein Faß (Fig. 89.) ausarbeiten, welches eine den größern Fässern, die man visiren will, vollkommen ähnliche Figur hat; und genau ein gewisses Maaß, z. E. ein Quartier, Stübchen oder Viertel, enthält. Man nimmt die Linie A B, welche von der Seitenöffnung A bis in die Ecke des Fasses D reicht, zur Einheit an, und trägt auf den Maaßstab C D die Zahlen 2, 3, 4 &c. in solche Puncte, wo der Cubus 2, 3 oder 4mal größer wird, als der Cubus von A B. Wenn man nun den Maaßstab in einem größern Fasse, (Fig. 90.) von dem Spundloche in die Ecke B stößt, so hat man das Maaß desselben, ohne weitere Rechnung, an der Zahl, z. E. 60, welche sich bey A an der inwendigen Seite des Fasses findet. Weil aber das Spundloch nicht immer in der Mitte des Fasses liegt, so mißt man auch nach C hin, und wenn sich ein Unterschied zwischen beyden Maassen findet, nimmt man nach dem Augenmaasse die Zahl, die an dem Maaßstabe in der Mitte zwischen beyden Puncten liegt.

Man nennt den nach diesen Gründen eingerichten Visirstab den cubischen, jenen aber den cylindrischen Visirstab.

Anmerkung.

Wiewol in der ersten Art, die Fässer zu visiren, so vieles willkührlich, ohne Beweis, angenommen wird, so bestättigt doch die Erfahrung ihre Richtigkeit hinlänglich. Ich darf hier nur diejenige anführen, welche im Jahre 1761. hieselbst auf Befehl, und in Gegenwart der Herren Deputatorum eines hochpreislichen Commercii angestellt ward, um sich von der Zuverläßigkeit dieser Methode zu versichern. Es wurden zehn Fässer von verschiedenen Figuren, deren einige noch dazu durch Fehler der Faßbinder ganz unförmig waren, mit Wasser sorgfältig aus dem Maasse einer französischen Velte oder Viertels angefüllt, und von den beeidigten Rojern nach vorbeschriebener Art gemessen, ohne daß ihnen der eingemessene

sene Inhalt bekannt war, und bey keinem wich das durch diesen Visirstab gefundene Maaß auch nur um ein halbes Viertel von dem wahren Maasse ab. Der cubische Visirstab traf aber nur bey gewissen Französischen ganzen und halben Brannteweinsstückfässern zu, für welche eigentlich er eingerichtet war, und gab für die Fässer von einer andern Figur bald mehr, bald weniger, als die wahre Maasse.

Es ist ein sehr gewöhnlicher Betrug bey den Fässern, in welchen der Brannteweiu von den ersten Verkäufern aus dem Lande gesandt wird, daß die Bodenstäbe in dem Winkel, wo sie in die Seitenstäbe des Fasses einpassen, so abgeschärft werden, daß der cubische Visirstab so viel weiter in diese Vertiefung geht, daß derselbe an dem Spundloche, wo das Maaß genommen wird, leichtlich ein Viertel, ja noch mehr über dasjenige angiebt, was wirklich in dem Fasse enthalten ist. Bey dem cylindrischen Visirstabe, welcher nicht in die Ecken des Fasses mißt, ist dieser Betrug gar nicht möglich.

Le Sauveur, ein französischer Mathematicus, der mit dem Anfang dieses Jahrhunderts gestorben ist, hat den cylindrischen Visirstab dadurch zu erleichtern gesucht, daß er an demselben die Logarithmen der Zahlen des Maasses trug. Doch sind hier nur die ersten Zahlen nöthig. Alsdenn darf man nur die Zahlen, die der Maaßstab an denen Orten, wo sich die Durchmesser und die Länge des Fasses endigen, zeigt, zu einander addiren, und eine kurze Tabelle zeigt für die gefundene Summe den Inhalt des Fasses, den man sonst durch die Multiplication finden würde. Man sieht wol, daß diese Erleichterung, wie überhaupt alle Vortheile, welche die Logarithmen geben, nicht zu verachten ist. Man nennt diesen den logarithmischen Visirstab. Er ist in Bions Mathematischer Werkschule, so wie der Cylindrische und Cubische, umständlich beschrieben.

Zuverläßige Reguln zur Ausmessung solcher Fässer, die nicht voll sind, wenn sie nicht anders als liegend können gemessen werden, hat zuerst Herr Prof. Lambert in seiner Visirkunst im ersten Theil seiner Beyträge zum Gebrauch der Mathematik angegeben. Stehende, und zum Theil ausgeleerte Fässer theilt man in verschiedene Cylinder, oder vielmehr Kegelstücke, die etwa den achten oder zehnten Theil von der Höhe des ganzen Fasses haben, und berechnet sie aus ihrem mittlern Durchmesser.

Die Berechnung des Cylinders, welche so nützlich in dem Visiren der Fässer ist, beweiset sich eben so nützlich in

der

der Berechnung des rohen und noch runden Bauholzes. Doch sind hier die Reguln derselben viel leichter in der Anwendung, und keine so mühsame Reductionen der Durchmesser nöthig.

§. 56.

Ich muß noch der Ausmessung der Pyramiden und Kegel erwähnen.

Jene sind Figuren, welche eine geradelinichte Grundfläche haben, und von so vielen Triangeln, als diese Seiten hat, eingeschlossen sind, die in einen Punct zusammen gehen. (Fig. 91.)

Diese haben einen Circul zur Grundfläche, und eine krumme Seitenfläche, welche oben in einen Punct zusammen geht. Man wird dieselben sich deutlicher vorstellen können, wenn man einen Faden in einem Punct C befestigt, und denselben um einen darunter gelegten Circul A B herumführt. Der Raum, welcher auf diese Art eingeschlossen wird, ist ein Kegel. (Fig. 92.) Führt man den Faden um eine geradelinichte Fläche herum, so ist es eine Pyramide.

Wenn gleich wenig Fälle vorkommen, in denen Körper von dieser Art an und vor sich selbst auszumessen wären, so kommen doch die Pyramiden oft als Theile anderer Körper vor, welche, wenn man sie in Parallelepipeda und Prismata eingetheilt und diese berechnet hat, noch eine Pyramide übrig lassen, welche man besonders berechnen muß. Die Kegel aber sind Körper, auf welche man oft gewisse andre Körper von einer noch schweerern Figur reductirt, um sie alsdenn berechnen zu können. Es ist leicht, sie zu berechnen, nach dem man Prismata und Cylinder zu berechnen gelernt hat. Denn es ist in der Geometrie erwiesen:

Daß die Pyramide der dritte Theil von einem Prisma, und der Kegel der dritte Theil von einem Cylinder sey, deren jenes mit der Pyramide, dieser mit dem Kegel gleiche Grundfläche und Höhe hat.

Man

Man darf sie also nur erst aus ihrer Grundfläche und Höhe als Prismata oder Cylinder berechnen, und von dem gefundenen Inhalt den dritten Theil durch die Division suchen, oder, welches kürzer ist, das Maaß ihrer Grundfläche durch den dritten Theil des Maasses ihrer Höhe multipliciren.

Z. E. die berechnete Grundfläche der Pyramide, (Fig. 91.) oder des Kegels, (Fig. 92.) enthielte 115 Quadratzoll, und die Höhe CD 21 Zoll; so würde der solide Inhalt von beyden 7 × 115 oder 805 Cubiczoll betragen.

§. 57.

Ich habe bisher nichts von Berechnung der Fläche der Körper erwähnt, und ich glaube in der That, keine besondere Reguln für die ebenen Flächen an dem Parallelepipedum, dem Prisma und dem Cylinder anführen zu dürfen. Die Natur dieser Flächen und die Reguln, nach welchen man sie berechnet, verändern sich dadurch nicht, daß man sie hier als Seitenflächen gewisser Körper betrachtet. Man wird sie auch hier, wie überhaupt, einzeln aus ihren Grundlinien und Höhen berechnen müssen. Gewisse kleine Vortheile, da man z. E. bey dem rechtwinklichten Parallelepipedum nur die Höhe durch den Umriß der Grundfläche multipliciren darf, um alle vier Seitenflächen auf einmal zu haben, lassen sich dabey leicht einsehen. Nur muß ich einige Reguln zur Berechnung der krummen Flächen einiger runder Körper hier beybringen.

Die Grund- und Oberfläche des Cylinders werden, wie sonst Circul, berechnet. Um die Seitenfläche eines rechtwinklichten Cylinders zu finden, multiplicirt man dessen Umriß durch die Höhe.

Die Seitenfläche des Kegels wird als ein Triangel berechnet, der zur Grundlinie den Umriß des Kegels,

und zur Höhe die Seite desselben hat. Man sucht also jenen aus dem Durchmesser der Grundfläche, (§. 39.) und multiplicirt dessen Maaß durch die Hälfte der Seite.

§. 58.

Jetzt werde ich von der Kugel und ihrer Berechnung reden können, einem Körper, von welchem der deutliche Begriff dieser ist: **Die Kugel entsteht, wenn man einen halben Circul sich um seinen Durchmesser herum bewegen läßt.** Alsdenn stehen in der Oberfläche derselben alle Puncte von dem Mittelpuncte derselben gleich weit ab. Ein Kennzeichen der Kugel, welches sie von allen runden Körpern unterscheidet.

Die Oberfläche der Kugel ist viermal so groß, als der größte Circul der Kugel, wie Archimedes erwiesen hat. Diesen findet man aus dem Durchmesser derselben, und multiplicirt dessen Inhalt durch 4. Oder weil doch, um diesen Circul zu finden, der Umriß durch den vierten Theil des Durchmessers multiplicirt wird, so findet man, anstatt dieses Product aufs neue viermal zu nehmen, die **Kugelfläche, wenn man den Umriß derselben auf einmal durch das ganze Maaß des Durchmessers multiplicirt.** Z. E. der bekannte Umriß unserer Erdkugel ist 5400, der Durchmesser 1720 Meilen. Man findet den ganzen Flächeninhalt derselben in Quadratmeilen, in der Zahl 9,288000, dem Product dieser beyden Zahlen.

Der körperliche Inhalt einer Kugel wird durch folgende Regul am leichtesten gefunden:

Man multiplicirt die Oberfläche der Kugel durch den sechsten Theil des Radius.

Z. E. der solide Inhalt der Erdkugel wird in cubischen Meilen gefunden, wenn man den vorhin berechneten Inhalt ihrer

ihrer Oberfläche 9,288000 durch $286\frac{2}{3}$ Meilen, den sechsten Theil ihres Durchmessers, multiplicirt. Das Product ist 2662,550000 cubische Meilen.

Anmerkung.

Man hat noch andre Reguln die Kugel zu berechnen, nämlich aus dem Verhältnisse der Kugel zum Cubus des Durchmessers, welches dem Verhältnisse 157:300 ziemlich nahe kömmt. Oder man berechnet den Cylinder, dessen Durchmesser und Höhe dem Durchmesser der Kugel gleich ist, und nimmt davon zwey Drittheile. Allein die zuerst erklärte Methode hat den Vorzug, daß sie uns auch jedesmal die Kugelfläche bekannt macht, welche zu kennen in den meisten Fällen eben so wichtig ist, als den Inhalt der Kugel zu wissen.

Ich muß hier überhaupt anmerken, daß ich, wie bisher, so auch in dem Verfolge dieses Buches von verschiedenen Methoden, die für die mathematische Praxis erfunden sind, jedesmal nur die brauchbarste oder leichteste erläutern werde, weil gewöhnlich mehrere Reguln, die zu einem Zwecke führen, nur Verwirrung machen; es sey denn, daß die schweerere angeführt werden müsse, um die leichtere, welche oft nur eine Abkürzung derselben ist, zu erläutern, und die Gründe derselben anzugeben.

Alle bisher erklärte Berechnungen runder Körper geben den Inhalt derselben nicht genau, weil man den Inhalt derer Circul nicht vollends genau berechnen kann, welche in denselben mit zu berechnen vorkommen. Wir würden also ungemein viel in der Geometrie gewinnen, wenn wir den Circul ganz genau berechnen könnten, und es zeigt sich hier vollends deutlich, welch einen nützlichen Zweck diejenigen sich vorgesetzt, die uns durch ihre Rechnung in den Stand gesetzt haben, den Circul so genau, als thunlich und nützlich ist, zu quadriren, und wie vortheilhaft es seyn würde, wenn noch Hoffnung wäre, zu einer leichten und ganz genauen Quadratur desselben zu gelangen. Indessen läßt sich die Natur desselben nicht ändern, und wir müssen uns mit derjenigen Genauigkeit begnügen, welche uns die so oft angeführten Berechnungen geben.

Man hat auch Reguln, die Fläche sowol, als den soliden Inhalt von Stücken der Kugel zu berechnen. Allein diese zu erklären, ist für uns zu weitläuftig, und von der Absicht dieses Buchs zu sehr entfernt.

Es ist nothwendig noch hinzuzusetzen, daß dieser Theil der Geometrie, welcher die Ausmessung der soliden Räume abhandelt, in mathematischen Handbüchern die Stereometrie gewöhnlich benannt werde.

§. 59.

Allein es sind nicht immer Körper von einer so ordentlichen Figur, als die bisher beschriebenen, welche man auszumessen wünscht. Die höhere Geometrie lehrt noch viele Reguln zur Berechnung der Körper von andern Figuren, die aber nach einem gewissen Gesetze bestimmt seyn müssen, z. E. derer Körper, welche durch Umdrehung einer Ellipse, und anderer krummer Linien beschrieben werden. Allein diese so wenig, als die gemeine Geometrie kann Reguln zur Berechnung solcher Körper angeben, welchen das Willkühr der Menschen bald diese, bald jene Figur giebt. Man kann indessen den Inhalt derselben auf nachfolgende Art erfahren. Man lasse sich ein ausgehöltes Parallelepipedum (Fig. 95.) verfertigen. Man fülle dasselbe mit Wasser so hoch, bis man gewiß ist, daß der Körper dadurch werde bedeckt werden. Z. E. bis A. Nun lege man den Körper hinein, und merke in B an, bis wie weit das Wasser steige. Der Raum, den das Wasser nunmehr anfüllt, und den man aus der Fläche von dem holen Parallepipedum und der Höhe A B berechnen kann, ist dem soliden Raum des Körpers gleich. Doch, da nicht alle Körper das Wasser vertragen können, und oft zu schweer sind, als daß man sie so heben und versetzen könnte, so hat man ein anderes Mittel, den Raum der Körper aus ihrem Gewichte, und dem Gewichte, das sie im Wasser verlieren, zu schätzen, erfunden, welches zu erklären der Ort in der Hydrostatik ist.

Sechs-

Sechster Abschnitt.

Von der Vergleichung der soliden Figuren mit einander.

§. 60.

Es ist eben so wichtig für uns, wenn wir die Körper richtig und geschwind mit einander vergleichen können, ohne ihren ganzen Inhalt vorher berechnen zu dürfen, als es in Ansehung der Flächen ist. Es sind auch hier nicht weniger schädliche Irrthümer bey den Halbwissenden im Gange, als wir oben bey den Flächen angemerkt haben. Das Augenmaaß verführt hier noch mehr, und wir sehen überhaupt die Körper für kleiner an, als sie wirklich sind. Wenn man zwo Kugeln neben einander legt, deren eine dreymal so groß im Durchmesser ist, als die andre, so wird es denen, die nach dem Augenmaaß urtheilen, unglaublich scheinen, wenn man ihnen sagt, daß die erste 27mal größer als die andre sey. Indessen verhält es sich doch in der That also, und Euklides, dem noch die später vom Archimedes entdeckten Sätze, die zur Berechnung der Kugeln führen, fehlten, bewies doch schon, daß

> überhaupt alle ähnliche Körper sich wie die Würfel ihrer gleichnahmigen Seiten, und insbesondere, daß die Kugeln sich wie die Würfel ihrer Durchmesser verhalten.

Dieß setzt uns in den Stand, eine geschwinde Vergleichung derselben anzustellen. Fig. 93. und 94. stellen zwo ähnliche Körper, das ist solche vor, an denen alle Winkel gleich sind, und die Seitenlinien sich auf einerley Art verhalten. AB (Fig. 93.) verhalte sich nun zu a b, (Fig. 94.)

 wie

wie 5 zu 2, so verhält sich der erste Körper zu dem andern, wie 125 zu 8. Oder es sey der Durchmesser der Kugel A (Fig. 95.) 7 Zoll, der Durchmesser der Kugel B (Fig. 96.) 3 Zoll groß, so verhalten sich diese Kugeln wie 343 zu 27. Wir haben schon oben §. 53. eine Anwendung dieses Satzes auf den cubischen Visirstab gemacht, wo die verglichenen Linien nicht Seiten der Figur des Fasses sind, sondern nur eine ähnliche Lage in demselben haben, allein man versteht auch diese Linien unter dem Ausdruck: **gleichnahmige Seiten**, und in diesem Verstande sind auch die Durchmesser der Kugeln gleichnahmige Seiten derselben.

§. 61.

Wie man nun diesem zufolge die Körper sehr leicht vergleichen kann, die schon ihre bestimmte Figur haben, und dabey einander vollkommen ähnlich sind, so leitet dieses schon gewissermassen darauf, wie man aus einem Körper einen andern bestimmen könne, der ein gewisses Verhältniß zu jenem habe:

> **Man muß eine der Seiten des ersten messen, und dem andern eine gleichnahmige Seite geben, deren Maaß so gewählt wird, daß die Cubiczahlen beyder gleichnahmigen Seiten das gegebene Verhältniß haben.**

Z. E. man hätte eine Kugel von bestimmter Größe und Gewicht, 48 Pfund, und nun wollte man eine 8mal kleinere und leichtere haben. Dieß wird erhalten, wenn man von dem Durchmesser der Kugel die Hälfte nimmt. Denn nun sind die Cubiczahlen der Durchmesser 8 und 1, und dieses ist das Verhältniß der Kugeln. Um Kugeln in dem Verhältniß 64 : 27 zu haben, würde man dem Durchmesser der

kleinen

kleinen $\frac{1}{2}$ von dem Durchmesser der größern geben. Man wird auf eben diese Art in allen denen Fällen verfahren, in welchen man bey den Zahlen des Verhältnisses ihre cubische Wurzel kennt. Allein dieser Zahlen sind nur wenige in Vergleichung derer, welche keine cubische Wurzel haben. Man nehme z. E. den Fall, man wollte eine Kugel haben, die doppelt so groß und schweer, als eine andre sey; so müßte ihr Durchmesser so angenommen werden, daß die Cubiczahl seines Maasses genau die Zahl 2 gäbe. Dieß ist nicht anders als durch Ausziehung der Wurzel in Decimalbrüchen möglich. Man findet durch diese Rechnung 1,25992, und also muß man nach dieser Zahl den Durchmesser vergrößern, um eine zweymal größere Kugel zu haben. Ich verweise die Erläuterung dieser etwas schweeren Rechnung in den Anhang. Ich will hier nur zween kürzere Wege anweisen, zu der Kenntniß einer solchen Wurzel oder Linie zu gelangen. Den ersten geben die Logarithmen an die Hand. Man theile den Logarithmen der Zahl, deren Cubicwurzel man haben will, durch 3, und suche diese so genau, als man sie nach den Tabellen unter der größten Characteristik finden kann, auf. Die Zahl, die man bey der eigenen Characteristik des Logarithmen antrifft, ist eine ganze Zahl, alle übrigen sind Decimalen. Z. E. der Logarithme der Zahl 3 durch 3 dividirt, ist 0,1590403, welcher zwischen den Logarithmen von 1 und 2 fällt. Die Hauptzahl ist also 1. Allein man findet diesen Logarithmen unter der Characteristik 5 ziemlich genau bey 1,44225. Die Wurzel von 3 ist also beynahe 1,44225. Auf eben die Art findet man für 15 die cubische Wurzel 2,46621. Wenn man aber Körper in dem Verhältnisse 2:5, oder einem jeden andern verändern will, so muß man für den Bruch $\frac{5}{2}$ den Logarithmen auf die, §. 30. der Arithm., erklärte Art suchen, diesen durch 3 theilen, und für diesen Logarithmen die zu ihm gehörende Zahl in den Tabellen so genau, als möglich, aufsuchen. Hier ist der Logarithme von $\frac{5}{2}$ = 0,3979400,

das Drittheil desselben = 0,1326467, und hiebey wird die Zahl 1,36034 gefunden.

Ein anderes Mittel, die Linie selbst ohne Rechnung zu finden, giebt der Proportionalcircul. Wir haben auf demselben eine sogenannte cubische Linie, auf welcher die Ziefern 1. 2. 3 ꝛc. nicht diese Zahlen selbst, sondern deren cubische Würzeln, das ist Linien darstellen, deren Würfel sich wie die Zahlen 1. 2. 3. verhalten. Man bringt alsdenn die gegebene Seite von 2 Theilen zwischen den Ziefern 2 auf beyden Schenkeln des Proportionalcirculs, und nimmt sodann mit dem Circul die Linie zwischen 5 und 5. Diese ist die Seite eines Körpers z. E. einer Kugel, die sich zu dem andern Körper oder Kugel, wie 5 zu 2, verhält. Man kann nach diesen Linien Kugeln von einerley Materie, deren Gewicht wie der Raum zunimmt, in jedem Verhältnisse verändern. Will man z. E. den Durchmesser einer 48pfündigen eisernen Kanonkugel wissen, wenn man den von einer 8pfündigen kennt, so trägt man den letztern zwischen den Ziefern 8, und sucht alsdenn die Linie zwischen den Ziefern 48, auf beyden Platten des Proportionalcirculs. Nach eben diesen Gründen wird für den Gebrauch der Artillerie der Caliberstab zugerichtet.

Anmerkung.

Alle diese Zahlen sind auf dieser Linie des Instruments durch Rechnung bestimmt. Allein die Rechnung läßt immer etwas übrig, und dem Verstande geschicht hier kein Genüge, wenn er nicht eine Linie findet, von welcher geometrisch erwiesen werden kann, daß sie die Aufgabe genau erfülle, und die Seite eines Würfels oder irgend eines andern Körpers abgebe, welchem gar nichts mangele, um das gesuchte Verhältniß zu haben. Dieses suchten die alten griechischen Mathematiker in der Aufgabe zu leisten, welche bey ihnen die Delische heißt, und ihnen fast eben so viel Mühe gemacht hat, als die so berühmte Quadratur des Circuls. Der Grund dieser Benennung liegt in folgender Erzählung: Bey einer Pest, die in Griechenland wütete, ward das Orakel des Apollo

in der Insul Delos um Rath gefragt, wie derselben abzuhelfen wäre. Dieses aber verlangte, man sollte den Altar des Apollo zu Delos verdoppeln. Nun war dieser Altar ein genauer Würfel. Man achtete nicht auf diesen Umstand, sondern glaubte der Absicht des Gottes ein Genüge zu thun, da man ein anderes gleich grosses Stück an denselben mauerte. Die Pest dauerte dem ungeachtet fort, und nun sahe man allerest den Sinn des Orakels ein, daß der Altar doppelt so groß werden, aber dabey die Figur eines Würfels behalten sollte. Man bedachte sich aber nicht lange, und ohne Leute von Einsicht um Rath zu fragen, glaubte man, ihn doppelt so groß zu machen, da man ihn doppelt lang, breit und hoch machte. Die Pest dauerte noch fort, und nun ward man endlich genöthigt, sich an Männer zu wenden, welche die Sache verstunden. Plato lößte, wie es heißt, sie am ersten auf. Man verdoppelte den Altar nach seiner Vorschrift, und die Pest hörte nun auf. So lautet die Erzählung, an deren Wahrheit man deßwegen zweifeln muß, weil man keine Erwähnung dieser Pest zu Platos Zeiten, und des Mittels, wodurch sie endlich gehoben worden, bey den ältern Schriftstellern findet. Man kann indessen auch von ihr sagen: Ist sie nicht wahr, so ist sie doch gut ausgedacht. Wenigstens macht der Eigensinn der Griechen, eine für sie so wichtige Sache ohne den Rath kunstverständiger Männer zweymal zu versuchen, dieselbe nicht unwahrscheinlicher. Ein Eigensinn, von dem die Beyspiele gemein genug sind. Indessen haben Plato und die größten Mathematikverständige Griechenlands sich eifrig bemüht, diese Aufgabe aufzulösen. Wir haben wenigstens zehn Auflösungen aus dem Alterthum. Wie viele aber sind nicht vielleicht verloren gegangen, von denen wir nichts wissen? Unter denen, die wir haben, sind einige mechanisch, das ist, so beschaffen, daß in ihnen alles auf die Richtigkeit der Instrumente und aufs Auge allein ankömmt; andere sind zwar geometrisch, oder solche, in denen alles aus der Natur der Zeichnung fliesset, aber so schweer, daß hier der Ort nicht ist, sie zu erläutern. Nur des Plato Auflösung ist leicht genug, in der Ausführung aber mechanisch. Man setzt zwo Linien A B, A E (Fig. 97.) in dem Verhältnisse, das die Würfel oder Körper zu einander haben sollen, rechtwinklicht zusammen, und verlängert sie ins Kreuz nach Gefallen. Nun legt man ein Winkelmaaß so an A an, daß B C durch den rechten Winkel C geht. Ein zweytes Winkelmaaß wird als-

 denn

denn an das erste gelegt, und beyde so lange gerückt, bis auch dieses mit seiner Spitze an der Linie B D liegt, und der längere Schenkel desselben durch A geht. Alsdenn sind A B, B C, B D und B E in einem fortgehenden Verhältnisse, und nun verhält sich vermöge der Natur einer solchen Progreßion der Cubus von A B zu dem Cubus von B C wie A B zu B E. Es kömmt überhaupt hiebey auf die Erfindung von zwo mittlern Proportionallinien zwischen zwo gegebenen Linien an, und die Aufgabe heißt daher auch gewöhnlich die Aufgabe der Erfindung von zwo mittlern Proportionallinien.



Allgemeine

Allgemeine Erläuterung

der

Algebra,

ihrer Absichten und ihrer Brauchbarkeit

zum

Nutzen und Vergnügen

des bürgerlichen Lebens.

Man wird bey der Algebra noch weniger, als bey der Arithmetik und Geometrie eine vollständige systematische Abhandlung derselben in diesem Buche erwarten. Ich weiß, daß sie Reiz genug für die Wißbegierde, und Nutzbarkeit genug für die Geschäfte solcher Personen hat, welche die Mathematik überhaupt lieben, um ihr ernstliches Nachdenken zu verdienen. Allein noch sind die Vorurtheile zu groß, die man von ihrer vermeinten Schwierigkeit, Dunkelheit und eingeschränktem Nutzen hegt, und wenn sie es auch nicht wären, so würde mich die Weitläuftigkeit der nützlichen Wahrheiten, die sie enthält, von einer vollständigen Abhandlung derselben hier abhalten. Ich werde mich bloß bemühen, eine allgemeine Einsicht in die Natur dieser Wissenschaft, ihre eigentliche Absichten, und die Vortheile, die man von ihr würde erwarten können, wenn sie mehr auf die Geschäfte des gemeinen Lebens angewandt würde, zu geben, und die Wege zu weisen, wie man sie auch durch eignen Fleiß aus Büchern, die eigentlich für diesen Zweck geschrieben sind, erlernen könne. Es ist wahr, daß die bekanntesten Schriften sie in eine solche Dunkelheit hüllen, und ihren wahren Zweck und Nutzen so sehr verbergen, daß man nicht anders als glauben kann, ihr Endzweck bestehe bloß in einer gewissen künstlichen Versetzung der Buchstaben, oder höchstens in unfruchtbaren tiefsinnigen Betrachtungen über eine gewisse Art Zahlen, woraus man nach den dunkeln Beschreibungen, die davon gegeben werden, und ihren barbarischen Namen, Zens, Zensicubus, Zens de Zens u. dergl. m. nicht weiß, was man machen soll. Kömmt es zu Exempeln von algebraischen Aufgaben, so enthalten dieselben solche Fälle, die man im Ernst gar nicht als im gemeinen Leben vorkommend annehmen, und einigen Nutzen derselben einsehen kann. Indessen ist die einzige gute Methode, diese Wissenschaft zu lernen und zu erklären, wenn man sie in einer fortgehenden Reihe von Exempeln treibt, in denen sich dem Verstande eine Wahrheit nach der andern entwickelt,

wickelt, und dann die allgemeinen Reguln für ähnliche Fälle daraus ableitet.

Sie mit gutem Erfolge zu treiben, wird nichts als eine hinlängliche Fertigkeit in der Bruchrechnung, und insonderheit in Decimalbrüchen, wenn man aber etwas weiter kömmt, in der Ausziehung der Wurzeln erfodert. Vielleicht aber liegt eben hierinn der Grund, warum sie so wenig Freunde findet, weil eben die Bruchrechnung in den meisten Rechenschulen so verdrießlich, und mit so weniger Belehrung für den Verstand getrieben wird.

§. 1.

Es giebt Fälle, in denen man Zahlen unter solchen Bedingungen berechnen soll, für welche die gemeine Arithmetik keine hinlängliche Reguln hat. Wir wollen folgenden Fall zum Beyspiel nehmen:

> Drey Personen sind 5724 Thlr. schuldig. Vermöge gewisser Verpflichtungen muß der erste zweymal mehr, als der zweyte, dieser aber Zweydrittheile weniger, als der dritte, bezahlen. Die Frage ist, wie viel ein jeder beyzutragen habe?

Will man hier durch die Arithmetik zum Zwecke kommen, so muß man die sogenannte Regulam Falsi anwenden. Man nimmt nämlich die erste Zahl, die einem einfällt, als die gesuchte Zahl an. Man findet, daß man gefehlt habe, aber eben aus diesem Fehler findet man durch eine gewisse Proportion die wahre. Gesetzt also, der Theil des zweyten sey 100, so ist der Theil des ersten 200, der Theil des dritten 300. Diese zusammen aber machen nur 600 in der Summe, die doch 5724 ausmachen sollte. Allein es bleibt doch gewiß, daß, wie jene Summe 600 sich zu ihren Theilen verhält, so auch diese 5724 sich zu ihren Theilen verhalten müsse. Man hat also gewisse Verhältnißzahlen, aus welchen man durch die Regul de Tri, welchen von den gesuchten Theilen man will, finden kann. Man setze also:

600

600 : 300 = 5724 : 2862 (dem Theil des 3ten.
Nun ist der Theil des 2ten = 954
und der Theil des 1sten = 1908

Die Summe von allen = 5724.

§. 2.

Wer indessen von dieser Regula Falsi nichts weiß, wie sie denn in der That in den meisten Rechenbüchern fehlt, der wird durch eigenes Nachdenken sich sehr bald auf folgende Art helfen können. Er wird einsehen, daß der Theil des zweyten, als der kleinste, in dem Theil des ersten zweymal, in dem Theil des dritten dreymal enthalten sey, und folglich von der ganzen Summe sechs Theile gemacht werden müssen, von welchen der erste zwey, der zweyte einen, und der dritte drey zu bezahlen habe. Es kömmt also nur darauf an, diesen sechsten Theil der ganzen Summe 5724 zu finden. Er ist 954.

Indessen macht es dem Verstande, wenigstens bey etwas mehr verwickelten Fällen, Mühe, diese Ueberlegungen so lange fortzusetzen, ohne etwas Sinnliches zu haben, an dem die Vorstellung haften könne. Freylich ist die Sache noch nicht bekannt, und also kein Bild oder Zeichen, das sie eigentlich ausdrückte, zu finden. Allein gesetzt, wir beliebten das Zeichen x, um uns dabey immer an den unbekannten Theil der zweyten Person zu erinnern, so wäre es eine verständliche Wahrheit, die in den Bedingungen der Aufgabe läge, daß:

x und 2 mal x und 3 mal x 5724 ausmachten,

oder daß $x + 2x + 3x = 5724$.

Dieß ist aber eben so viel gesagt, als daß:

$$6x = 5724.$$

Woraus wieder folgt, daß x dem sechsten Theil von 5724 gleich sey, oder daß

$$x = \frac{5724}{6} \text{ das ist } = 954$$

Nun

Nun ist 2 x der Theil des ersten = 1908
und 3 x der Theil des dritten = 2862

und die Summe von allen = 5724

Ich will ein zweytes Exempel beyfügen:

2) Ein Mann hinterläßt bey seinem Tode eine schwangere Frau, und macht die Verordnung, daß, wenn sie einen Sohn zur Welt bringen würde, dieser $\frac{2}{3}$ von seinem Vermögen, die Mutter $\frac{1}{3}$ haben solle. Brächte sie aber eine Tochter zur Welt, so solle diese $\frac{1}{3}$, und die Mutter $\frac{2}{3}$ haben. Nun kömmt sie mit Zwillingen, einem Sohn und einer Tochter, nieder. Die Frage ist: wie das Testament zu erfüllen, und das Vermögen, welches zusammen 53858 Thlr. beträgt, zu theilen sey?

Bey einigem Nachdenken sieht man wol, daß des Vaters Wille eigentlich sey, daß der Sohn doppelt so viel, als die Mutter, diese aber doppelt so viel, als die Tochter, bekommen solle, daß man folglich sieben Theile von dem Vermögen machen, und einen der Tochter, zween der Mutter, vier dem Sohne geben müsse. Der siebende Theil des Vermögens aber wird durch die Division gefunden.

Man hat aber einen sichern Leitfaden in diesen Ueberlegungen, wenn man sogleich den Theil der Tochter durch irgend ein selbstgewähltes Zeichen ausdrückt. Dieses Zeichen mag x seyn, weil es nun einmal das gewöhnlichste ist. Dann geben die Bedingungen der Aufgabe folgendes an:

Ist der Theil der Tochter $= x$
so ist der Theil der Mutter $= 2x$
und der Theil des Sohnes $= 4x$

Folglich $x + 2x + 4x = 53858$
Das ist $7x = 53858$
Folglich $x = \frac{53828}{7} = 7694$

Der

Der Theil der Mutter 2 x = 15388
Der Theil des Sohnes 4 x = 30776

Die Summe von allem = 53858

Man kann aus diesen leichten Exempeln schon das Wesentliche der Algebra kennen lernen, welches darinn besteht: **Eine Größe sey unbekannt, allein es werden gewisse Bedingungen angegeben, unter welchen sie einer andern bekannten Größe gleich werden kann, so werden diese Bedingungen in einer sogenannten Gleichung so deutlich, als möglich, ausgedruckt, und aus dieser Gleichung nach und nach diejenige entwickelt, welche die unbekannte Größe in einer genauen Gleichheit mit einer ganz bekannten Größe ausgedruckt.**

§. 3.

Man richtet sich bey dieser Entwickelung der unbekannten Größe hauptsächlich nach folgenden vier Grundsätzen, welche überaus deutlich sind, und deren Wahrheit allgemein erkannt ist:

Gleiches zu gleichem hinzugethan,
Gleiches von gleichem abgezogen,
Gleiches durch gleiches multiplicirt,
Gleiches durch gleiches dividirt, giebt gleiche Größen.

Man betrachtet aber überhaupt die Größen auf eine allgemeinere Art, als man es sonst gewohnt ist, und giebt, wenn man sie neben einander ordnet, zugleich auf die Beziehungen Acht, die sie auf einander haben. Man hat dafür die Zeichen + und — gewählt, die man gewöhnlich plus und minus ausspricht, von denen das leztere nicht allemal einen Mangel, sondern bloß dieses bedeutet, daß unter mehreren Größen diejenige, welche — vor sich hat, in einem ganz entgegengesetzten Verstande, als die andre, zu nehmen sey. Z. E. wenn ich + 400 — 100 schreibe, und

ich

ich verstehe unter + 400 so viel Thaler, die ich besitze, so bedeutet — 100 eine andere Summe, die ich schuldig bin, oder die auf irgend eine andre Art von meinem Vermögen abgeht. Sind aber jene 400 Thlr. Schulden, so sind diese — 100 Geld, das ich besitze, oder, das ein andrer mir schuldig ist. Alsdann hebt eins von diesen von dem andern so viel auf, als es selbst groß ist. In dem ersten Fall ist der Belauf meines baaren Geldes, und in dem zweyten der Belauf meiner Schulden nicht 400, sondern 300 Thlr., und wenn ich zu + 100 rechne — 100, so hebt eines das andre ganz auf. Ist von demjenigen, was mit — bezeichnet ist, mehr da, als von dem, was mit + bemerkt ist, so hebt das letztere nur einen Theil von dem erstern auf. Habe ich — 400 und + 300, so bleiben — 100 nach. Hat bey jenen das Zeichen (—) einen eigentlichen Mangel angedeutet, so fehlen, nach Abrechnung der + 300, noch immer 100. Und ich kann hier mit Grunde sagen, daß hier 100 weniger als nichts gerechnet werden müssen. Z. E. ein Mann, der 300 Thlr. besitzt, und 400 dagegen schuldig ist, wird mit Grunde sagen können: ich habe 100 Thlr. weniger, als nichts. Doch hat das Zeichen — nicht immer die Bedeutung eines Mangels. Gesetzt, einer rechnete seine Schulden auf, und käme bis zu der Summe 300, die er bis dahin mit dem Zeichen (+) bemerkte, rechnete aber nun auch seine Baarschaften zusammen, so könnte er diesen in Beziehung auf jene nicht eben dasselbe, sondern nur das entgegen gesetzte Zeichen (—) geben. Und in der That hebt alsdenn ein jeder Thaler, den er baar besitzt, einen Thaler von seinen Schulden auf, und läßt sich davon abziehen.

Man nennt indessen überhaupt die Größen, welchen man das Zeichen + vorsetzt, positive, die, welche das Zeichen (—) haben, negative Größen.

Wenn in einer Reihe von Grössen, die neben einander gesetzt sind, die erste Grösse gar kein Zeichen hat, so zeigt dieses an, daß sie positiv seyn solle.

Man stellt diese positiven und negativen Größen nicht nur in eine Verbindung durch die Addition und Subtraction, sondern man multiplicirt und dividirt sie auch durch einander. Dieses scheint denen, die sich zuerst mit der Algebra bekannt machen, überaus seltsam.

Man wird indessen die Reguln derselben durch folgende Induction leicht einsehen: Wenn ich 4 durch 3 multiplicire, so nehme ich das Product 12 in eben demselben Verstande, in welchem ich 4 nahm, weil kein Zeichen da ist, daß ich diese 12 anders ansehen soll, als ich 4 ansah. Wenn ich aber 4 durch — 3 multiplicire, so erinnert mich das Zeichen — bey 3, daß ich die Bedeutung, in der ich 4 nahm, umkehren, und es in dieser umgekehrten Bedeutung 3mal nehmen müsse. Ich bezeichne also das Product — 12. Eben also, wenn ich — 4 durch 3 multiplicire, so heißt dieses so viel, als 4 in der Bedeutung, die das Zeichen — angab, 3mal nehmen. Es wird ebenfalls — 12. Wenn ich aber — 4 durch — 3 multipliciren soll, so erinnert mich das wiederholte Zeichen —, daß ich die Bedeutung, in welcher 4 zu nehmen war, verändern, dabey aber dennoch die Zahl 4. 3mal nehmen solle. Wenn der Ausdruck in unserer Sprache sich anwenden liesse: 4, das als ein Mangel an einer gewissen Größe betrachtet wird, soll als ein solcher Mangel 3mal nicht da seyn, oder 4 soll 3mal nicht fehlen, so würde diesem Ausdruck keine andre Bedeutung gegeben werden können, als diese, daß 4 dreymal da seyn solle, und dieß gäbe mir das Product + 12. Gesetzt, ein Mann wäre mir 12 Thaler schuldig, ich sagte ihm aber: die Schuld, 4 Thaler, soll 3mal nicht als Schuld gerechnet werden, so hätte dieses eben die Wirkung, als wenn ich ihm 12 Thaler schenkte, die nun die Schuld ganz aufhöben,

höben, eben so gut, als wenn er gegen 12 Thaler Paßivschuld 12 Thaler Activschuld zu rechnen hätte.

Es ist eben also mit der Division bewandt. Wenn ich frage: wie oft ist 3 in 12 enthalten? so ist die Antwort: 4mal, und ich gedenke mir dieses 4 noch in eben der Bedeutung, in welcher ich 12 gedachte, nämlich als + 4. Frage ich aber, wie oft fehlt 3 in 12, oder wie vielmal ist 3 in dem Mangel 12, (das ist 3 in — 12) enthalten? so kann ich nicht anders, als durch die Zahl 4 antworten, die ich aber, wie das ganze 12, noch als fehlend, oder als — 4 ansehen muß. Frage ich endlich: wie oft kann in dem Mangel 12 die Zahl 3 mangeln? (das ist, wie oft ist — 3 in — 12 enthalten?) so ist die Antwort: 4mal; und ich setze hier das Zeichen +, weil die Sache hier nicht anders bewandt ist, als wenn ich überhaupt frage: wie ist 4 in 12 enthalten? Kurz, in der Multiplication und in der Division gilt überhaupt die Regul:

Bey einerley Zeichen haben das Product und der Quotient das Zeichen (+), bey verschiedenen das Zeichen (—).

§. 4.

Die §. 2. ausgeführten Aufgaben löset die Arithmetik durch die Regulam falsi simplicis positionis auf. Ich will jetzt einige beyfügen, welche dieselbe freylich noch auflösen kann, aber nicht anders, als durch einen doppelten falschen Satz, oder durch die Regulam duplicis falsi.

3) Ein Mann vertheilt 400 Thaler unter 4 Arme. Der zweyte bekömmt halb so viel, als der erste. Der dritte $\frac{1}{4}$ weniger, als der zweyte. Der vierte $\frac{2}{5}$ weniger, als der dritte. Die Frage ist: wie viel ein jeder bekomme?

Man setze den Antheil des ersten $= x$

so ist der Antheil des zweyten $= \frac{1}{2} x$

des dritten $\frac{1}{4}$ weniger, oder $\frac{3}{4}$ von $\frac{1}{2} x = \frac{3}{8} x$

des vierten $\frac{2}{3}$ weniger, oder $\frac{1}{3}$ von $\frac{3}{8} x = \frac{1}{8} x$

und alle diese Theile machen 400. Das ist

$$x + \frac{1}{2} x + \frac{3}{8} x + \frac{1}{8} x = 400$$

oder $2x = 400$

Folglich ist der Antheil des ersten $x = 200$

der Antheil des zweyten $\frac{1}{2} x = 100$

des dritten $\frac{3}{8} x = 75$

des vierten $\frac{1}{8} x = 25$

Summe $= 400$

4) Drey Personen verdienen bey einer gewissen Arbeit 400 m℥. Es ist aber abgeredet, daß der zweyte 12 m℥ vor dem ersten, der dritte 16 m℥ vor dem zweyten voraus nehmen solle. Wie groß ist also eines jeden Antheil?

Man setze den Theil des ersten $= x$

so ist der Theil des zweyten $= x + 12$

der Theil des dritten $= x + 12 + 16$

Folglich $x + x + 12 + x + 12 + 16 = 400$

das ist $3x + 40 = 400$

Man ziehe auf beyden Seiten ab 40 40

so ist $3x = 400 - 40 = 360$

Folglich $x = \frac{360}{3} = 120$

$x + 12 = 132$

$x + 12 + 16 = 148$

Summe $= 400$

Man

Man wird diese Exempel vollkommen so leicht, als die im 2ten §. finden. Wer sie aber arithmetisch nach der regula duplicis falsi zu berechnen weiß, wird die Schwierigkeiten ungemein größer befinden, und weit lieber den hier gewiesenen Weg erwählen, auch viel mehr Deutlichkeit und Ueberzeugung dabey finden.

§. 5.

Folgende Exempel werden uns zur Einsicht und zur Anwendung mehrerer Reguln Gelegenheit geben.

5) Ein Mann bedingt zu einer Arbeit, die Eile erfodert, einen Handwerker auf 30 Tage zu 30 ß, mit dem Bedinge, daß er für jeden Tag, da er nicht arbeitet, ihm von dem an den übrigen Tagen verdienten Lohn 10 ß abziehen wolle. Am Ende der 30 Tage bezahlt er ihm 31 m℔ 4 ß, oder 500 ß. Die Frage ist, wie viel Tage hat er gearbeitet, und wie viele versäumt?

Man setze die Zahl der versäumten Tage $= x$
So ist die Zahl der Arbeitstage $= 30 - x$

Der Lohn für dieselben $= 30 \times 30 - x$ oder $900 - 30x$
Für die versäumten Tage gehen ab $10x$.
Und nun ist $900 - 30x - 10x = 500$ ß
das ist $900 - 40x = 500$
Man thue auf beyden Seiten hinzu $+ 40x \quad + 40x$

so entsteht $900 = 500 + 40x$
Man ziehe auf beyden Seiten ab $500 \quad 500$

so entsteht $900 - 500 = 40x$
das ist $400 = 40x$
Man dividire beydes durch $40 \quad 40$

daraus wird $10 = x$
und $30 - x = 20$

 Man

Nun kann man die Probe anstellen. Er hat 20 Tage gearbeitet. Der Lohn dafür beträgt 600 ß.
davon gehen ab 10 × 10 oder 100 ß.

bleibt 500 ß.

6) Zween Brüder haben einerley Einkommen. Der älteste A legt davon jährlich $\frac{1}{6}$ zurück. Der jüngere B aber verzehrt jährlich 2000 m̃ℊ mehr, als der andre, und wird nach Verlauf von 3 Jahren 3600 m̃ℊ schuldig. Was hat also ein jeder jährlich einzukommen gehabt?

Das jährliche Einkommen von jedem sey $= x$
so hat A jährlich verzehrt $\frac{5}{6}x$
B $\frac{5}{6}x + 2000$
B wird jährlich schuldig $\frac{5}{6}x + 2000 - x$
und in drey Jahren $3 \times \frac{5}{6}x + 2000 - x = 3600$
das ist $\frac{15}{6}x + 6000 - 3x = 3600$
Nun rechne man $\frac{15}{6}x$ gegen $-3x$ oder $-\frac{18}{6}x$
welches $-\frac{3}{6}x$ oder $\frac{1}{2}x$ giebt.
Folglich ist $-\frac{1}{2}x + 6000 = 3600$
Man ziehe von beyden ab 6000 6000

so entsteht $-\frac{1}{2}x = 3600 - 6000$
oder $-\frac{1}{2}x = -2400.$

Dieser Fall ist neu. Wir haben auf beyden Seiten negative Größen. Wir können sie aber unmittelbar in positive verwandeln, ohne ihre Gleichheit zu verändern. Wer sich hievon überzeugen will, der setze $\frac{1}{2}x$ auf beyden Seiten hinzu. Alsdann entsteht:

$-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x = -2400 + \frac{1}{2}x$
Nun addire er 2400 2400

es entsteht $-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x + 2400 = -2400 + 2400 + \frac{1}{2}x$
allein $-\frac{1}{2}x$ und $+\frac{1}{2}x$, wie auch $-2400 + 2400$ heben einander ganz auf. (§. 2.) Folglich haben wir eigentlich diese Gleichung: $2400 = \frac{1}{2}x.$

Allein

Allein man setzt immer gern das Unbekannte zur Linken. Denn wenn zwo Größen einander gleich sind, so ist es einerley, welche von beyden ich zuerst oder zuletzt nenne. Wir setzen also lieber

$$\tfrac{1}{2}x = 2400$$
oder $$x = 4800$$

A hat also jährlich verzehrt $\tfrac{5}{6}$ von 4800 das ist 4000

B hat verzehrt 4000 + 2000 das ist 6000 oder 1200 mehr, als seine Einnahme, welches in drey Jahren 3600 beträgt.

Wenn man dergleichen Aufgaben oft ausführt, so wird man bemerken, daß das sorgfältige Abziehen und Hinzuthun einer Größe auf beyden Seiten nicht nöthig sey, um sie von einer Seite auf die andre mit veränderten Zeichen zu bringen, sondern man wird diese Versetzung unmittelbar ohne Bedenken vornehmen. Man wird auf die jetztbemerkte Art, und nach erwähnten Gründen, die Zeichen aller Größen in einer Gleichung verändern, ohne die Gleichheit aufzuheben, und sie dabey an ihrem Orte lassen können. Z. E. wenn

$$-2x + \tfrac{3}{4}x - \tfrac{1}{8}x = 4200 - 7800$$

so setzt man ohne Bedenken

$$2x - \tfrac{3}{4}x + \tfrac{1}{8}x = -4200 + 7800 = +3600.$$

Wir werden häufig Gelegenheit haben, beydes in der Folge anzuwenden.

7) Ein Krämer hat 64 ℔ von einer gewissen Waare, davon er das ℔ für 40 ß geben kann. Allein des leichteren Absatzes wegen will er sie mit einer andern vermischen, davon das ℔ 30 ß gilt, so daß er von der gemischten Waare das Pfund für 36 ß geben könne. Wie viel Pfunde muß er von der schlechtern Waare untermischen?

Man setze die gesuchte Zahl $= x$

So ist der Preis von so viel Pfunden $= 30x$

und der Preis von 64 ℔ der feinern Waare $= 64 \times 40 = 2560.$

Die Anzahl Pfunde in der Mischung ist $64 + x$.
Der angenommene Preis von allen $= 36 \times 64 + 36 x$
oder $2304 + 36 x$.
Beydes muß dem Krämer gleich viel eintragen, das ist

$$2560 + 30 x = 2304 + 36 x.$$

Hieraus wird durch Veränderung der Zeichen:

$$-2560 - 30 x = -2304 - 36 x$$

und durch Versetzung auf die andre Seite mit abermals geänderten Zeichen:

$$36 x - 30 x = 2560 - 2304$$

oder $6 x = 256$

das ist $x = 42\frac{2}{3}$ Pfunde.

§. 6.

Wir wollen zu einer Aufgabe gehen, die uns auf neue Reguln leiten wird:

8) Es werden von einer gewissen Waare 100 ℔ zu 40 ß verlangt. Nun sind von dieser Waare 3 Sorten: eine zu 48 ß, die zweyte zu 36 ß, die dritte zu 28 ß. Von der ersten sind 52 ℔ vorräthig. Man würde zu dieser die zweyte Art, nach der §. 3. gegebenen Anweisung, mischen können, um den gesetzten Preis zu machen, aber auch von dieser ist nicht genug da. Man muß also auch von der dritten Sorte einmischen. Die Frage ist, wie viel Pfunde von der zweyten und dritten Sorte genommen werden müssen.

Man bezeichne die Zahl Pfunde von der 2ten Sorte x
von der 3ten Sorte y.

So müßte vermöge der Aufgabe der Preis von den drey verschiedenen Gewichten der eingemischten Waare gerade so viel ausmachen, als 40×100 oder 4000 ß, das ist:

$$48 \times 52 + 36 \times x + 28 \times y = 4000.$$

oder kürzer: $2496 + 36 x + 28 y = 4000.$

Man kann freylich hier die Größen so, wie man es in vorigen Aufgaben gelernt hat, versetzen. Es wird aber

weder

weder x noch y bekannt werden. Denn in allen den versetzten Gleichungen, in welche jene sich verändern läßt:

$$36x + 28y = 4000 - 2496 = 1504$$
$$36x = 1504 - 28y, \text{ oder}$$
$$28y = 1504 - 36x, \text{ und folglich}$$
$$x = \frac{1504 - 28y}{36} \text{ oder}$$
$$y = \frac{1504 - 36x}{28}$$

erscheint mir x und y unter solchen Bestimmungen, die mir unauflöslich sind, so lange ich nicht das eine oder das andre besonders kenne. In den ersten von diesen beyden müßte ich $\frac{28}{36}$ y oder $\frac{7}{9}$ y von $\frac{1504}{36}$, in der andern $\frac{36}{28}$ x oder $\frac{9}{7}$ x von $\frac{1504}{28}$ abziehen. So lange ich aber nicht y kenne, kenne ich auch nicht $\frac{7}{9}$ y, und eben so wenig $\frac{9}{7}$ x. Der Umstand in der Aufgabe, aus welchem diese Gleichung gezogen worden, ist also nicht hinlänglich, um das Unbekannte zu erfinden. Allein die Aufgabe sagte auch, daß die 52 Pfunde mit den gesuchten Zahlen von Pfunden 100 ausmachen sollen, das ist:

$$52 + x + y = 100.$$

Dieses giebt uns nachfolgenden Weg zur Auflösung an die Hand: In jener Gleichung sind 36 x, hier ist nur ein x. Allein wir können in dieser alles durch 36 multipliciren, um auch 36 x hineinzubringen, so kömmt

$$36 \times 52 + 36x + 36y = 3600$$
diese ziehe man ab von $48 \times 52 + 36x + 28y = 4000$

so bleiben $12 \times 52 \quad * \quad - 8y = 400$
oder mit geänderten Zeichen $- 12 \times 52 + 8y = -400$

In dieser Gleichung ist kein x mehr, und wir können mit ihr, wie oben, durch Versetzung verfahren. Alsdenn entsteht

$$8y = -400 + 12 \times 52 = -400 + 624 = 224$$

Folglich ist $y = \frac{224}{8} = 28$

Nun können wir aber auch erfahren, wie groß x sey. Denn die Gleichung:

$$52 + x + y = 100$$

oder $x = 100 - 52 - y$ verändert sich nun in diese $x = 100 - 52 - 28 = 20$.

Die Probe beweiset, daß wir recht gerechnet haben.

Denn	20 ℔ zu 36 ß betragen	720
	28 ℔ zu 28 ß	784
	52 ℔ zu 48 ß	2496
	Summe =	4000

Laßt uns aber die Zahlen verändern, und setzen: von der besten Waare seyn nur 20 Pfund vorräthig, die man mit der zweyten Sorte vermischen wolle, von welcher nun überflüßig da sey, und erforderlichen Falls die dritte hinzufügen wolle. Wir werden hier auf einen Fall gerathen, der unsrer Aufmerksamkeit sehr würdig seyn, und uns das Allgemeine der algebraischen Auflösung deutlich entdecken wird. Die vorhingesetzten Gleichungen verändern sich nun in diese:

Die zweyte $48 \times 20 + 36x + 28y = 4000$

Die erste Gleichung $20 + x + y = 100$

multiplic. durch 28. $28 \times 20 + 28x + 28y = 2800$

abgezogen bleibt $20 \times 20 + 8x \quad * \quad = 1200$

$$8x = 1200 - 400 = 800$$

$$x = \frac{800}{8} = 100$$

Diese

Diese Auflösung ist in der That sehr unerwartet. 100 Pfunde sind überhaupt nur nöthig. 20 von der besten Sorte und 100 von der schlechteren machen 120 Pfunde. Was wird nun aus der dritten werden? Wir nehmen die Gleichung:

$$20 + x + y = 100$$
oder $$20 + 100 + y = 100$$
folglich $$y = 100 - 20 - 100 = -20.$$

Dieses ist eben so unerwartet. Von der dritten sollten also 20 Pfunde aus der Mischung der beyden ersten weggenommen werden, ohne daß etwas von derselben hinzugethan wäre. Allein man bemerke, daß in dieser Rechnung nicht die verschiedene Güte, sondern nur der Preis und die Gewichte der verschiedenen Sorten verglichen sind, und wenn man auf diese sieht, so ist es wahr, daß wenn man 100 Pfunde zu 36 ß durch die Untermischung von 20 Pfunden zu 48 ß verbessert, und von dieser Mischung 100 Pfunde für 40 ß verkauft, noch 20 ℔ übrig bleiben, welche man das ℔ für 28 ß, ohne Schaden, wegschlagen kann. Dieses weiset die Probe aus:

20 ℔ zu 48 ß	=	960 ß
100 ℔ zu 36 ß	=	3600 =
	Summe	4560 =
100 ℔ verkauft zu 40 ß	=	4000 =
	bleiben übrig	560 =
20 ℔ zu 28 ß	= =	560 =

Man geräth sehr oft in den algebraischen Exempeln auf solche Auflösungen, die ganz unerwartet sind, und zugleich uns entdecken, daß die Aufgabe nach der gemachten Voraussetzung sich nicht ausführen lasse. Man versuche es, wie man wolle, so wird sich, wenn man nur 20 ℔ der besten

Sorte

Sorte zu 48 ß hat, auf keine Art eine Mischung von allen drey Sorten der Waare machen lassen, die genau 100 ℔ gäbe, deren jedes 40 ß werth wäre. Hätte man 34 ℔ der besten Waare, so wird $x = 65$, $y = 1$, und man darf nur ein Pfund von der schlechtesten Sorte zumischen. Hätte man 32, so würde $x = 70$, und $y = -2$; und man muß wieder 2 ℔ von der Mischung der beyden ersten Waaren wegnehmen, ohne daß eine dritte hinzukommen kann.

9) Ein Kaufmann verkauft 30 Centner (von 100 ℔) einer gewissen Waare, und 40 von einer schlechtern Sorte zusammen für 1260 mℓ. Nachmals aber 50 Centner der bessern, und 35 der schlechtern Sorte für 1625 mℓ. Die Frage ist, wie hoch hat er die 100 ℔ gerechnet?

Der Preis der bessern Sorte sey x.
der schlechtern " y.

so ist $30x + 40y = 1260$
$50x + 35y = 1625$

Die erste Gleichung 5mal genommen, giebt
$150x + 200y = 6300$

Die 2te 3mal genommen $150x + 105y = 4875$

Unterschied * $95y = 1425$

Folglich $y = \frac{1425}{95} = 15$

Wir verändern nunmehr die erst gegebene Gleichung in diese

$30x + 40 \times 15 = 1260$

$30x = 1260 - 40 \times 15 = 1260 - 600 = 660$

$x = \frac{660}{30} = 22$

Probe:

Probe:

30 Centner zu 22 mß = 660
40 " " 15 " = 600

Summe = 1260

50 Centner zu 22 mß = 1100
35 " " 15 " = 525

Summe = 1625

Andere Auflösung dieser Aufgabe:

$30x + 40y = 1260$ wie vorhin.
$50x + 35y = 1625$.

Aus der ersten Gleichung folgt: $30x = 1260 - 40y$.

$$x = \frac{1260 - 40y}{30}.$$

aus der zweyten folgt: $50x = 1625 - 35y$.

$$x = \frac{1625 - 35y}{50}.$$

Folglich $\frac{1625 - 35y}{50} = \frac{1260 - 40y}{30}$.

Beydes multiplicirt durch 50, giebt:

$$1625 - 35y = \frac{50 \times 1260 - 50 \times 40y}{30}.$$

Beydes multiplicirt durch 30, giebt:

$30 \times 1625 - 30 \times 35y = 50 \times 1260 - 50 \times 40y$

oder $48750 - 1050y = 63000 - 2000y$

Folglich $2000y - 1050y = 63000 - 48750$

das ist $950y = 14250$

$y = \frac{14250}{950} = 15$ wie vorhin.

Aus

Aus diesem Werth von y wird x auf eben die Art, wie vorhin, gefunden.

§. 7.

Wir werden eben diese Reguln anwenden, um solche Aufgaben aufzulösen, in denen drey unbekannte Größen vorkommen.

10) Ein Mann hat für Schuld angenommen 23 Schiffpfund Bley, 5 Sch℔ Eisen, 3 Sch℔ Kupfer, welche ihm mit den Zinsen und allen Unkosten 1293 m̃ zu stehen kommen; Ferner 7 Sch℔ Bley, 10 Sch℔ Eisen, 13 Sch℔ Kupfer, welche ihm 2508 m̃ kosten; endlich 12 Sch℔ Bley, 9 Sch℔ Eisen, 20 Sch℔ Kupfer, welche ihm 3723 m̃ betragen. Die Frage ist: wie hoch er das Sch℔ von jeder Waare ausbringen müsse, um genau sein Geld wieder zu haben?

Man setze den Preis des Sch℔ Bley $= x$
des Eisens $= y$
des Kupfers $= z$

So gilt für den ersten Vorrath diese Gleichung:

$$23x + 5y + 3z = 1263$$

für den zweyten: $7x + 10y + 13z = 2508$

für den dritten: $12x + 9y + 20z = 3723$.

Wir verdoppeln die erste, um die zweyte von ihr abzuziehen, und y verschwinden zu machen:

$$46x + 10y + 6z = 2586$$
$$7x + 10y + 13z = 2508$$

abgezogen bleibt: $39x \quad * \quad - 7z = 78$

Diese Gleichung ist zwar leichter, weil kein y mehr in ihr ist. Allein wir können mit dieser alleine noch nicht weiter kommen, sondern müssen noch eine zweyte suchen, in welcher kein y bleibt. Dieses erhalten wir, wenn wir die dritte

dritte 5mal, und die erste 9mal nehmen, und diese von jener abziehen. Denn alsdenn entstehen in beyden 45 y, welche sich einander aufheben:

$$60x + 45y + 100z = 18615$$
$$207x + 45y + 27z = 11637$$
$$-147x \quad * \quad 73z = 6978$$

Beyde neue Gleichungen können uns einen Werth von z geben. Vermöge der ersten ist:

$$-7z = 78 - 39x$$

oder mit veränderten Zeichen:

$$+7z = -78 + 39x$$

folglich $z = \frac{-78 + 39x}{7}$

Vermöge der zweyten ist: $73z = 6978 + 147x$

foglich $z = \frac{6978 + 147x}{73}$

Nunmehr ist $\frac{-78 + 39x}{7} = \frac{6978 + 147x}{73}$

Folglich $73 \times -78 + 73 \times 39x = 7 \times 6978 + 7 \times 147x$

das ist $-5694 + 2847x = 48846 + 1029x$.

oder $2847x - 1029x = 48846 + 5694$.

oder $1818x = 54540$

$x = \frac{54540}{1818} = 30$

Das Schiff Bley gilt ihm also 30 Rthl., und nun können wir durch diesen Werth von x den Werth von z erfahren. Denn

Denn die Gleichung $z = \frac{-78 + 39x}{7}$

verändert sich nun in diese:

$$z = \frac{-78 + 39 \times 30}{7} = \frac{-78 + 1170}{7} = \frac{1092}{7} = 156.$$

Dieses ist der Preis z von dem Sch℔ Kupfer. Durch beyde können wir in einer von den drey ersten Gleichungen y erfahren. Denn weil vermöge der 2ten

$$7x + 10y + 13z = 2508$$

so ist $10y = 2508 - 7x - 13z$

oder $10y = 2508 - 7 \times 30 - 13 \times 156$

$= 2508 - 210 - 2028$

$= 2508 - 2238 = 270$

folglich $y = \frac{270}{10} = 27.$

Nun wird die Probe unsre Rechnung rechtfertigen. Denn wenn wir in den ersten Gleichungen für x, y und z die Zahlen 30, 27 und 156 setzen, so werden in allen die beygesetzten Summen herauskommen.

Anmerkung.

Man wird gegen diese algebraischen Auflösungen einwenden, daß man in denen Vorfällen, welche ich zu Exempeln angenommen habe, die Genauigkeit nicht brauche, welche diese Auflösungen haben. Ein Kaufmann wird in dem Fall No. 9. die Mischung so machen, daß er die wolfeilere Waare ohngefähr so verbessere, damit dem Käufer nicht zu nahe geschehe. In dem letzten Fall No. 10. wird er aus den couranten Preisen des Bleyes, des Eisens und des Kupfers berechnen, ob er sein Capital wieder herausbekomme. Gewinnt er dabey; so ist es so viel besser. Verliert er, so läßt er sich den Schaden gefallen, oder erwartet einen bessern Preis, bey dem er bestehen kann. Indessen glaube ich doch, daß einem jeden angenehm seyn werde, wenn er durch die hier gezeigten Wege mit

mit der grössten Genauigkeit rechnen kann, wie er nach den angegebenen Umständen verfahren oder verkaufen müsse. Er wird seinen Gewinn sowohl, als seinen Verlust, so viel richtiger schätzen können, und überhaupt in seiner Rechnung sicherer gehen. Wenn wir eine solche Genauigkeit für unnütz achten wollten, so könnten wir den jungen Rechenschülern die Mühe sehr erleichtern, welche wir in den Schulen die Exempel mit einer solchen Genauigkeit berechnen lassen, die in der Handlung eben so wenig beobachtet wird. Man läßt sie bey Waaren, die nur in 100 Pfunden verkauft werden, die Preise nicht nur für einzele Pfunde, sondern auch für Lothe und Quentine berechnen, und stellt den Preis in Schillingen und Pfenningen, da man doch gewöhnlich nur von 4 zu 4 Schillingen zu rechnen pflegt. Warum geschicht dieses anders, als um sie zu solchen Berechnungen geschickt und geübt genug zu machen, in denen doch zuweilen diese Genauigkeit erfodert wird, oder in welchen sie selbst einmal alles auf das schärfste werden wissen wollen, um in ihren Maaßreguln im Handel und Gewerbe so viel gewisser zu verfahren?

§. 8.

In den bisher erläuterten Aufgaben und Reguln drückt man nur die unbekannten Größen durch unbestimmte Zeichen, die gegebenen Zahlen aber mit Ziefern aus. Die auf diese Art abgehandelte Algebra nennt man Algebra numerosa. Man kann durch dieselbe sehr vieles ausrichten, und man braucht nicht mehr als diese zu wissen, wenn man sie bloß in solchen Fällen des gemeinen Lebens nützen will, für welche die Arithmetik unzulänglich ist. Allein ihr Nutzen erstreckt sich viel weiter, wenn man alle Größen, so wol die bekannten als die unbekannten, mit allgemeinen Zeichen ausdrückt. Man wählt für die bekannten die ersten Buchstaben des Alphabets a, b, c, d, u. s. f., für die unbekannten die letzten, und weil man hiebey nicht gewisse bestimmte Zahlen vor Augen hat, so dient die Auflösung statt einer allgemeinen Regul, welche den Fall für alle Größen auflöset, die man sich unter den Buchstaben des Alphabets gedenken will. Wir wollen davon ein Exempel in folgender Aufgabe geben:

11) Drey Personen traten in eine Handlungsgesellschaft mit einander: A legte 20000, B 17000, C 13000 mℒ ein. Ihr Gewinn ist 47000 mℒ. C, welcher alle Geschäfte führt, bekömmt 4 p. Cento für seine Mühe voraus. Die Frage ist: wie viel ein jeder bekomme?

Der Theil des ersten sey $= x$

der Theil des andern verhält sich zu diesem, wie 17 zu 20, und ist $= \frac{17x}{20}$

der Theil des dritten ist $= \frac{13x}{20}$

Alle drey Theile machen 47000 mℒ weniger 4 p. C. aus. Wir werden die Mühe des Schreibens hier sehr erleichtern, wenn wir 47000 mℒ eine Weile bloß mit dem Buchstaben a ausdrücken. Wir haben alsdenn diese Gleichung:

$$x + \frac{17x}{20} + \frac{13x}{20} = a - \frac{4a}{100}$$

das ist $x + \frac{3x}{2}$ oder $\frac{5x}{2} = \frac{96a}{100}$

Folglich $5x = 2 \times \frac{96a}{100}$ oder $\frac{192a}{100}$

und $x = \frac{192a}{500} = \frac{192 \times 47000}{500}$

$= 192 \times 94 \qquad = 18048$

der Theil des zweyten $\frac{17x}{20}$ — $= 15340\frac{4}{5}$

der Theil des dritten $\frac{13x}{20}$ — $= 11731\frac{1}{5}$

4 p. C. von a oder 47000 — $= 1880$

Summe $= 47000$ mℒ

Wir hätten aber auch gleich Anfangs die Einlage eines jeden mit b, c, d bemerken können. Die erste Gleichung wäre alsdenn:

$$x + \frac{cx}{b} + \frac{dx}{b} = a - \frac{4a}{100} = \frac{96a}{100}$$

Folglich $bx + cx + dx = \frac{96ab}{100}$

das ist $x \times b + c + d = \frac{96ab}{100}$

Folglich $x = \frac{\frac{96ab}{100}}{b + c + d}$

Diese Gleichung giebt uns eine allgemeine Regul zur Auflösung aller ähnlichen Fälle, nämlich: man muß das, was von dem Capital übrig bleibt, wenn die Procente abgezogen sind, durch die Einlage des ersten multipliciren, und alles durch die Summe von der ganzen Einlage dividiren, um den Theil des ersten zu bestimmen:

Die Einlage des ersten sey	=	24500
des andern	=	12750
des dritten	=	10750
Die ganze Summe	=	48000
Der Gewinn	=	37850
4 pro Cent	=	1514
abgezogen		36336

Der Antheil des ersten kömmt also nach obiger Regul heraus:

	18546 mg 8 ß
des zweyten	9651 „ 12 „
des dritten	8137 „ 12 „
Summe	36336 mg.

Diejenigen, welche nach der sogenannten regula Societatis zu rechnen wissen, werden freylich eben so verfahren, ohne vorher algebraisch die Regul erfinden zu dürfen. Allein ich habe eben deswegen dieses Exempel gewählt, damit man die Uebereinstimmung der einen und der andern Methode dadurch deutlicher einsehen, und dabey zugleich wahrnehmen mögte, wie die Reguln der Rechenkunst durch die Algebra entdeckt werden können.

12) Welche sind die Zahlen, die in der Summe 59 ausmachen, und den Unterschied 17 haben?

Die größere Zahl sey $= x$
die kleinere $= y$
So ist vermöge der Aufgabe $x + y = 59$
$x - y = 17$
Folglich vermöge der ersten Gleichung $x = 59 - y$
vermöge der zweyten $x = 17 + y$
Also ist $17 + y = 59 - y$
und $y + y$ oder $2y = 59 - 17 = 42$

$$y = \frac{42}{2} = 21$$

$$x = 59 - y = 59 - 21 = 38.$$

Probe: 38 und 21 machen 59, und 38 weniger 21 geben 17.

Man wird, so oft statt 59 und 21 andre Zahlen, z. E. 75 und 22 gegeben werden, eben diese Wege gehen müssen, aber die allgemeine Regul nicht leicht einsehen, nach welcher überhaupt Größen bestimmt werden können, wenn ihre Summe und ihre Differenz gegeben sind.

Laßt uns aber, wie vorhin, die beyden unbekannten Größen mit x und y, die gegebene Summe aber, welche sie auch sey, mit a, die Differenz mit b bemerken. So ist überhaupt:

$$x + y = a$$
$$x - y = b$$

Folglich

Folglich ist vermöge der ersten Gleichung $x = a - y$
vermöge der zweyten $x = b + y$
und $b + y = a - y$
$y + y$ oder $2y = a - b$
$y = \frac{a-b}{2}$ oder $\frac{a}{2} - \frac{b}{2}$

Nun war $x = b + y = b + \frac{a-b}{2} = \frac{b}{2} + \frac{a}{2}$

Das ist: die grössere von beyden Zahlen wird gefunden, wenn die halbe Summe und die halbe Differenz addirt, die kleinere, wenn dieselben von einander subtrahirt werden. Dieses ist eine allgemeine Wahrheit, die bey allen für a und b angenommenen Zahlen zutrifft. Denn die Sache hängt bloß davon ab, daß a die Summe, und b die Differenz beyder unbekannten Zahlen vorstellt, und liegt nicht etwan in den Eigenschaften gewisser bestimmter Zahlen.

Anmerkung.

Die Algebra, wenn sie auf diese Weise ganz mit allgemeinen Zeichen abgehandelt wird, heißt Algebra speciosa. Ihr Nutzen wird dadurch vollends ungemein groß, daß man unter diesen Zeichen nicht bloß Zahlen, sondern auch Linien annehmen kann, und die Auflösungen und Reguln, auf welche man durch sie geräth, eben so wol für die Geometrie, als für die Arithmetik gelten. Seitdem man die Algebra auf die Geometrie angewandt hat, welches noch nicht länger als etwan 120 Jahre geschehen, ist nicht nur die ganze Mathematik, sondern auch die Naturlehre zu einer bewundernswürdigen Vollkommenheit gelangt, und man kann sie mit Recht als diejenige Wissenschaft ansehen, durch welche die menschliche Erkenntniß am meisten erweitert werden kann. Ich setze noch hinzu, daß sie der leichteste Weg dazu sey, wenn man die Schwierigkeit, die sich in dem Erkenntniß tiefsinniger Wahrheiten findet, so oft man sie durch andre Wege erkennen will, mit der ungleich geringern vergleicht, welche man in der Algebra hat, wenn man in ihre Geheimnisse einigermassen eingedrungen ist. Folgende Aufgaben werden eine weitere

Aussicht in die Vortheile dieser Wissenschaft, und einige bisher noch nicht berührte Methoden derselben geben.

§. 9.

13) Zween Couriere, A und B, reisen zu gleicher Zeit von Berlin und Hamburg aus. Sie treffen sich beyde unterwegens an, und A reiset so geschwind, daß er 9 Stunden nachher in Hamburg ankömmt, B aber kömmt erst in 16 Stunden nachher an. Die Frage ist: wie geschwind ein jeder geritten sey?

Man sieht bald ein, daß es darauf ankomme, zu wissen, wie viel Stunden beyde gereiset sind, bevor sie einander begegnen, denn zu dieser Zeit kommen für A noch 9 und für B noch 16 Stunden hinzu. Alsdenn werden wir die ganze Zeit wissen, die ein jeder gebraucht hat, und daraus erfahren können, wie viel Meilen jeder in einer oder mehreren Stunden zurückgelegt habe.

Man nenne diese Zahl von Stunden x.

Der Weg, welchen B in der Zahl der Stunden x zurückgelegt hat, wird von A nachher in 9 Stunden zurückgelegt. Wir können hieraus die Eilfertigkeit von beyden überhaupt beurtheilen, und unter der Voraussetzung, daß A in diesen 9 Stunden eben so geschwind, als in x Stunden, B aber in seinen 16 Stunden eben so langsam reisen werde, als er in x Stunden gethan, also schliessen: Wie sich 9 Stunden verhalten zu der unbekannten Zahl x derer Stunden, welche B bis zu dem Ort der Zusammenkunft braucht, so verhält sich eben diese Zahl von Stunden, die auch A bis zu eben dem Orte in dem andern Theil des Weges gebraucht hat, zu der Zahl von Stunden, welche B für eben diesen Theil nöthig hatte, das ist im algebraischen Ausdruck:

$$9 : x = x : \frac{xx}{9}$$

Wir

Wir wissen aber, daß B dazu 16 Stunden angewandt hat, und haben also diese Gleichung:

$$\frac{xx}{9} = 16$$

Folglich $xx = 16 \times 9 = 144.$

Dieser Ausdruck ist neu. Wir haben einen Werth für das Quadrat von x, aber noch nicht für x selbst. Allein es ist ein in der Geometrie so wol als Arithmetik bewährter Lehrsatz: **wenn zwo Größen einander gleich sind, so sind auch ihre Quadrat- oder ihre Cubic- oder jede andre Wurzeln gleich.** Die Wurzel von xx ist x, die von 144 ist 12. Folglich ist

$$x = 12.$$

Nun ist Berlin 34 Meilen von Hamburg. A brauchte 12 und 9, das ist 21, B 12 und 16, das ist 28 Stunden. A ist also in 7 Stunden $11\frac{1}{3}$ Meilen, B in 7 Stunden nur $8\frac{1}{2}$ Meilen geritten.

Wenn wir eben diese Rechnung in allgemeinen Zeichen ausführen, und die Zeit, welche A nach der Zusammenkunft gebraucht, a, die, welche B gebraucht, b nennen, so haben wir die allgemeine Formul für alle ähnliche Aufgaben: $x = \sqrt{ab}$, das ist: die Zahl derer Stunden, welche beyde gereiset sind, kömmt heraus, wenn man die angegebenen Zahlen von Stunden, welche beyde brauchen, nach der Zusammenkunft, durch einander multiplicirt, und aus dem Product die Wurzel zieht, oder, die gesuchte Zahl ist die mittlere Proportionalzahl zwischen den gegebenen Zahlen.

Man setze, zween Reisende zwischen hier und Amsterdam seyn zu gleicher Zeit ausgereiset; A langte 16 Stunden nach der Zusammenkunft in Hamburg, B 25 Stunden nachher in Amsterdam an.

Nun ist $x = \sqrt{ab} = \sqrt{16 \times 25} = \sqrt{400} = 20.$

A hat demnach auf einem Wege von 48 Meilen 36 Stunden zugebracht, und ist in 3 Stunden 4 Meilen gereiset; B hat 45 gebraucht, und hat in 3 Stunden $3\frac{1}{5}$ Meilen zurückgelegt.

A und B reisen zwischen hier und Frankfurt über Lüneburg. A kömmt 2, B 3 Tage nach der Zusammenkunft zur Stelle.

Nun wird $x = \sqrt{24 \times 72} = \sqrt{1728}$.

Diese Wurzel ist ohngefähr $41\frac{1}{2}$. A hat also $65\frac{1}{2}$, B $113\frac{1}{2}$ Stunden auf 70 Meilen zugebracht.

Anmerkung.

Man bemerkt die Wurzeln der Größen mit dem Zeichen $\sqrt{\ }$, und insbesondre die Quadratwurzeln mit diesem Zeichen ohne Zusatz, oder mit diesem: $\sqrt[2]{\ }$, die Wurzeln der höhern Potenzen mit den Zeichen $\sqrt[3]{\ }$, $\sqrt[4]{\ }$, u. s. f. Die Potenzen der Größen selbst drückt man durch wiederholte Zeichen derselben, oder kürzer durch eine oben an dasselbe gesetzte Zahl aus. Z. E. bb, bbb, bbbb, oder besser b^2, b^3, b^4, u. s. f. deuten das Quadrat, den Cubus, die vierte Potenz der Größe an, welche man unter b sich vorstellt.

§. 10.

Allein nicht alle Fälle, in denen wir auf dergleichen quadratische Ausdrücke kommen, sind so leicht, als dieser. Wir müssen, um dieselben aufzulösen, die Natur der Quadrate näher kennen.

Man kennt die Quadrate derer Zahlen, die unter 10 sind, aus dem Ein mal Eins. Von größern Zahlen findet man sie durch die Multiplication, bey welcher man aber dieses allemal anmerken wird: daß, wenn die Zahl aus zwo Ziefern

fern besteht, man eine jede dieser Ziefern durch sich selbst, und eine durch die andre zweymal multiplicire, daß folglich das Quadrat einer solchen Zahl die Quadrate beyder Theile, und das Product derselben durch einander zweymal enthalte. Z. E. 289, das Quadrat von 17, enthält 10×10, 7×7, und $2 \times 7 \times 10$. Theilen wir diese Zahl anders, z. E. in 8 und 9, so enthält das Quadrat der ganzen Zahl 8×8, 9×9, und $2 \times 9 \times 8$. Man sieht dieses durch die Algebra allgemeiner ein. Man nehme $a + b$ als allgemeine Zeichen von zwo Zahlen an, und suche ihr Quadrat durch eine algebraische Multiplication auf folgende Art:

$$\begin{array}{r} a + b \\ a + b \\ \hline ab + b^2 \\ a^2 + ab \quad \\ \hline \text{Summe} = a^2 + 2ab + b^2 \end{array}$$

Welcher Ausdruck die eben erwähnte Regul darstellt.

Man suche auf eben die Art das Quadrat für $a + \frac{1}{2}b$.

$$\begin{array}{r} a + \frac{1}{2}b \\ a + \frac{1}{2}b \\ \hline \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}b^2 \\ a^2 + \frac{1}{2}ab \quad \\ \hline \text{Summe} = a^2 + ab + \frac{1}{4}b^2 \end{array}$$

Für

$$\begin{array}{r} a - b \\ a - b \\ \hline -ab + b^2 \\ a^2 - ab \quad \\ \hline \text{Summe} = a^2 - 2ab + b^2 \end{array}$$

Für $a - \frac{1}{2}b$ ist es $a - ab + \frac{1}{4}b^2$

Diese Vorbereitung wird uns auf die Auflösung nachfolgender Aufgabe leiten:

14) Zwo Zahlen zu finden, deren Summe 30 (a), und deren Product 221 (b) ausmacht.

Man setze die größre von beyden Zahlen $= x$
so ist die kleinere $= a - x$
Das Product von beyden $= ax - xx$
Und wir haben die Gleichung $ax - xx = b$
mit veränderten Zeichen $xx - ax = -b$
Wollten wir diese so versetzen $xx = -b + ax$
so wäre freylich wahr, daß $x = \sqrt{-b + ax}$.

Allein wir gewönnen nichts dabey, weil wir die Wurzel aus $-b + ax$ nicht auszuziehen wissen, indem ax unbekannt ist. Man erkennt aber bald aus den oben angegebenen Ausdrücken eines Quadrats von zween Theilen a und b, daß $xx - ax$ ein unvollständiges Quadrat sey. Das Quadrat von $x - a$ ist $x^2 - 2ax + a^2$; das von $x - \frac{1}{2}a$ ist $x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2$. Um also die Größe $x^2 - ax$ zu einem vollständigen Quadrat zu machen, thue man $\frac{1}{4}a^2$ zu derselben, und damit die Gleichheit bleibe, auch auf der andern Seite zu b hinzu. So entsteht die Gleichung:

$$x^2 - ax + \tfrac{1}{4}a^2 = -b + \tfrac{1}{4}a^2$$

Von beyden sind die Wurzeln gleich, das ist

$$x - \tfrac{1}{2}a = \sqrt{-b + \tfrac{1}{4}a^2}$$

folglich $x = \frac{1}{2}a + \sqrt{-b + \frac{1}{4}a^2}$

das ist $x = 15 + \sqrt{-221 + 225} = 15 + \sqrt{4}$
$= 15 + 2 = 17$

Die kleinere Zahl $a - x = 13$.

Probe: $13 \times 17 = 221$. $13 + 17 = 30$.

Wir können aber nach dieser letzten Gleichung alle Zahlen finden, von denen ein gewisses Product, und eine gewisse

Summe gegeben ist. Jenes sey z. E. 594, dieses 51. So ist

$$x = 25\tfrac{1}{2} + \sqrt{-594 + \frac{2601}{4}}$$

$$= 25\tfrac{1}{2} + \sqrt{\frac{225}{4}} = 25\tfrac{1}{2} + \frac{15}{2} = 33$$

die andre Zahl $a - x = 51 - 33 = 18$.

Man setze $a = 70$, $b = 435$

so ist $x = \frac{a}{2} + \sqrt{-b + \tfrac{1}{4}a^2} = 35 + \sqrt{-435 + 1225}$

$$= 35 + \sqrt{790} = 35 + 28,1069 = 63,1069$$

$$y = a - x = 70 - 63,1069 = 6,8931.$$

Beyde Zahlen sind nicht genau gefunden, und werden auch nicht gefunden werden können, weil 790 keine reine Quadratwurzel hat. Indessen geben diese beyden Zahlen, durch einander multiplicirt, die Zahl 435,0021, folglich nur eine Kleinigkeit darüber.

Wir wollen $x = 12$, und $b = 52$ annehmen:

so ist $x = 6 + \sqrt{-52 + 36} = 6 + \sqrt{-16}$.

Man wird hier die Auflösung schon sogleich einzusehen glauben, und, weil $\sqrt{16} = 4$ ist, ohne Bedenken annehmen, $\sqrt{-16}$ sey -4. Alsdenn wäre $x = 6 - 4 = 2$, und $y = 12 - 2 = 10$. Allein dieß trifft in der Probe nicht zu. Denn 2×10 sind 20, und nicht 52, wie doch das Product seyn sollte. Allein man erinnere sich, daß wenn wir sagen wollten, -4 sey die Wurzel von -16, dieß eben so viel gesagt sey, als daß -4×-4 gebe -16. Allein dieß ist falsch, und -4×-4 ist eben so wol $+16$, als $+4 \times +4$. (§. 3.) Kurz, es ist unmöglich, eine Wurzel von -16, und überhaupt zwo Zahlen zu finden, die zusammen 12, und im Product 48 geben, man versuche

es

es auch, wie man wolle. Man sieht dabey überhaupt ein, daß man allemal auf eben denselben Fall gerathen werde, so oft man b oder das Product größer annimmt, als $\frac{1}{4} a^2$, das ist größer, als das Quadrat der halben Summe, oder in unserm Fall größer als 6×6.

Auch dieß ist ein wichtiger Vortheil der Algebra, daß sie uns die Fälle einsehen macht, in denen die Auflösung gewisser Aufgaben unmöglich ist, eben so wol, als diejenigen, in welchen sie sich ausführen lassen! Dieß leistet die gemeine Arithmetik nicht, wo man sich oft Zahlen unter gewissen Verhältnissen und Bestimmungen gedenkt, die doch nimmer zutreffen wollen, ohne daß man weiß, wo der Fehler in der Sache liege. Die 8te Aufgabe ist ein Beyspiel davon.

Wenn wir diese letzte Aufgabe auf die Geometrie anwenden, so entdecken wir aus eben dieser Formul die geometrische Wahrheit, daß bey allen Eintheilungen, die man sich von einer Linie gedenken kann, keine ein größeres Viereck gebe, als die Eintheilung in deren Mitte. Alle Vierecke, die man von andern Theilen machen kann, sind kleiner, als das Quadrat der Hälfte. Es ist indessen von meinem Zweck zu weit entfernt, dieses hier zu erläutern. Folgende Aufgabe wird nutzbarer scheinen.

15) Ein Kaufmann hat in eine gewisse Handlungs-Unternehmung die Summe von 30000 mℓ, welche wir mit a bemerken wollen, eingeschossen, an welcher er sogleich das erste Jahr verliert. In der Hoffnung, wieder zu gewinnen, läßt er sein Capital noch ein Jahr darinn. Da er aber findet, daß er in dem zweyten Jahr noch die Summe 6300 mℓ (b) verloren habe, scheidet er aus der Handlung aus. Die Frage ist: wie viel pro Cent er jährlich verloren habe?

Die Zahl der Procente sey x. Er hat also im ersten Jahr von 100 übrig behalten $100 - x$, woraus wir durch folgende Proportion einen Ausdruck finden können, der uns angiebt, was er vom ganzen Capital in dem ersten Jahr übrig behalten habe.

100

$$100 : 100 - x = a : a \times \frac{\overline{100 - x}}{100}$$

Allein er hat auch von dieser Summe im zweyten Jahr x pro Cente verloren. Wir setzen also:

$$100 : 100 - x = a \times \frac{\overline{100-x}}{100} : a \times \frac{\overline{100-x}}{100} \times \frac{\overline{100-x}}{100}.$$

Dieses ist ein Ausdruck für das Capital, das er am Ende des zweyten Jahres übrig behalten hat, bey welchem es deutlich ist, daß es mit dem zu Ende des ersten Jahres übriggebliebenen Capital, vermindert um b, gleich viel betrage, das ist:

$$a \times \frac{\overline{100-x}}{100} \times \frac{\overline{100-x}}{100} = a \times \frac{\overline{100-x}}{100} - b$$

Beydes dividiren wir durch a; so entsteht:

$$\frac{100 - x}{100} \times \frac{100 - x}{100} = \frac{100 - x}{100} - \frac{b}{a}$$

oder $$\frac{10000 - 200x + x^2}{10000} = \frac{100 - x}{100} - \frac{b}{a}$$

Nun wird alles multiplicirt durch 10000; so entsteht:

$$10000 - 200x + x^2 = 10000 - 100x - \frac{10000b}{a}$$

Auf beyden Seiten lassen sich 10000 und — 100 x wegnehmen, alsdenn entsteht:

$$x^2 - 100x = -\frac{10000b}{a}$$

Das erste Glied dieser Gleichung wird ein vollkommenes Quadrat, und die Gleichheit besteht noch, wenn 50 × 50 oder 2500 auf beyden Seiten hinzugethan wird.

$$x^2 - 100x + 2500 = -\frac{10000\,b}{a} + 2500$$

Folglich $$x - 50 = \sqrt{-\frac{10000\,b}{a} + 2500}$$

und $$x = 50 + \sqrt{-\frac{10000\,b}{a} + 2500}$$

Wir brauchen nun bloß für b und a die Zahlen zu setzen, welche sie darstellen; so ist:

$$x = 50 + \sqrt{-\frac{10000 \times 6300}{30000} + 2500}$$

$$= 50 + \sqrt{-2100 + 2500}$$

$$= 50 + \sqrt{400} = 50 + 20 = 70.$$

Probe: Wenn in dem ersten Jahre 70 p. C. oder 21000 mk verloren sind, so sind noch 9000 mk übrig geblieben. 70 p. C. von 9000 mk geben 6300 mk, die Summe, welche im zweyten Jahre verloren wurde.

Alles, was hier bey einem so großen Verluste von dem Capital übrig bleibt, ist 2700 mk. Allein der Umstand, daß in dem zweyten Jahre 6300 mk verloren sind, bestimmt die Sache nicht so genau, daß sie nicht noch einer andern Auflösung fähig wäre. Diese zu finden, müssen wir einen Umstand anmerken, den wir bis dahin übersehen haben, um nicht das Nachdenken der Leser mit zu vielen Wahrheiten zu überhäufen. Wir haben bis dahin dem Zeichen der Wurzel allemal das Zeichen + vorgesetzt. Wir verstehen unter $\sqrt{-\frac{10000\,b}{a} + 2500}$, oder $\sqrt{400}$ eine Größe, die

durch

durch sich selbst multiplicirt 400 giebt. Diese Grösse ist freylich 20. Allein — 20 × — 20 giebt eben so wol das Quadrat 400, als + 20 × + 20. (§. 3.) Wir hatten also noch gar keinen Grund, der Quadratwurzel von 400 lieber das Zeichen (+) vorzusetzen, als das Zeichen (—), und wir müssen es in diesen Auflösungen unentschieden lassen, ob das eine oder das andre Zeichen zu dieser Grösse gehöre. Allein die unbekannte Grösse bekömmt dadurch einen ganz andern Werth. + 50 — 20 wird 30, da wir vorhin 70 fanden. Aber auch hier behält die Algebra Recht, und jener Kaufmann kann auch 30 pro Cent in jedem Jahre, und in dem letzten 6300 verloren haben. Denn 30 pro Cent von 30000 ℳ geben in dem ersten Jahre 9000 ℳ Verlust, und lassen 21000 ℳ übrig. 30 pro Cent von 21000 ℳ, die in dem zweyten Jahre verloren sind, betragen 6300 ℳ, und nun bleiben 14700 ℳ übrig.

Diese Zweydeutigkeit in den algebraischen Auflösungen ist keinesweges als ein Mangel, sondern vielmehr für einen großen Vortheil derselben anzusehen. Wenn der Fall von der Beschaffenheit ist, die wir jetzo bemerkt haben, so ist es leicht zu bestimmen, welche von beyden Auflösungen die wahre sey. Hat jener nur 2700 ℳ übrig, so hat er 70 pro Cent, hat er 14700 ℳ übrig, so hat er nur 30 verloren. Allein, wenn man einen gewissen Fall vor sich hat, in welchem man sich allererst nach angestellter Rechnung bestimmen will, so wird man statt einer Auflösung zween Wege finden, wie die aufgegebene Sache sich ausführen lasse, und dem zufolge seine Endschliessung nehmen können. Dieses zeigt sich am deutlichsten in der Anwendung der Algebra auf die Geometrie, wo man statt einer Zeichnung allemal zwo durch dergleichen Gleichungen findet, die der Aufgabe ein Genüge thun.

Vorgesetztes in der Hauptsache aus Clairauts Algebra entlehntes Exempel ist ungemein geschickt, in die

höheren

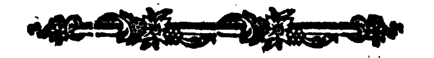
höheren Gleichungen eine Einsicht zu geben. Wenn man annimmt, daß der verlierende Kaufmann ein drittes Jahr die Gemeinschaft in der Handlung fortsetze, so entsteht eine Cubische, für das vierte Jahr eine Gleichung der vierten Potenz, u. s. f. Es sind auch bey dieser Aufgabe Fälle, von denen die Auflösung unmöglich ist, indem unter dem Wurzelzeichen eine negative Größe zu stehen kömmt. Ich würde andre in die Handlung einschlagende Aufgaben beybringen können, welche nur durch die Algebra sich genau auflösen lassen. Allein der Schritt, welchen ich in diese Wissenschaft gethan habe, ist fast größer, als ich Anfangs mir denselben vorgesetzt hatte, da ich nicht so wol eine Abhandlung der Wissenschaft selbst, als vielmehr eine allgemeine Einsicht in die Methode derselben zu geben zur Absicht habe.



Anhang

Anhang
einiger nützlicher
Arithmetischer
Aufgaben,
welche sich
auf die Geometrie
vorzüglich beziehen.

Da ich von vielen meiner Leser erwarten mußte, daß sie die Abhandlung der nützlichern und unentbehrlichern Wahrheiten ungern durch das minder nothwendige unterbrochen sehen würden, so habe ich die Abhandlung verschiedener Dinge für diesen Anhang aufbehalten. Ein Theil derselben erfodert etwas mehr Nachdenken, um nur einigermassen verstanden zu werden, und ich hoffe, diejenigen, welche in dem bisher abgehandelten den Verstand geübt haben, werden nun weniger Schwierigkeit finden, dieselben einzusehen, als sie gefunden haben würden, wenn sie dieselben schon an dem Orte, wo sie eigentlich hingehörten, angetroffen hätten. Bey diesen Zusätzen wird das wenige, was von der Algebra und der Methode, die Größen sich unter allgemeinen Zeichen vorzustellen, beygebracht ist, eine große Erleichterung schaffen, und ich werde es nun wagen dürfen, eben diese Methode zur Erläuterung gewisser Wahrheiten anzuwenden, da ich es in der Arithmetik nicht mit Nutzen zu thun vermuthen konnte. Ich werde hier die Zahl der Paragraphen der Arithmetik fortsetzen, und wenn ich in der Folge sie anzuführen Anlaß finde, nach diesen Zahlen auf sie verweisen.



I. Zusatz zu der Lehre von den Progressionen oder Reihen.

§. 40.

Zu einer arithmetischen Progression darf nur eine Zahl und der Unterscheid, den sie von einer andern Zahl haben soll, angegeben werden. Alsdenn läßt sich diese Reihe ins unendliche fortsetzen. Z. E. man gedenke sich 4, und den Unterschied 3 dazu, so ist alles Nöthige zu der Reihe: 4. 7. 10. 13. 16. 19. 22. u. s. f. angegeben. Man sieht hiebey deutlich, wie in dem zweyten Gliede der Unterscheid zu der ersten Größe einmal, in dem dritten zweymal, in dem vierten dreymal, und so fortan hinzugekommen sey. Bemerken wir die gegebne Zahl mit a, und die Differenz mit b, so können wir uns eine jede steigende Reihe unter nachfolgenden Zeichen gedenken:

$a.\ a+b.\ a+2b.\ a+3b.\ a+4b.\ a+5b.$ u. s. f.

Für eine fallende Reihe gehören folgende Zeichen:

$a+5b.\ a+4b.\ a+3b.\ a+2b.\ a+b.$
$a.\ a-b.$ u. s. f.

Man sieht hiebey ohne viele Mühe ein:

1) Daß in einer solchen Reihe das erste und letzte Glied, und überhaupt alle Glieder, die gleich weit von diesen äussersten Gliedern abstehen, gleich viel betragen. Ist die Zahl der Glieder uneben, so betragen sie je zwey und zwey, doppelt so viel, als das mittlere. Z. E. in der obengesetzten Progreßion, 4. 7 rc. ist $4+22$, $7+19$, $10+16$, und 2×13, alles $= 26$.

2) Die Summe aller Glieder findet sich also auf einmal, wenn man die Summe des ersten und letzten Gliedes durch die halbe Zahl der Glieder, oder die halbe Summe durch die ganze Zahl der Glieder multiplicirt. Z. E. in der angeführten Reihe ist $\overline{4+22} \times 3\frac{1}{2}$ oder $13 \times 7 = 91$, die Summe aller 7 Glieder.

N 2 3) Wenn

3) Wenn das erste Glied, die Differenz und die Anzahl der Glieder bekannt ist, so kann man das letzte, und überhaupt ein jedes Glied in der Reihe finden, indem man die Differenz so viel mal genommen zu dem ersten Gliede hinzuthut, als sich Glieder von dem ersten an bis zum letzten, oder dem gesuchten Gliede zählen lassen, welches allemal die Zahl der Glieder weniger eins ist. Z. E. das zehnte Glied in obiger Reihe ist $= 4 + 9 \times 3 = 31$, das funfzehnte $4 + 14 \times 3 = 46$, das 47ste $4 + 46 \times 3 = 142$ u. s. f.

Wir wollen hievon eine Anwendung in folgender Aufgabe machen:

1) Ein dreyeckigtes Dach soll mit Dachziegeln belegt werden. Die Spitze hat einen, die folgende Reihe drey Ziegel, und s. f. Bis ganz herunter werden 21 Reihen erfodert. Wie viel Ziegel kommen in die unterste Reihe, und wie viel Ziegel werden überhaupt erfodert?

Die Zahl der Ziegel ist eine Reihe von 21 Gliedern, deren erste Zahl 1, und die Differenz 2, die Zahl der Glieder 21 ist. Das letzte Glied ist also $1 + 20 \times 2 = 41$. Die ganze Zahl aller Dachziegel ist $\overline{41 + 1} \times 10\frac{1}{2}$, oder $21 \times 21 = 441$.

Allein gewöhnlich wird das Dach unten eine bestimmte Breite haben, welche nicht etwan durch die Zahl der nothwendigen Ziegel bestimmt wird, sondern diese richtet sich vielmehr nach der untern Breite des Dachs. Diese betrage 27 Fuß, welche ohngefähr für 35 ganze Dachziegel Raum geben, die Zahl der Reihen sey 19, so ist die ganze Zahl $\overline{1 + 35} \times 9\frac{1}{2}$, oder $18 \times 19 = 342$.

Wir können nach eben diesen Reguln so wol die Zahl Dachziegel in einer jeden Reihe, als überhaupt bis an eine gewisse Reihe finden. Z. E. in der 15ten Reihe sind $1 + 14 \times 2$, oder 29, und bis an diese Reihe $\overline{29 + 1} \times 7\frac{1}{2}$, oder $15 \times 15 = 225$.

Frey=

Freylich läßt sich in dieser Aufgabe nicht alles so scharf berechnen. Man wird in den Ecken bald kleine, bald größere Stücke von Dachziegeln einfügen, und deßwegen verschiedene ganze Ziegel zerbrechen müssen. Allein überhaupt wird man durch diese Rechnung die gesuchte Zahl mit hinlänglicher Genauigkeit angeben.

2) Der dreyeckigte Giebel eines Hauses, welcher 22 Fuß in der Breite, und 11 Fuß in der Höhe hat, soll in einer Mauer aufgeführt werden, die einen Stein dick ist. Die Spitze fängt mit einem halben Stein an, die zweyte Reihe hat zween, die dritte drey halbe Ziegel. Die Höhe ist 11 Fuß, auf welche (da jeder Stein mit der Kalkfuge 2 Zoll Höhe hat) 66 Reihen gehen. Die Frage ist: wie viel Steine dieser Giebel erfordere?

Die arithmetische Reihe ist: 1. 2. 3 bis auf 66 Glieder. Das 66ste Glied enthält 66 halbe Ziegelbreiten. Die Summe von allen Gliedern ist 67×33, oder 2079 halbe Ziegelbreiten, welches aber, da die Mauer einen ganzen Stein dick seyn soll, so viel ganze Ziegel beträgt.

3) Ein Brunnen soll ausgegraben werden auf 34 Ellen tief, und wird also verdungen, daß die erste Elle mit 20 ß, die zweyte 10 ß mehr, die dritte wieder um so viel mehr, und s. f. bezahlt werde. Die Frage ist: was wird der ganze Brunnen zu graben kosten?

Das erste Glied ist also in dieser Reihe 20 ß, die Differenz 10 ß. Das 34ste Glied $20 + 33 \times 10$ ß $= 350$ ß. Das erste und letzte Glied zusammen betragen 370 ß. Die ganze Summe ist $370 \times 17 = 6290$ ß, oder 391 m̃ 2 ß.

§. 41.

Ich habe der Berechnung der geometrischen Progressionen freylich keine so große Brauchbarkeit in den Geschäften des bürgerlichen Lebens beylegen können, als die, welche die arithmetischen haben, die auch durch die eben jetzt ausge-

führten Aufgaben bestättigt wird. Indessen sind doch viele Vorfälle, wo man wenigstens zum Vergnügen dergleichen Reihen ganz, oder auch einzele Glieder derselben geschwinde berechnen zu können wünscht, wozu ich oben die Reguln nicht habe beybringen können. Man wird auch viele mathematische Berechnungen, und insonderheit die, welche von den Erfindern der Logarithmen angewandt sind, besser verstehen können.

In einer geometrischen Reihe, z. E. 3. 6. 12. 24. 48. 96. 192. 384. 768. 1536. u. s. f., ist das zweyte Glied das Product des ersten Gliedes durch den Exponenten, das dritte Glied entsteht aus dem Product desselben durch das Quadrat des Exponenten, u. s. f. Hier ist z. E. $6 = 3 \times 2$. $12 = 3 \times 2 \times 2$. $24 = 3 \times 2 \times 2 \times 2$. Wenn wir das erste Glied a, den Exponenten e nennen, so läßt sich diese Reihe so wol als eine jede andre durch nachfolgende Zeichen ausdrücken: $a. ae. ae^2. ae^3. ae^4. ae^5. ae^6. ae^7$ und s. f.

Wir können hieraus folgende Eigenschaften einer geometrischen Reihe bemerken:

1) Das letzte Glied entsteht, wenn das erste durch den Namen oder Exponenten des Verhältnisses so oft multiplicirt wird, als Glieder von dem ersten bis zum letzten vorhanden sind, oder so viel mal, als die Reihe Glieder hat, weniger einmal. Z. E. in vorgesetzter Zahlreihe entsteht das zehnte Glied, wenn 3 durch 2 neunmal multiplicirt wird. Eben so läßt sich ein jedes Glied bestimmen, wenn ich das erste so viel mal durch den Exponenten multiplicire, als ich Glieder von dem ersten an bis zu dem gesuchten zähle. Ich werde z. E. das achte Glied 384 finden, wenn ich das erste siebenmal durch 2 multiplicire.

2) Wenn man das erste nnd letzte Glied, und überhaupt zwey Glieder, die gleich weit von den äussersten Gliedern abstehen, durch einander multiplicirt, so kömmt gleiches heraus, nämlich das Quadrat des ersten Gliedes so oft mit dem

dem Exponenten multiplicirt, als Glieder der Verhältniß, weniger eins, sind. Z. E. $a \times ae^7$ ist $a^2 e^7$. $ae \times ae^5$ ist $= a^2 e^7$, und so ferner.

3) Wenn wir eine Reihe durch allgemeine Zeichen auf vorhin bemerkte Art ausdrücken, und die Exponenten, mit welchen e bezeichnet ist, bemerken, so finden wir, daß dieselben in der arithmetischen Progreßion 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. u. s. f. fortgehen. Das erste Glied a, welches kein e bey sich hat, weil es noch nicht durch den Exponenten multiplicirt ist, bekommt alsdenn 0 bey sich. Wir haben also an denselben die natürlichen Logarithmen dieser Glieder der geometrischen Progression.

4) Wenn der algebraische Ausdruck für eine jede solche Progression ist: $a.\ ae.\ ae^2.\ ae^3.\ ae^4.\ ae^5.\ ae^6$ u. s. f. so ist er für eine mit eins anfangende Progression schlechthin: $1.\ e.\ e^2.\ e^3.\ e^4.\ e^5.\ e^6$ u. s. f. (Denn nun ist $ae = 1e = e$, $ae^2 = 1e^2$, e^2 u. s. f.) Die Logarithmen dazu: 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. Hier ist es klar, daß man ein jedes Glied finden könne, so bald man diejenigen durch einander multiplicirt, deren Logarithmen zusammen genommen dessen Stelle von dem ersten an bezeichnen. Z. E. das eilfte Glied von dem ersten an, oder das zwölfte von Anfang wird e^{11} seyn, welches durch die Multiplication von e^5 durch e^6 entsteht. Z. E. in der Progression:

1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. 256. 512 u. s. f.
0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9

ist das eilfte Glied vom ersten an $32 \times 64 = 2048$. Denn die Logarithmen von 32 und 64 haben 11 in der Summe. Das 24ste würde die Cubiczahl von 256 oder 16777216 seyn. In dieser Progression würde ich an das 64ste Glied vom Anfang an gelangen, und nach §. 42. folgender Regul die ganze Summe finden können, wenn ich dieß 24ste Glied quadrirte, welches mir das 48ste, oder von Anfang an das 49ste geben würde, dieß durch das 11te oder durch 2048,

 und

und denn noch einmal durch das 4te oder durch 16 multiplicirte. Denn die Logarithmen dieser Glieder 48. 11 und 4 geben 63, den Logarithmen des 64sten Gliedes vom Anfange.

5) Wenn das erste Glied nicht 1, sondern irgend eine andre Zahl ist, so behält die Progreßion den algebraischen Ausdruck:

$a.\ ae.\ ae^2.\ ae^3.\ ae^4.\ ae^5.\ ae^6.\ ae^7.\ ae^8$ u. s. f.

Hier würde nun, wenn ich voriger Regul folgen wollte, um z. E. das 11te Glied vom ersten an zu finden $ae^5 \times ae^6$ geben a^2e^{11}, da doch dieses den Ausdruck ae^{11} haben sollte. Es ist aber klar, daß ich dieß Product a^2e^{11} nur durch a wieder dividiren dürfe, um ae^{11} oder das Glied, welches ich eigentlich wissen will, zu haben. Oder, um kürzer zu gehen, werde ich eins von denen Gliedern, welche ich wähle, durch das erste vorher dividiren, und denn das andre dadurch multipliciren. Denn $\frac{ae^5}{a} \times ae^6$ ist $= e^5 \times ae^6 = ae^{11}$. Laßt uns die S. 198. zum Beyspiel genommene Progreßion mit ihren Logarithmen bemerken:

3. 6. 12. 24. 48. 96. 192. 384. 768. 1536.
0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

Wenn wir nun z. E. das 13te Glied von dem ersten an kennen wollen, so nehmen wir zwey Glieder, deren Logarithmen 13 mit einander ausmachen, z. E. das 6te und 7de von dem ersten an, und multipliciren dieselben durch einander. Sie geben 73728. Dieß dividirt durch 3, giebt 24576, das gesuchte Glied. Wenn wir aber dieses durch das 9te multipliciren, und durch 3 dividiren, so haben wir das 22ste von dem ersten an 12582912. Wenn wir dieses durch sein Drittheil (weil das erste Glied 3 ist) multipliciren, so haben wir das 44ste, thun wir dasselbe noch einmal, das 66ste u. s. f. Dieses setzt uns in den Stand, alle Glieder einer Reihe zu finden, ohne die Multiplication weitläuftig

weitläuftig durch alle Glieder derselben bis zu dem Gliede, welches wir suchen, fortsetzen zu dürfen.

§. 42.

Die Summe aller Zahlen in einer Progression zu finden, dient folgende Regul:

Man nehme den Unterschied zwischen dem ersten und letzten Gliede des Verhältnisses, und dividire ihn mit dem Namen des Verhältnisses, weniger eins; zu diesem Quotienten addire man das letzte Glied. Z. E. wenn wir die Summe der vorerwähnten Progression suchen wollen, so nehmen wir 1533 als den Unterschied von 3 und 1536; dieses dividirt durch 2 — 1, das ist 1, bleibt 1533. Hiezu setzen wir 1536, so ist 3069 die Summe der ganzen Progression.

Die bis ins unendliche abnehmenden Reihen haben viel sonderbares, und man macht von denselben in der höhern Mathematik häufig Gebrauch. Man nehme z. E. folgende Reihe:

$$1.\ \tfrac{1}{2}.\ \tfrac{1}{4}.\ \tfrac{1}{8}.\ \tfrac{1}{16}.\ \tfrac{1}{32}.\ \text{u. s. f.}$$

Die 98ste Figur stellt dieselbe in der Linie AB vor, wo AB 1, AC $\frac{1}{2}$, CD $\frac{1}{4}$, u. s. f. vorstellt. Man wird bey dieser fortgesetzten Eintheilung dem Punct B immer näher kommen, bis zuletzt der übrigbleibende Theil unendlich klein wird, da denn die ganze Reihe die erste Linie AB zur Summe hat. Eben dieses findet sich in den Zahlen nach folgender Regul, die für alle abnehmende Reihen gilt:

> Wie sich der Unterschied des ersten und des zweyten Gliedes zu dem zweyten Gliede verhält, so verhält sich der Unterschied des ersten und letzten Gliedes zu der Summe aller Glieder, weniger das erste.

Z. E. in der Reihe: $1.\ \frac{2}{3}.\ \frac{4}{9}.\ \frac{8}{27}.\ \frac{16}{81}$ ist die Summe $2\frac{49}{81}$. Denn $1 - \frac{2}{3} : \frac{2}{3} = 1 - \frac{16}{81} : \frac{130}{81}$ oder $\frac{1}{3} : \frac{2}{3} = \frac{65}{81} : \frac{130}{81} = 1\frac{49}{81}$. Hiezu thue man 1, so kömmt die jetzt bemerkte Summe.

Ist nun das letzte Glied unendlich klein, oder so viel wie 0, so giebt es keinen Unterschied des ersten und letzten Gliedes, sondern die Proportion wird für eben gesetzte Reihe diese: $\frac{1}{3} : \frac{2}{3} = 1 : 2$, und diese Reihe wird ins unendliche fortgesetzt $2 + 1$, oder dreymal so groß, als das erste Glied 1. Wir können davon die Anwendung in folgenden Aufgaben machen:

1) Ein Schiff A verfolgt das andere B, das eine Meile voraus ist, in freyer See. Jenes segelt um die Hälfte geschwinder, als dieses, oder, indem A eine Meile segelt, ist B nur $\frac{2}{3}$ fortgekommen; wenn jenes diese $\frac{2}{3}$ Meilen zurückgelegt, ist dieses $\frac{4}{9}$ Meilen weiter, u. s. f. Die Frage ist: wo wird A das Schiff B einholen?

Hier giebt die vorhin erklärte geometrische Reihe die Entfernung beyder Schiffe, welche sie von Zeit zu Zeit haben. Wenn A das Schiff B einholt, so ist diese Entfernung 0. Sie wird dieses, wenn die Reihe bis ins unendliche fortgesetzt wird; das ist, wenn die ganze Summe 3 wird. Das Schiff A wird also B am Ende der dritten Meile einholen.

Wenn das Schiff A eine Meile machte, indem B $\frac{3}{4}$ Meilen macht, so hätten wir die Reihe: $1.\ \frac{3}{4}.\ \frac{9}{16}.\ \frac{27}{64}$ rc. und die Proportion: $\frac{1}{4} : \frac{3}{4} = 1 - 0$, oder $1 : 3$, das ist zu der Summe aller Glieder weniger 1. Dieses 1 thue man hinzu, so ist die ganze Summe 4, und das Schiff B wird am Ende der vierten Meile eingeholt.

Die Reihe $1.\ \frac{3}{5}.\ \frac{9}{25}.\ \frac{27}{125}$ rc. giebt die Proportion $\frac{2}{5} : \frac{3}{5} = 1 : \frac{3}{2}$. Die ganze Summe ist also $1 + \frac{3}{2}$, und das Schiff B wird nach drittehalb Meilen eingeholt.

2) Man kennt aus vielen Schriften das Sophisma des Zeno, eines griechischen Philosophen, welcher als Urheber der stoischen Secte bekannt ist, durch welches er die Unmöglichkeit der Bewegung zu beweisen glaubte:

Achilles verfolgt eine Schildkröte, welche eine Meile vor ihm voraus hat. Jener läuft zehnmal so geschwind, als diese. Allein diese bleibt ihm allemal um den zehnten

ten Theil des Weges voraus, den er zurückgelegt hat. Achilles, sagte Zeno, wird also ins unendliche fortlaufen, und die Schildkröte niemals erreichen.

Die Entfernung des Achilles von der Schildkröte nimmt in dieser Progreßion ab: $1. \frac{1}{10}. \frac{1}{100}. \frac{1}{1000}$ ꝛc. Diese Reihe macht keine unendliche Linie aus, sondern hat eine gewisse Summe, wenn das letzte Glied derselben unendlich klein wird. Wir finden diese Summe durch folgende Proportion: $1 - \frac{1}{10}$ oder $\frac{9}{10} : \frac{1}{10} = 1 - 0$ oder $1 : \frac{1}{9}$, als der Summe aller Glieder, ausser dem ersten. Hiezu thue man 1, so ist $1\frac{1}{9}$ die ganze Summe, und die Schildkröte ist am Ende von einer Meile und $\frac{1}{9}$ würklich eingeholt.

3) An unsern Uhren geht der Minutenzeiger 12mal so geschwind, als der Stundenzeiger. Wenn beyde auf XII Uhr stehen, und nun fortgehen, so ist die Frage: wo werden beyde wieder zusammen kommen?

Wenn der Minutenzeiger wieder an XII Uhr kömmt, so steht der Stundenzeiger bey I. Indem jener so viel weiter rückt, ist dieser um $\frac{1}{12}$ dieses Bogens, das ist, um $\frac{1}{144}$ vom ganzen Circul weiter fort. Wir haben also die Reihe $1. \frac{1}{12}. \frac{1}{144}. \frac{1}{1728}$ ꝛc., deren Summe wir durch diese Proportion finden: $\frac{11}{12} : \frac{1}{12} = 1 : \frac{1}{11}$, wozu wir 1 hinzuthun. Der Minutenzeiger erreicht also den Stundenzeiger wieder, wenn jener um $1\frac{1}{11}$ des ganzen Circuls fortgegangen ist.

Anmerkung.

Ich füge hier den algebraischen Beweis beyder oben angewandten Reguln bey.

Wir nehmen eine Progreßion von fünf Gliedern an: $a. ab. ab^2. ab^3. ab^4.$ und multipliciren die vier ersten Glieder mit $b - 1$.

$$\begin{array}{r} a + ab + ab^2 + ab^3 \\ b - 1 \\ \hline -a - ab - ab^2 - ab^3 \qquad\quad \\ + ab + ab^2 + ab^3 + ab^4 \\ \hline -a \quad * \quad * \quad * \quad + ab^4 \end{array}$$

Dieß

Dieß ist der Unterschied des ersten und letzten Gliedes, welcher folglich dem Product der Summe der vier ersten Glieder durch den Exponenten weniger eins gleich ist. Wird nun $ab^4 - a$ durch $b - 1$ dividirt, so kömmt $a + ab + ab^2 + ab^3$, oder die Summe der vier ersten Glieder, zum Quotienten, zu welchem, um die ganze Summe zu haben, nur noch das letzte Glied hinzu gethan werden muß. Dies war die erste Regul.

Die zweyte Regul in Ansehung der abnehmenden Reihen erhellt auf folgende Art. Wir drücken eine solche abnehmende Reihe durch folgende Zeichen aus:

$$a. \quad \frac{a.}{b} \quad \frac{a.}{b^2} \quad \frac{a.}{b^3} \quad \frac{a.}{b^4} \quad \&c.$$

Der algebraische Ausdruck für die Regul ist folgender:

$$a - \frac{a}{b} : \frac{a}{b} = a - \frac{a}{b^4} : \frac{a}{b} + \frac{a}{b^2} + \frac{a}{b^3} + \frac{a}{b^4}.$$

Ist diese Proportion wahr, so ist (§. 7. Arithm.)

$$\overline{a - \frac{a}{b}} \times \overline{\frac{a}{b} + \frac{a}{b^2} + \frac{a}{b^3} + \frac{a}{b^4}} = \frac{a}{b} \times \overline{a - \frac{a}{b^4}}$$

Man multiplicire das erste und letzte Glied.

$$\begin{array}{rrrrr}
 & \frac{a}{b} & + \frac{a}{b^2} & + \frac{a}{b^3} & + \frac{a}{b^4} \\
 & & & a & - \frac{a}{b} \\
\hline
 & - \frac{a^2}{b^2} & - \frac{a^2}{b^3} & - \frac{a^2}{b^4} & - \frac{a^2}{b^5} \\
+ \frac{a^2}{b} & + \frac{a^2}{b^2} & + \frac{a^2}{b^3} & + \frac{a^2}{b^4} & \\
\hline
\end{array}$$

Das Product ist $= \frac{a^2}{b} \quad * \quad * \quad * - \frac{a^2}{b^5}$

Ferner

Ferner giebt $a - \frac{a}{b^4}$

multiplicirt durch $\frac{a}{b}$

$$\frac{a^2}{b} - \frac{a^2}{b^5}$$

Beydes ist einander gleich, und folglich die Proportion wahr.

Man kann diese Reguln anwenden, um eine Progression sogleich zu summiren, nachdem man durch die oben angewiesenen Wege nur die ersten beyden Glieder und das letzte gefunden hat. Wir wollen dieses noch bey einer Aufgabe zeigen:

(4) Es sey die Frage: wie zahlreich wird die Nachkommenschaft von einer Hündinn in zehn Jahren werden können, in der Voraussetzung, daß dieselbe zween Hunde und drey Hündinnen jährlich werfe, und diese jährlich so, wie die Mutter, sich auf eben die Art vermehren, und alle das Leben behalten?

Die erste Hündinn wirft im ersten Jahre 5. Drey von diesen mit der ersten werfen im zweyten Jahre 4 × 5, oder 20. 12 von diesen und 4 vom vorigen Jahre werfen im dritten Jahre 16 × 5, oder 80. 48 von diesen und 16 vom vorigen Jahre 64 × 5, oder 320. Man sieht wol, daß hier folgende Progression entstehe:

5. 20. 80. 320.

deren zehntes Glied durch vorhin erklärte Wege 1,310620 groß gefunden wird. Um die Summe der ganzen Progression zu finden, müssen wir 5 davon abziehen. Dieses giebt 1,310715. Dies wird durch den Namen der Verhältniß weniger 1, das ist durch 3, dividirt. Der Quotient ist 436905.

Das letzte Glied 1,310720.

Summe = 1,747625.

Zur Uebung will ich den Liebhabern dieser Art Rechnungen noch ein Exempel, doch ohne Auflösung, sondern nur die blossen data dazu, aufgeben:

Jedermann kennt das zum Tödten der Zeit erfundene Handspiel, den sogenannten Nürnberger Tand. In einer Gesellschaft war die Frage: wie viel Zeit wol dazu gehörte, diesen Tand, wenn er 50 Ringe hatte, abzuspielen. Einer aus

aus der Gesellschaft sagte, eines Menschen Lebenszeit reichte nicht zu. Hat der Mann zu viel oder zu wenig gesagt?

Gewöhnlich wird dieser Tand mit zwölf Ringen gemacht, die ein geübter in einer Viertelstunde abspielen kann. Dreyzehn Ringe erfodern die gedoppelte Zeit, vierzehn würden eine ganze Stunde erfodern. Dieß mag das erste Glied einer Progression seyn, die nun für 15 Ringe 2, für sechzehn 4 hat, und bis für den funfzigsten Ring in 37 Gliedern steigt, die aber, um die ganze Zeit zu haben, alle summirt werden müssen.

Ich halte diese Exempel und Erläuterungen für hinlänglich, um eine Lehre aufzuklären, deren Nützlichkeit für viele Fälle unstreitig ist, die unsre Wißbegierde rege machen können, und deren Gebrauch in der höhern Mathemathik sehr häufig ist, von der ich aber doch vorhin schon eingeräumet habe, daß sie in den Geschäften des bürgerlichen Lebens nur selten einige Anwendung finde.

II. Zusatz zu der Quadrat-Rechnung.

§. 43.

Ich habe S. 61. eine Berechnung für das hole Bataillon quarré in diesem Anhange nachzuholen versprochen. Hier ist sie für zween dabey vorkommende Fälle:

1. Das bataillon quarré soll aus einer bestimmten Mannschaft, z. E. 1364 Mann, bestehen. Es ist die innere Seite bestimmet, wie viel Mannschaft sie halten solle, und die äussere Seite wird gesucht. Jene, die innere Seite, sey in unserm Exempel 22 Mann.

Es ist klar, daß die erste fehlende Linie hinter diesen 22 Mann 2 weniger, das ist 20 Mann, halten würde. Das, was also dem Bataillon inwendig fehlt, ist das bataillon quarré einer Linie von 20 Mann, das ist das Quadrat 400. Wären diese 400 da, so würde das volle Quadrat aus 400 und 1364, das ist 1764 Mann bestehen. Man nehme also diese ganze Zahl, und ziehe aus derselben die Wurzel, welche 42 ist. Dem zufolge wird das Quadrat noch von der innern Linie bis zur äussern 11 Mann hoch stehen.

Hätten

Hätten wir eine Zahl gewählt, welche mit dem innern Quadrat zusammengethan eine unebene Zahl zur Wurzel hätte, so würden wir nicht zum Zweck kommen. Z. E. unsre Zahl wäre 1625 Mann, diese würde mit der Zahl des leeren Quadrats 400 zusammengethan 2025 Mann machen, wovon die Wurzel 45 ist. Es ist aber unmöglich, die innere Reihe 22 auf 45 anwachsen zu machen, da der Unterschied aller Reihen 2 ist. Wir würden also lieber zur innern Reihe 22 nehmen müssen; alsdenn ist das fehlende Quadrat das von 21, oder 441. Dieses mit 1623 zusammengethan, giebt 2066, welches zur Wurzel 45 mit einem Ueberschuß von 41 Mann giebt, welche dann entweder inwendig mit gestellt werden, oder eine bequemere Zahl gesucht werden muß.

2. Oder die Mannschaft des holen bataillon quarré ist zwar gegeben; man soll aber dasselbe bis zu einer bestimmten Grösse ausdehnen, daß es so groß als ein volles bataillon quarré von einer gegebenen Zahl Mannschaft erscheine. Z. E. ein General hat 2025 Mann, will aber sein Bataillon bis zu der Grösse eines vollen von 5000 Mann ausdehnen.

Dieser Fall ist leichter, zumal wenn der Officier Quadrat-Tafeln zur Hand hat. Hier sucht er eine Quadrat-Zahl, die der aufgegebenen 5000 am nächsten kömmt. Diese ist 5041. Es ist ihm ja einerley, ob sein Bataillon noch 41 Mann stärker scheine, wiewol kein menschliches Auge dieß unterscheiden wird. Bey 5041 findet er die Wurzel 71. Wenn er demnach 71 Mann in der äussersten Linie stellt, so ist noch die innere Linie zu finden. Er suche den Unterschied seiner Mannschaft und des supponirten vollen Quadrats. Dieser ist 3016. 3025 hat zur Wurzel 55. Seine innerste Linie müßte also 57 Mann halten. Er hat also 9 Mann übrig. Denn ihm fehlen nur 3016 Mann an dem vollen Quadrat. Er kann aber seine Mannschaft nur 8 Mann hoch stellen. Ist ihm dieses zu schwach,

schwach, so muß er auf ein volles Bataillon von einer geringern Zahl hinaus rechnen.

Anmerkung.

Wem diese kriegerischen Exempel nicht gefallen, der nehme dafür, was er sonst lieber will. Z. E. eine Anzahl Bäume, die er im Quadrat pflanzen will, doch so, daß ein leerer Platz inwendig bleibe, dessen Seite entweder gegeben ist, oder, wenn die äussere Seite bestimmt ist, gesucht werden muß.

§. 44.

Wenn in den jetzt ausgeführten Exempeln die Wurzel sich nicht rein finden will, so ist nicht weiter zu kommen, sondern man muß sich helfen, so gut man kann. Denn die Soldaten, oder auch die Bäume, lassen sich nicht in Stücke theilen, so daß sie noch zu dem Zweck der Aufgabe brauchbar blieben.

Wenn ich indessen nach der Wurzel der Zahl 11 frage, das ist, nach derjenigen Zahl, welche durch sich selbst multiplicirt 11 giebt, so ist es mir zu wenig, zu wissen, daß drey mal drey eilf weniger zwey, und vier mal vier eilf und fünf dazu giebt. Auf der andern Seite sehe ich ein, daß, wenn drey einen Bruch bey sich hätte, ein grösseres der Zahl 11 näher kommendes Quadrat entstehen würde. Dieser Bruch ist also zu suchen.

Ich habe in dem zweyten Abschnitt noch nichts von den Potenzen der Brüche, vielweniger von der Ausziehung der Wurzeln aus ihnen etwas erwähnen können, weil die Lehre von den Potenzen überhaupt noch folgen sollte. Jetzt ist der Ort, dieses nachzuholen.

§. 45.

Das Quadrat eines Bruchs entsteht, wie das von andern, durch Multiplication eines Bruches durch sich selbst, und folglich, wenn der Zähler durch den Zähler und der Nenner durch den Nenner multipliciret wird. Z. E. das Quadrat von $\frac{2}{3}$ ist $\frac{4}{9}$.

Dies ist auch bey unreinen Brüchen wahr. Das Quadrat von $\frac{4}{3}$ würde folglich $\frac{16}{9}$ seyn. Das Quadrat von $3\frac{1}{3}$ oder $\frac{10}{3}$ ist $\frac{100}{9}$, das ist $11\frac{1}{9}$, folglich wenig mehr als 11; und demnach wäre die Quadratwurzel von 11 in $3\frac{1}{3}$ ziemlich genau gefunden.

Wenn das Quadrat eines Bruchs nochmals durch den Bruch selbst multipliciret wird, so entsteht der Cubus des Bruchs. So ist z. E. der Cubus von $\frac{2}{3}$ der Bruch $\frac{8}{27}$. Und so werden durch wiederholte Multiplication eines Bruchs durch sich selbst dessen höhere Potenzen gefunden.

Man darf sich nicht wundern, daß die Potenzen reiner Brüche kleiner, als die Wurzeln sind. Denn es sind die Producte eines Bruchs durch einen Bruch, und folglich Theile eines Theils oder einer Grösse, die weniger als Eins betrug. Allein die Potenzen unreiner Brüche steigen im Zahlwehrt, weil hier eine Grösse, die mehr als Eins war, mehr als einmal und noch Theile dazu genommen werden.

Indessen wird in geometrischen Exempeln das Quadrat oder der Cubus von einem Theile einer bestimmten Linie ein Quadrat oder Cubus, die ihr bestimmtes Verhältniß zu dem Quadrat und Cubus der ganzen Linie, aber gar kein Verhältniß zu der Linie selbst haben. Z. E. wenn ich $\frac{7}{10}$ eines Fusses, das ist 7 Zolle quadrire, so kommen $\frac{49}{100}$ eines Quadrat-Fusses, das ist 49 Quadrat-Zolle nach geometrischer Eintheilung, oder beynahe die Hälfte des Quadrat-Fusses heraus. Cubire ich sie, so entstehen 343 Tausendtheile, oder Cubic-Zolle, das ist etwas mehr als ein Drittheil eines Cubic-Fusses. Aber von jenem Quadrat so wenig, als von diesem Cubus kann ich sagen, daß sie kleiner seyn, als ihre Wurzel, auch nicht von dem Cubus, daß er kleiner als sein Quadrat sey. Sie haben vielmehr gar kein Verhältniß zu einander.

§. 46.

Hieraus läßt sich nun umgekehrt die Regel leicht abnehmen, wie aus einem Bruche die Wurzel zu ziehen sey, nem-

lich, daß aus dem Zähler und dem Nenner besonders die Wurzel gezogen werden müsse. Z. E. von $\frac{16}{25}$ ist die Wurzel $\frac{4}{5}$. Denn 4 ist der Zähler, der durch sich selbst multiplicirt den Zähler 16, und 5 der Nenner, der durch eben den Weg den Nenner 25 giebt.

Um also die reine Wurzel eines Bruchs zu haben, muß es zutreffen, daß beydes der Zähler und der Nenner reine Quadrate seyn. Dies fügt sich aber noch seltener, als man in ganzen Zahlen reine Quadrate bekömmt. Z. E. aus $\frac{16}{27}$ oder $\frac{17}{25}$ wird sich keine reine Wurzel ziehen lassen. Noch schlimmer aber, wenn weder der Zähler noch der Nenner reine Quadrat-Zahlen sind, z. E. in dem Bruche $\frac{17}{27}$.

§. 47.

Bey Decimal-Brüchen sind jedesmal die Nenner, in welchen die Einheit eine ebene Zahl von Nullen bey sich hat, reine Quadrate, die andern nicht. Nun habe ich §. 21. die Rechnung angegeben, wie man einen jeden Bruch in einen Decimal-Bruch mit jedem beliebigen Nenner verwandeln könne. Durch diese Rechnung wird z. E. der Bruch $\frac{17}{27}$ in den Decimal-Bruch 0,62 oder noch genauer in den Bruch 0,6296 verwandelt. Die Wurzel des Nenners 100 ist 10, und die von dem Nenner 10000, den dieser Bruch in dem letzten Ausdruck hat, ist 100. Aber des Zählers Wurzel ist noch immer besonders zu suchen. Sie ist für den Zähler 62 wenig geringer als 8, und ich kann den Bruch $\frac{8}{10}$ als die Wurzel des in ein Decimal verwandelten Bruchs $\frac{17}{27}$ schon obenhin annehmen. Genauer aber treffe ich es, wenn ich aus dem Zähler 6296 die Wurzel 79 ziehe, und also den Decimal-Bruch 0,79 für die Wurzel des Bruchs $\frac{17}{27}$ annehme. Bin ich damit nicht zufrieden, so berechne ich diesen Bruch als ein Decimal mit Million-Theilchen. Er bekömmt alsdenn den Nenner 0,629629, von welchem die Wurzel etwas grösser als 0,793 ist. Je genauer ich also den Bruch in Decimalen berechne,

berechne, desto schärfer läßt sich auch die Wurzel seines Zählers berechnen, die allein eine Berechnung erfordert, weil der Nenner so bestimmt ist, daß ich seine Wurzel 10, 100, 1000 u. s. f. schon zum voraus weiß.

§. 48.

Wir wollen dieses auf jene ganze Zahl 11 anwenden, die wir nach Willkühr zu einem unreinen Decimal-Bruch $\frac{1100}{100}$, $\frac{110000}{10000}$ u. s. f. machen können. In dieser Form kömmt in der Wurzel der Nenner 10, 100 u. s. f. Aus dem Zähler 1100, 110000, 11000000 u. s. f. muß die Wurzel durch Berechnung gesucht werden. Von 1100 ist sie mit 3,3, von 110000 mit 3,31, von 11000000 mit 3,316 beynahe getroffen. Ich kann diese Rechnung so weit treiben, als ich will, wenn ich der Zahl immer zwo Nullen anhänge, das ist, sie als einen Decimal-Bruch ansehe, der im Nenner immer zwey Nullen mehr, und folglich im Nenner der Wurzel eine Nulle mehr bekömmt.

Man wende diese Erläuterung auf dasjenige Exempel an, welches oben (Geom. §. 42. und 46.) angegeben ist; so wird die dort ohne Beweis gegebene Regel zur Proportionirung ähnlicher Flächen nunmehr hinlänglich aufgeklärt seyn.

III. Von der Berechnung der Cubic-Wurzel.

§. 49.

Es ist freylich der beste Weg, um sich von dem Anwachsen einer Cubic-Zahl durch Zusatz einer oder mehrerer Einheiten eine deutliche Vorstellung zu machen, wenn man einen zerschnittenen Cubus von Holz unter Augen nimmt, und sich daran vorstellt, wie viel auf allen Seiten angelegt werden muß, um, wenn z. E. die Seite des Würfels 10 Theile hat, und noch einige Theile, (wir wollen 3 setzen) hinzukommen, den Cubus der Seite 13 vollständig zu machen. Ich bin gewohnt, im mündlichen Vortrag die Erläuterung dieser Lehre auf diese Art durch sinnliche Vor-

stellungen anzufangen, wenn gleich keiner meiner Zuhörer zu der Zeit eine Kenntniß der Geometrie hat. In dem schriftlichen Vortrage muß ich diesen Vortheil aufgeben.

Indessen nehme mein Leser, der nun schon weiß, was eine Cubic-Zahl sey, und daß 10 mal 10 mal 10 tausend mache, die Zahl 13 vor, und multiplicire sie zweymal durch sich selbst. Er gelangt durch diesen kleinen Zusatz zu einem mehr als gedoppelt grösseren Cubus, nemlich 2197. Wie dies zugehe, ist nicht schweer zu bemerken, wenn man die Rechnung aufmerksam überlegt.

Als 13 durch sich selbst multipliciret ward, entstand ein Quadrat, das 2 mal 10 mal 3, und 3 mal 3 mehr hatte, als das Quadrat von 10 allein. (Arithm. §. 35.)

Und dies um so viel grössere Quadrat ward nun zehnmal und noch dreymal genommen.

Bestimmter läßt sich dies einsehen, wenn man nach der Buchstaben-Rechnung zu multipliciren weiß. Wenn dann 10 durch a und 3 durch b ausgedruckt wird, so stellt sich der Cubus von a + b unter folgendem Ausdruck dar: $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Diesen Ausdruck wollen wir analysiren.

a^3 bedeutet den Cubus von 10 oder	1000
$3a^2b = 3 \times 10 \times 10 \times 3$ oder	900
$3ab^2 = 3 \times 10 \times 3 \times 3$ oder	270
$b^3 =$ den Cubus von 3 oder	27
Die Summe von allem ist	2197

Dies trifft für alle Zahlen von zwo Ziefern zu. Z. E. für die Cubic-Zahl von 87 bedeutet

$a^3 = 80 \times 80 \times 80$	—	512000
$3a^2b = 3 \times 80 \times 80 \times 7$	—	134400
$3ab^2 = 3 \times 80 \times 7 \times 7$	—	11760
$b^3 = 7 \times 7 \times 7$	— —	343
	zusammen	658503

2) Noch

2) Noch eine leichte Bemerkung ist diese: Alle Cubic-Zahlen unter 1000 haben eine Wurzel unter 10. Denn der Cubus von 10, der kleinsten Zahl, die mit zwo Ziefern geschrieben wird, ist 1000, die kleinste Zahl, die mit 4 Ziefern geschrieben wird.

Alle Cubic-Zahlen von 1000 bis 1000000 haben eine Wurzel zwischen 10 und 100, aus ähnlichen Gründen.

Eben so sind die Cubic-Zahlen zwischen einer und 1000 Millionen, und zwischen diesen und einer Billion u. s. f. zu beurtheilen.

Man siehet es also einer jeden Cubic-Zahl aus der Zahl ihrer Ziefern gleich an, wie viel Ziefern ihre Wurzel habe.

3) Es ist ferner klar, daß, wenn man die Cubic-Zahlen der Einer aus folgendem Täfelein weiß:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	8	27	64	125	216	343	512	729

man die von allen Zehnern, Hundertern, Tausendern u. s. f. wisse, und nur jedesmal drey Nullen oder Zahlstellen mehr dahinter gehören. Z. E. weil $2 \times 2 \times 2 = 8$, so ist $20 \times 20 \times 20 = 8000$. Aber auch in der Zahl 21837 kann von nicht mehr als 2 Zehnern die Cubic-Zahl stecken. Denn 30 hat zur Cubic-Zahl 27000. In der Zahl 300,000000 kann von nicht mehr, als von 600, die Cubic-Zahl stecken. Denn 700 geben 343,000000. Was also diese Zahlen größer sind, kömmt von den geringern Theilen ihrer Cubic-Wurzeln her.

§. 50.

Auf diese Bemerkungen gründen sich diejenigen Regeln zur Ausziehung einer Cubic-Wurzel von zwo oder mehrern Zahlen, die jedes mathematische Lehrbuch enthält, deren

Ausübung ich aber in zwey Exempeln darstellen, und diese Exempel analysiren will:

I. (a. b. = 87)

	658	503
$a^3 =$	512	---
	146	503
divisor $3a^2 =$	(19	2)
$3a^2b =$	134	4--
$3ab^2 =$	11	76-
$b^3 =$		343
	146	503

abgezogen bleibt 0.

II. (156

	3	796	416
$a^3 =$	1	---	---
	2	796	---
divisor $3a^2 =$	(	3)--	---
$3a^2b =$	1	5--	---
$3ab^2 =$		75-	---
$b^3 =$		125	---
	2	375	
		421	416
div. $3 \times 150 \times 150 =$		(67	5)--
$3 \times 150 \times 150 \times 6 =$		405	0--
$3 \times 150 \times 6 \times 6 =$		16	20-
$6 \times 6 \times 6 =$			216
		421	416

0.

1) Die

1) Die Zahl wird von hinten zu in Classen von drey Ziefern getheilt, um zu sehen, wie viel Theile die Wurzel bekäme. Diese Wurzel mußte in dem ersten Exempel zwey, in dem andern drey Theile haben. In dem ersten konnte sie nicht drey Zahlen haben; sonst müßte die Cubic-Zahl grösser als eine Million gewesen seyn. In dem zweyten mußte sie wenigstens drey haben; denn die Cubic-Zahl war mehr als eine Million.

2) Aus der ersten Classe läßt sich sogleich der erste Theil der Cubic-Wurzel zuverläßig beurtheilen. In dem ersten Exempel kann derselbe nicht größer als 80 seyn. Denn 90 ⋊ 90 ⋊ 90 ist 729000, und so groß ist die Cubic-Zahl nicht. In dem zweyten mußte er = 100 seyn. Denn der Cubus von 200 ist 8 Millionen, und meine Cubic-Zahl ist nur 3 Millionen.

3) Wenn dieser erste Theil gefunden, und dessen Cubus abgezogen ist, so weiß ich, daß das in dem Reste steckende größte Product dasjenige sey, welches wir durch $3a^2b$ ausgedruckt haben. Wie groß $3a^2$ sey, weiß ich. In dem ersten Exempel ist es 3 ⋊ 80 ⋊ 80; in dem zweyten 3 ⋊ 100 ⋊ 100. Wenn ich nun dadurch dividire, so finde ich die zwote Zahl b, die dieses Product a^2b macht. Hier komme ich oft in den Fall, daß, wenn ich den Quotienten so groß nehme, als ich ihn nehmen könnte, für die noch übrigen Producte $3ab^2$ und b^3 zu wenig übrig bleibt. In dem zweyten Exempel ließ sich der Quotient 9 von 3 aus 27 nehmen. Allein man kann nur 5 nehmen. Denn wären 6 genommen worden, so wäre daraus entstanden:

$3a^2b =$	1800000
$3ab^2 =$	1080000
b^3	216000
zusammen	3096000

 eine

eine Zahl, die grösser ist, als der Rest 2,796416, und folglich eine grössere Cubic-Zahl, als 3,796416, voraus-setzet.

4) In dem zweyten Exempel ist zur Ausfindung des dritten Theils der Wurzel 6 eben so mit der Zahl 15 oder 150 verfahren, als mit dem ersten Theil 1 oder 100 verfahren war, um den zweyten Theil 5 oder 50 zu finden. 150 quadrirt und dreymal genommen giebt den Divisor ab, und dadurch bestimmt sich der Quotient 6. Dies Verfahren hat seinen Grund in folgender Bemerkung, welche sich durch die Buchstaben-Rechnung bestätigt: Die Formul $a^3 + 3\,a^2b + 3\,a\,b^2 + b^3$ kömmt allemal heraus, ich mag die zween Theile der Cubic-Wurzel nehmen, wie ich will. Z. E. wenn 156 in die zween Theile 150 = a und 6 = b eingetheilt wäre, so würde die ganze Cubic-Zahl aus folgenden Producten bestehen:

$$
\begin{array}{rr}
150 \times 150 \times 150 = & 3375000 \\
3 \times 150 \times 150 \times 6 = & 405000 \\
3 \times 150 \times 6 \times 6 = & 16200 \\
6 \times 6 \times 6 = & 216 \\
\hline
 & 3796416
\end{array}
$$

Wenn man nun im Anfang die Rechnung so angestellet hat, als rechnete man nur auf die zwey Theile 100 und 50 hinaus, so sieht man diese beyden Theile, nachdem sie gefunden sind, als einen an, und rechnet auf 6, als auf den dazu gehörigen zweyten Theil. Hat die Wurzel noch einen Theil mehr, so sieht man die gefundenen drey Theile als einen an, und rechnet auf den vierten.

Es ist klar, daß in dieser Rechnung nach und nach alle Producte der Zahlen 80 und 7, oder a und b, aus der Zahl 658503, und alle Producte der Zahlen 100, 50 und 6 aus der Zahl 3796416 ausgezogen sind, die in ihnen enthalten

enthalten seyn müssen, wenn sie die wahren Cubic-Zahlen jener Zahlen seyn sollen. Wie ich nun sonst in der Division von 144 durch 18 die Zahl 8 für den wahren Quotienten annehme, weil 18 in 144 achtmal enthalten ist, so nehme ich deswegen mit gleicher Gewißheit 87 für die wahre Cubic-Wurzel von 658503, und 156 für die von 3,796416 an, weil in diesen Zahlen alle die Producte enthalten sind, die da entstehen müssen, wenn ich 87 und 156 zweymal durch sich selbst multiplicire.

§. 51.

Es ist klar, daß die Cubic-Zahl eines Bruchs entstehet, wenn der Zähler und der Nenner eines Bruchs zweymal durch sich selbst multipliciret werden. Z. E. der Cubus des Bruchs $\frac{2}{3}$ ist $\frac{8}{27}$, und des unreinen Bruchs $\frac{5}{3}$ ist $\frac{125}{27}$. Folglich findet sich umgekehrt die Wurzel eines Bruchs, wenn aus dem Zähler desselben sowol, als dem Nenner, die Wurzel gezogen wird. Z. E. die Cubic-Wurzel von $\frac{64}{343}$ ist $\frac{4}{7}$. Von dem Decimal-Bruch 0,512, das ist $\frac{512}{1000}$, ist die Wurzel 0,8, das ist $\frac{8}{10}$, und von dem Bruche 0,004913 ist sie 0,17 oder $\frac{17}{100}$. Der unreine Decimal-Bruch 42,875 hat die Wurzel 3,5; und 9,129329 hat die Wurzel 2,09.

Wenn der Decimal-Bruch nicht durch 3, 6, 9, 12 Ziefern u. s. f. hinter dem Comma ausgedruckt wird, so läßt sich die Wurzel seines Nenners nicht sogleich ohne Rechnung finden. Denn die Nenner 10, 100, 1000, 10000 u. s. f. sind keine reine Cubic-Zahlen. Will man für den Nenner keine besondere Rechnung formiren, (wie dieß auch niemals rathsam seyn würde) so darf man nur an denselben eine oder zwo Nullen anhängen, daß der Zahlstellen hinter dem Comma 3, 6 u. s. f. werden. Alsdann hat man den Nenner ohne Rechnung, und für den Zähler geht die Rechnung in dem gewöhnlichen Wege. So ist z. E. die Wurzel des Bruchs 0,73 ziemlich genau 0,9. Man muß ihn aber

vorher in den Ausdruck 0,730 stellen. 0,729 hat genau zur Wurzel 0,9, und folglich ist die Wurzel des um $\frac{1}{1000}$ grösseren Bruchs fast gar nicht davon unterschieden. Von dem unreinen Bruch 9,26 zeigt sich, wenn er in die Form 9,260 gebracht ist, aus den Tabellen die sehr nahe kommende Wurzel 2,1. Der Bruch 7,7624 bekömmt unter der Form 7,762400 die Wurzel 1,98 mit einem unerheblichen Ueberschusse.

§. 52.

Hieraus läßt sich sehr leicht der Grund derjenigen Methode erkennen, wodurch man die Cubische Wurzel einer Zahl in Decimalen durch Näherung findet, von welcher die Tabellen keine Wurzel in ganzen Zahlen angeben. Ich will hier zu einem Exempel das in der Anmerkung zu §. 61. Geom. angeführte Delische Problem nehmen. Gesetzt, der als ein Würfel gebauete Altar des Apollo wäre eine Cubic-Ruthe groß gewesen, so hätte er, um genau verdoppelt zu werden, zwo Cubic-Ruthen enthalten müssen; und demnach war das Maaß seiner Seite in einer solchen Zahl zu suchen, welche zweymal durch sich selbst multiplicirt so genau als möglich 2 giebt. Diese Zahl ist nicht anders, als in einem Bruche, zu bestimmen, welcher sich als die Cubic-Wurzel der in die Form eines Bruches veränderten Zahl 2 ansehen läßt.

In was für einen Bruch aber werden wir die Zahl 2 verändern? Aus ähnlichen Gründen, wie oben bey den Quadrat-Zahlen, in einen solchen Decimal-Bruch, dessen Nenner nicht besonders gerechnet werden darf. Solche Nenner aber sind nur 1000, 1000000, und überhaupt diejenigen, welche um 3 Nullen steigen. Denn von allen andern läßt sich keine reine Cubic-Wurzel angeben.

Dieß vorausgesetzt nehmen wir die Zahl 2 vor, und fügen ihr immer 3 Nullen in der Berechnung an, so weit

weit es die Genauigkeit der zum Zweck gesetzten Berechnung erfodert;

```
2 |                    (1,2599
1 |
------------
1 | 000
( | 3)
  | 6
  | 12
  |   8
------------
   728
------------
   272 | 000
   (43 | 2)
   216 | 0
     9 | 00
       | 125
------------------
   225 | 125
------------------
    46 | 875 | 000
    (4 | 687 | 5)
     42187   | 5
       303   | 75
             | 729
------------------------
     42491   | 979
------------------------
     4 | 383 | 021 | 000
        (475 | 524 | 3)
        4279 | 718 | 7
           3 | 059 | 37
                   | 729
------------------------------
        4282 | 778 | 799
------------------------------
         100 | 242 | 201
```

Dieser

Dieser Rest ist zwar sehr groß. Er bedeutet aber desto weniger, nemlich Würfel desjenigen Maaßes, in welchem nunmehr die Seite eines Würfels von 2 Cubicruthen ausgerechnet ist, das ist Zehntausendtheile einer Ruthe, oder Zehntheile von Linien. Die Zahl 242 bedeutet Cubiclinien, und 100 bedeutet Cubiczolle.

Hätten wir bey der dritten Zahl statt 5 den Quotienten 6 genommen, so würden die abzuziehenden Producte so gestanden haben:

272	000
(43	2)
259	2
12	96
	216
272	376 nemlich Cubiczolle.

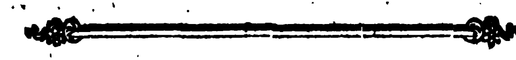
Sie hätten also 376 Cubiczolle zu viel gegeben, und um so viel würde demnach der Würfel mit einer Seite von 1 Ruthe, 2 Schuh 6 Zolle grösser als 2 Cubicruthen geworden seyn. Mit der durch zwo Classen mehr fortgesetzten Rechnung bringen wir das Maaß zwar in Zehntheilen einer Linie heraus, aber noch hat der Würfel etwas über 100 Cubiczolle zu wenig. Eine durch eine neue Classe weiter fortgesetzte Rechnung würde diesen Fehler zwar auf ungefähr 4 Cubiczolle noch verringern. Aber sie würde uns 2 Hunderttheile einer Cubiclinie in der Wurzel geben, ein Maaß, das in der Praxis vollends nicht mehr anwendbar ist.

Es vermindert die Ermüdung bey dieser Rechnung sehr, wenn man Tabellen von Quadratzahlen dabey zur Hand hat, aus welchen man die Quadrate der schon gefundenen Theile der Wurzel nur abschreiben, und durch 3 multipliciren darf, um den neuen Divisor zu haben.



Inhalt

Inhalt
der ersten Abtheilung.



Vorläufige Abhandlung
von der Mathematik, ihren Theilen und deren Verbindung unter einander.

Arith=

Arithmetische Wahrheiten.

Erster Abschnitt.

Von dem Verhältniß und dessen verschiedenen Arten.

Zweyter Abschnitt.

Erläuterung der Bruchrechnung, und insbesondre der zehntheiligen Brüche.

Dritter Abschnitt.
Von den Progressionen.

Vierter Abschnitt.
Von den Logarithmen.

Fünfter Abschnitt.
Von den Quadraten und Potenzen und deren Berechnung.

Geometrische Wahrheiten.

Erster Abschnitt,

Von dem Maasse der Ausdehnung, und insbesondre von der unmittelbaren Messung der Längen.

Zweyter Abschnitt,

Von der Messung solcher Längen, die nicht unmittelbar gemessen werden können.

§. 14.

Dritter Abschnitt,

Von der Messung der Flächen.

Vierter Abschnitt,
Von der Vergleichung ähnlicher Flächen mit einander.

Fünfter Abschnitt,
Von der Messung der soliden Räume.

Sechster Abschnitt,

Von der Vergleichung der soliden Figuren mit einander, in Absicht auf ihre Verhältnisse.

Allgemeine Erläuterung der Algebra, ihrer Absichten und ihrer Brauchbarkeit.

Anhang.

I. Zusatz zu der Lehre von den Progressionen.

II. Zusatz zu der Quadratrechnung.

III. Von der Berechnung der Cubicwurzel.



Zweyte Abtheilung.

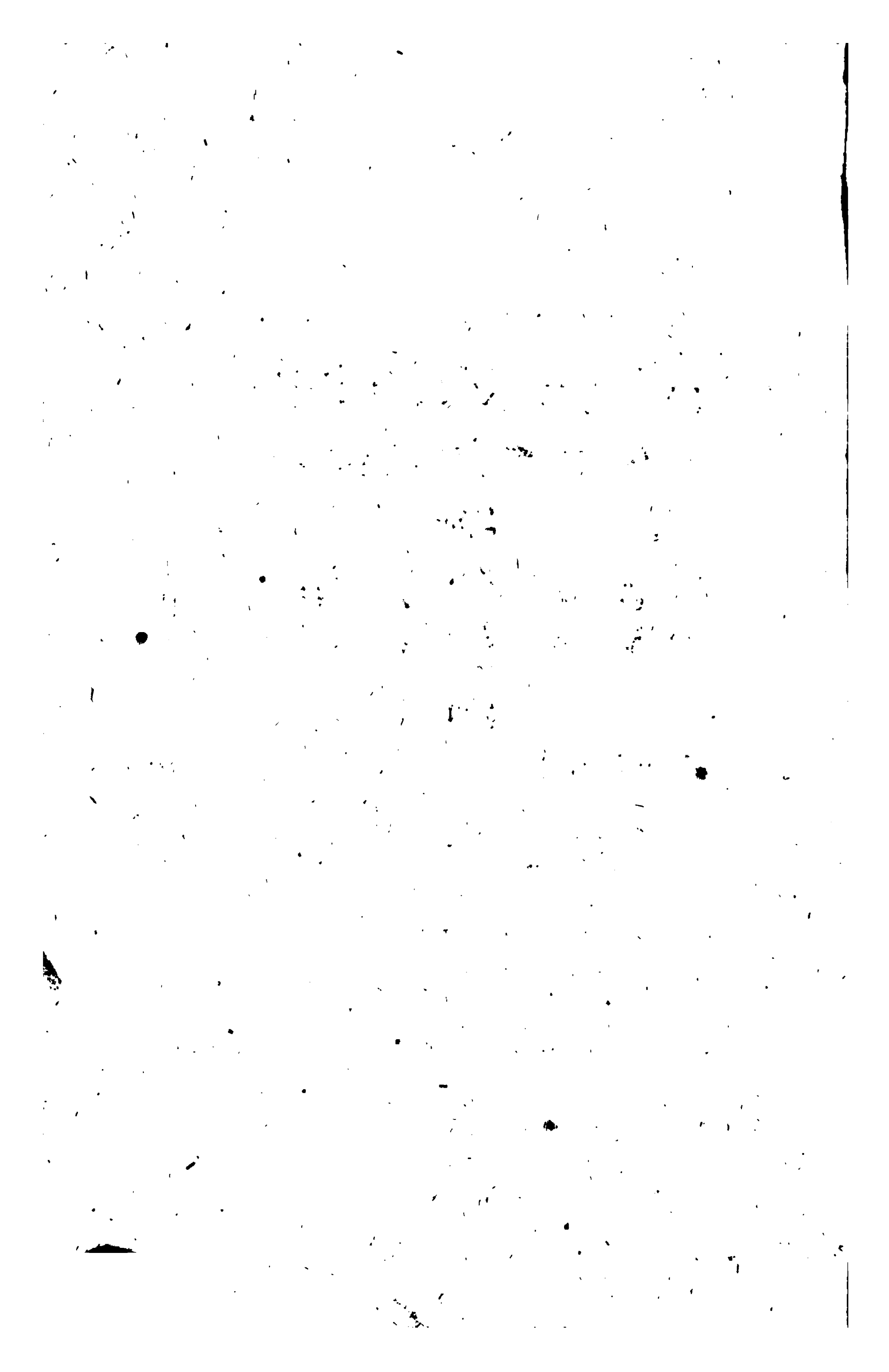
Die Mechanik

zum

Nutzen und Vergnügen

des bürgerlichen Lebens

erläutert.





Die Mechanik ist im weitläuftigsten Begriffe die Lehre von der Bewegung der Körper. Diese Erklärung allein zeigt ihre große Weitläuftigkeit, und eben diese ist eine von denen Ursachen, warum man in den mehresten Abhandlungen, welche den Namen der Mechanik führen, dasjenige, was für den Gebrauch des bürgerlichen Lebens insonderheit brauchbar scheint, von demjenigen abgesondert hat, was der menschlichen Wißbegierde vorzüglich würdig ist. Man hat die allgemeine Lehre von der Bewegung, von der Mittheilung derselben, von dem Stoß und dem Fall der Körper und dergleichen Dingen mehr der Naturlehre oder mündlichen Anweisungen vorbehalten, welche bisher in unserm Teutschlande nur für die Namensgelehrten bestimmt geblieben sind. Allein ich habe schon mehrmalen angezeigt, daß ich in Abhandlung der practischen Theile der Mathematik eben so aufmerksam auf die Erweiterung der Erkenntniß der Natur bey denen, welchen dieselbe ihrer Aufmerksamkeit würdig scheint, als auf den unmittelbaren Nutzen des gesellschaftlichen Lebens seyn würde. Beyde werden mich also auch in dem Entwurfe dieser meiner Arbeit leiten, und ich werde daher viele Wahrheiten in dieselbe hineinziehen, welche sich bisher die Naturlehrer besonders vorbehalten, und diejenigen, welche die Mechanik bloß als einen Theil der practischen Mathematik treiben, ihnen gerne überlassen haben. Ich halte diese Kenntnisse eines jeden Menschen würdig, der in einer Welt lebt, welche er für das Werk eines weisen Schöpfers er-

kennt, und dem es nicht gleichgültig seyn muß, zu erfahren, nach was für Gesetzen derselbe die Welt geordnet habe, und durch welche in dieselbe gelegte Triebfedern deren Ordnung bisher bestanden sey, und noch bestehe. Ich halte die Untersuchungen derer Männer, welche auf die Entdeckung dieser Gesetze so viel Mühe verwandt haben, für zu wichtig, als daß ich glauben mögte, sie könnten nur denen wenigen hunderten ihrer Erkenntniß würdig scheinen, welche auf unsern Akademien beyläufig, und oft nur um die Weise zu begehen, einem Unterricht in der Naturlehre wöchentlich zuhören, und hernach durch andre Geschäfte hingerissen, in ihrem Leben kaum einmal wieder daran gedenken. Und in der That sehe ich nicht ein, warum die Wissenschaften, welche der Namensgelehrte Jahre lang, um sein Brodt zu gewinnen, auf Akademien treibt, in genauerer Verbindung mit dem Erkenntniß der Naturgesetze stehen sollte, als die Geschäffte des Bürgers, an welche derselbe oft mit wenigerm Zwange gebunden ist.

Ich werde mich indessen von denen schweeren Untersuchungen zurück halten, welche die Philosophen neuerer Zeit in Ansehung der Natur und der ersten Ursachen der Bewegung angestellt haben. Es ist genug für uns zu wissen, welche Grundreguln der Bewegung der Schöpfer festgesetzt habe. Jene haben uns keine zulänglichere Antwort geben können, als daß es der Wille des Schöpfers sey, und die ersten Ursachen, durch welche das, was wir in der Bewegung der Körper stündlich wahrnehmen, erklärt werden könnte, in ihrer Dunkelheit lassen müssen.

Aber selbst diese Kenntniß der Naturgesetze, ohne ihre Gründe, hat den Menschen viel Mühe gekostet. So alt ihre Aufmerksamkeit auf dieselben gewesen ist, so langsam ist es ihnen gelungen, die Wahrheit in der Lehre von den Bewegungen einzusehen, einer Lehre, die für unsre Wissensbegierde so reitzend ist, und in welcher die Natur ihre Geheimnisse so wenig verbergen zu wollen scheint. Allein man

ließ

ließ es sich zu spät einfallen, diese durch überzeugende Erfahrung zu untersuchen, und man begnügte sich lieber mit der Behauptung unerwiesener Grundsätze, durch welche man alles ausmachen zu können glaubte, ohne die Natur zu fragen, ob sie sich in der That nach denselben richtete. Man kann jetzo alle Schriften, die vom Archimedes ausgenommen, ungelesen lassen, in welchen die Mechanik vor dem Ende des sechszehnten Jahunderts abgehandelt ist. Selbst diejenigen sind unbrauchbar, in welchen die Alten die practische Mechanik zu erklären versucht haben. So weit sie es in der Ausübung gebracht, so dunkel und unvollständig sind die Beschreibungen ihrer mechanischen Unternehmungen. Ein Beweis, daß sie bey denselben mehr auf ein Gerathewol, als mit gehöriger Einsicht zu Werke gegangen sind. Wir haben Beweise, daß sie Dinge durch die Mechanik unternommen und ausgeführt haben, mit welchen die ähnlichen Unternehmungen der Neuern in gar keine Vergleichung gestellt werden dürfen. Eben der Obeliskus, welchen *Fontana* auf Befehl des Pabstes Sixtus des Fünften mit 100000 Scudi Unkosten von dem Platze, wo er umgestürzt lag, aufheben, einige hundert Schritte fortschleppen, und an dem Ort, wo er noch jetzo steht, aufrichten ließ, dessen Gewicht auf beynahe eine Million Pfunde geschätzt wird, war aus den Steinbrüchen des Obern Egyptens in einem Stücke ausgehauen, an den Nil geschleppt, auf ein Schiff oder Floß geladen, das ihn nach Alexandrien brachte, wo er wieder ans Land gebracht, aufgerichtet, aber auf des Kaisers Constantius Befehl wieder niedergelegt, zu Schiffe bis an die Tiber gebracht, und Meilen weit bis nach Rom geschleppt, und dort aufgerichtet war. Ein gleiches war mit mehrern andern geschehen, deren Schweere man viel höher schätzt. Man sieht noch in den egyptischen Steinbrüchen die Stelle, wo der Eigensinn der egyptischen Könige ein steinernes Haus in einem Stücke aushauen, den Nil herunter und aufs Land bringen ließ, dessen Gewicht viele Millio-

nen Pfunde betragen haben mag. Plinius beschreibt uns in seiner Naturhistorie (B. 36. Cap. 9.) bloß die Erfindung, durch welche diese Obelisken aus den Steinbrüchen auf den Nil geschafft wurden. Eine Erfindung, die nicht noch einmal dienen konnte, um sie wieder ans Land zu bringen, vielweniger, um sie dort fortzuführen, und wieder aufzurichten. Er sagt auch (B. 16. Cap. 40.) viel von der Grösse des Schiffes, und insonderheit von der Grösse dessen Mastbaums, auf welchem der Kaiser Caligula einen dieser Obelisken nach Rom bringen ließ. Aber von jener Hauptsache eine mechanische Beschreibung zur Einsicht der Nachwelt zu geben, hielten die Unternehmer entweder nicht der Mühe werth, oder sie waren vielleicht unfähig dazu, da sie vermuthlich ohne Einsicht in die Grundsätze der Mechanik durch blosse Nachahmung und mit einer Kühnheit verfuhren, die nur ihnen erlaubt war, weil sie bey ihren Unternehmungen das Leben der Sclaven, die sie dazu brauchten, nicht sehr schonen, die Kräfte derselben mit dem größten Zwange brauchen, und nimmer besorgen durften, wo sie Arbeiter her nehmen wollten, wenn das, was sie mit einer gewissen Zahl bestreiten zu können glaubten, etwan in der Ausführung die doppelte Zahl erfoderte. Alle diese Ueberlegungen muß der Mechanikus in unsern Zeiten auf das genaueste machen. Er muß die Kräfte und die Zahl derer Arbeiter, die er anwenden will, in ein genaues Verhältniß mit seiner Maschine stellen, und auf die Sicherheit ihres Lebens die genaueste Sorgfalt wenden.

Die Ordnung, welche ich in diesem Theil meiner Abhandlung beobachtet habe, ist nicht diejenige, die man in andern ähnlichen Abhandlungen beobachtet. Ich habe mich bemüht, die Wahrheiten der Mechanik theils in der Ordnung vorzutragen, in welcher der aufmerksame Betrachter der Natur nach und nach auf sie geleitet wird, theils, wie sich ihr Nutzen in der Verbindung, die sie mit den Geschäfften des bürgerlichen Lebens haben, nach und nach

entwickelt.

entwickelt. Ich habe z. E. dem Hebel lange den Namen der Waage gelassen, und bey der Waage das bemerkt, was uns auf die Grundgesetze des Hebels leiten kann, weil jene ein so bekanntes Werkzeug ist. Ich habe vieles von der Schweere gesagt, ohne des Schweerpuncts zu erwähnen, bis die Betrachtung des Hebels, den wir uns nicht länger als eine starre Linie ohne Schweere, sondern als einen schweeren Körper vorstellen mußten, darauf leitete. Auf die Betrachtung des Schwankens der Körper mußte mich die Betrachtung der schiefen Fläche leiten. Ich habe verschiedene Lehren, deren Wichtigkeit nicht sogleich einleuchtet, anfangs nur überhaupt berührt, und sie nachher genauer erläutert, wo sie in der Verbindung mit andern Wahrheiten unentbehrlich wurden. Kurz, man wird, wo nicht die Ordnung zu sehr zu vermissen, doch sie vielleicht zu mangelhaft zu finden glauben. Allein mein Entwurf ist, wenigstens für ein teutschgeschriebenes Buch, neu, und er hat mich auf neue Wendungen geleitet, ohne welche ich denen Wahrheiten, die ich vorzutragen hatte, kein Gewicht geben, und nicht die nöthige Aufmerksamkeit auf sie ziehen zu können glaubte.

Erster Abschnitt

Von den vornehmsten Grundgesetzen der Bewegung.

§. 1.

In der Natur ist alles in einer fortdaurenden Bewegung, das ist, alles, was in der Welt ist, kleines und großes, ist einer unabläßigen Veränderung des Orts unterworfen. Man stelle sich die Welt ganz ohne Bewegung vor, sie hört auf, eine Welt zu seyn, sie wird ohne Veränderung bleiben, und selbst kein Leben der Geschöpfe, die nun ihr edelster Theil sind, wird in derselben mehr möglich bleiben.

Es gehört nicht für uns, die philosophischen Begriffe des Orts, des Raums und der Bewegung aus einander zu setzen. Man versteht überall den Ausdruck: ein Ding bewegt sich, und man weiß, daß dieses nichts sage, als daß dasselbe seinen Ort verändre. Allein, wie nehmen wir es wahr, daß eine Sache, daß selbst unser Körper seinen Ort verändre, oder sich bewege? Wir geben hiebey zuvörderst auf die nächstbelegenen Dinge Acht. Wenn wir gehen, oder uns auf irgend eine andre Art fortbewegen, so nehmen wir wahr, daß unser Ort unter denen Dingen, die uns zunächst umgeben, sich von einem Augenblick zum andern verändre. Wir wenden dieses auf andre Körper ausser uns an, und legen denselben eine Bewegung bey, wenn wir sie ihren Ort unter denen Körpern, die ihnen zunächst liegen, verändern sehen. Allein wir selbst und andre Körper können in solche Umstände gesetzt werden, daß viele derselben mit einander, oder mit uns, den Ort verändern. Wenn wir in einem Schiffe fahren, so bewegt sich alles, was uns zunächst sich befindet, mit uns, und wir können alsdenn Stundenlang unsre Bewegung vergessen, oder nicht wahrnehmen, weil wir wenigstens in Absicht auf die Theile des Schiffs, die uns umgeben, unsern Ort nicht verändern. Wir können so gar alsdenn in gewissem Verstande sagen, daß wir in Ruhe sind. Denn wir empfinden eben das, was wir sonst empfinden, wenn wir vollkommen ohne Bewegung sind. Ja wir kommen oft dahin, daß wir, unsrer eigenen Bewegung unbewußt, andern Körpern eine Bewegung beylegen, die sie nicht haben. Ein Kind, das man zuerst auf ein Schiff bringt, wird seine eigene Bewegung nicht wahrnehmen, sondern glauben, das Ufer und die Gebäude und Bäume auf demselben bewegen sich neben ihm rückwärts. In eben diesem Irrthume legten die Menschen so viele Jahrtausende lang der Sonne und den Gestirnen eine Bewegung bey, welche die Erde hatte, weil sie dieselben beständig ihren Ort gegen ihr Auge verändern sahen, und an

ihnen

ihnen selbst nicht wahrnahmen, daß sie ihren Ort unter allem, was sie um sich sahen, im geringsten veränderten. Die Naturlehre belehrt uns ebenfalls von gewissen Bewegungen, die es nur in gewissem Verstande sind, und in anderm Verstande als Ruhe angesehen werden. Es ist z. E. möglich, einen Körper auf einem Schiffe dem Lauf desselben mit eben der Geschwindigkeit entgegen zu werfen, mit welcher das Schiff sich vorwärts bewegt. Alsdenn bewegt sich derselbe wirklich in Absicht auf das Schiff und dessen Theile, aber keinesweges in Absicht auf die an dem Ufer befindlichen Gegenstände. Kurz, die Wörter Ruhe und Bewegung führen keinen so bestimmten Begriff bey sich, daß man nicht von manchem Körper mit Grunde sagen könnte, daß er in gewissem Verstande in Ruhe, und in einem andern Verstande in Bewegung sey. Die Philosophen unterscheiden daher mit Grunde die relative und die absolute Ruhe und Bewegung. Sie verstehen unter jener die Beybehaltung oder Veränderung des Orts in Absicht auf die Gegenstände, welche den ruhenden oder bewegten Körper zunächst umgeben, unter dieser aber dieselbe, in so fern sie sich auf den allgemeinen Raum, oder auch wol nur, in so fern sie sich auf das Ganze des Erdkörpers bezieht.

§. 2.

Wenn wir die Frage aufwerfen, ob die Körper mehr zur Ruhe als zur Bewegung geneigt seyn, so werden wenige Menschen seyn, welche nicht dieselbe für die Ruhe entscheiden, und glauben, als wenn dieselben lieber ihren Ort unter den nächstgelegenen Gegenständen behalten, als ihn zu verändern suchen. Wir nehmen wahr, daß es nicht ohne einige Mühe geschehe, wenn wir einen Körper aus dem Ort, den er einnimmt, bringen wollen. Wir sehen keine den Körpern mitgetheilte Bewegung lange fortdauren, sondern diese nimmt nach und nach ab, und der bewegte Körper nimmt endlich wieder einen Ort auf der Erdfläche ein, aus welchem er ohne Anwendung neuer Kräfte sich nicht wieder heraus-

herausbringen läßt. Wir kennen wenigstens keine Bewegung auf der Unterwelt, die immerwährend bliebe, und ehe wir die Oberwelt, in welcher sich dergleichen wirklich bemerken lassen, mit Aufmerksamkeit betrachten lernen, so ist das Vorurtheil schon gefaßt, daß die Körper sich nicht anders als ungern, und wenigstens nicht sehr lange fortbewegen lassen. Noch mehr, die Empfindung unsers eigenen Körpers überzeugt uns davon, welchen alle lange fortgesetzte Bewegungen ermüden, und die Ruhe ihm unumgänglich nothwendig machen. Sollte ich meinen Lesern eine Meinung nehmen können, von welcher uns so viele Erfahrungen überzeugen? Ich werde bloß diesen Erfahrungen andre entgegen setzen, welche ihnen bald einen Zweifel an der allgemeinen Wahrheit dieser Meinung erwecken werden.

Wir sehen stündlich, daß Körper, wenn ihnen eine gewisse Bewegung beygebracht ist, diese Bewegung wenigstens eine Weile ohne ferneres Zuthun derjenigen Kraft fortsetzen, welche dieselbe hervorgebracht hat. Wenn wir eine Kugel mit einer gewissen Gewalt über eine Ebene fortstossen oder fortrollen, so wissen wir zum voraus, daß sie diese Bewegung eine merkliche Zeit fortsetzen werde, ungeachtet die Hand, welche sie zuerst bewegte, nichts weiter auf dieselbe vermag. Es würde ein eben so großes Wunder für uns seyn, wenn diese Kugel auf einmal alle Bewegung verlöre, und mitten in diesem schnellen Lauf plötzlich liegen bliebe, als es für uns seyn würde, wenn wir dieselbe auf einmal ohne äusserliche Ursache in eine schnelle Bewegung versetzt sähen. So gewiß sind wir, daß die Bewegung, welche nicht von sich selbst anfängt, auch nicht von sich selbst aufhören könne. Eben so gewiß sind wir auch, daß diese Bewegung auf eben die Art, wie sie angefangen war, sich auch, ohne eine neue Ursache, fortsetzen werde. Es würde uns wundersam scheinen, wenn wir diese Kugel die angefangene geradelinichte Bewegung plötzlich seitwärts oder gar rückwärts ändern sehen sollten, ohne eine Ursache dieser Aenderung zu bemerken.

Wenn

Wenn wir vor dem Munde einer geladenen Kanone stehen, so halten wir uns eben so sicher, als an irgend einem andern Orte. Wir wissen, daß noch eine Ursache zur Bewegung der eingeladenen Kugel, nämlich das Feuer, welches das Pulver entzündet, und in Dünste auflöset, hinzukommen müsse. Geschicht dieses, so wissen wir zum voraus, daß die Kugel ihre Bewegung nicht nur anfangen, sondern auch, wenn sie von dem Feuer, der Ursache ihrer Bewegung, schon entfernt ist, lange und heftig fortsetzen werde, ungeachtet wir keine Ursache dieser fortgesetzten Bewegung mehr wahrnehmen. Wir sind aber auch eben so gewiß von der Richtung der Bewegung dieser Kngel, und wissen, wenn wir eine merkliche Entfernung seitwärts von derselben haben, daß sie diesen Weg nicht plötzlich verändern werde, um uns zu treffen. Wenn wir in einem eilfertigen Laufe begriffen sind, und plötzlich unsern Körper zurück halten wollen, oder nur seitwärts wenden, so empfinden wir, wie determinirt unser Körper für die einmal angefangene Bewegung ist, und es wird uns so schweer, diese zu ändern, als es uns vorher war, sie anzufangen. Wenn wir in einem Schiffe ruhig eine Weile gefahren sind, und dieses wird plötzlich in seiner Bewegung aufgehalten, so fallen wir, so fällt alles in dem Schiffe nach der Seite zu, wohin das Schiff fuhr, als wenn es die einmal mit demselben angefangene Bewegung noch ohne dasselbe fortsetzen wollte.

Diese Erfahrungen sind hinlänglich uns zu überzeugen, daß es den Körpern eben so eigen sey, in einer einmal angefangenen Bewegung, als in der Ruhe zu beharren, und wir sind überhaupt gewiß, daß allemal eine zureichende Ursache da seyn müsse, so wol, wenn ein Körper aus der Ruhe in Bewegung, als auch, wenn er aus einer schon ihm mitgetheilten Bewegung in Ruhe gesetzt werden, ja auch, wenn er nur eine gewisse schon angenommene Bewegung ändern soll.

Dies muß uns zum voraus die Muthmassung geben, daß, weil doch alle Bewegungen, die wir auf der Erde wahrnehmen, in einiger Zeit aufhören, und sich auf mancherley Art ändern lassen, andre Ursachen da seyn müssen, die nicht in den Körpern liegen, welche dieses Aufhören oder Aenderung ihrer Bewegungen zuwege bringen, welche wir bald näher entdecken werden.

Anmerkung.

Die hier vorgetragene Wahrheit ist ein Grundsatz, nach welchem sich alle Menschen in ihrem Urtheile über die natürlichen Begebenheiten richten. Eine Bewegung, von der wir keine Ursache sehen, wird uns allemal übernatürlich scheinen, aber auch eben so unnatürlich das Aufhören einer Bewegung ganz ohne oder auch nur ohne eine hinlängliche Ursache. Fast alle Gespenstergeschichten haben eine Bewegung zur Veranlassung, von welcher derjenige, der sie wahrnahm, keine Ursache bemerken können, und die er deswegen für übernatürlich gehalten. Aber wenn ich den Mann sähe, der mit blossen Blasen eine Canonkugel in ihrem Lauf aufhalten könnte, so würde ich eben so bestürzt werden, als die Furcht vor sich bewegenden Gespenstern mich machen könnte. Warum sind uns die Feenmährchen unwahrscheinlicher, als andre Romanen? Deswegen hauptsächlich, weil sie gegen dieses Naturgesetz anstossen, weil sie uns Bewegungen beschreiben, welche anfangen und aufhören, ohne daß hinlängliche Ursachen derselben da wären. Ein Abracadabra, ein Schlag mit einem weissen Stock verrückt, verwandelt Dinge, oder macht sie auf einmal unthätig, und nimmt ihnen alle Bewegung.

Die Naturkündiger verstehen eben diese Wahrheit, wenn sie allen Körpern eine Kraft der Trägheit beylegen, und sagen, daß dieselben eben so geneigt sind, in einem gewissen Stande der Bewegung, als in dem Stande der Ruhe zu bleiben, und allemal widerstehen, wenn der eine oder der andre durch äussere Ursachen geändert werden soll. Freylich scheint der Ausdruck der Sache nicht gemäß zu seyn. Denn wir verstehen unter dem Wort **Trägheit** gewöhnlich eine herrschende Neigung zur Ruhe, und eine Abneigung von der Bewegung. Wir verstehen aber auch in allgemeinerem Verstande unter demselben Ausdruck eine Neigung, in dem einmal angenommenen Zustande zu bleiben, und in dieser Bedeutung ist dieses Wort hier nicht uneigentlich angewandt.

§. 3.

§. 3.

Diese Voraussetzung, daß die Körper eben so leicht in dem Zustande einer gewissen Bewegung, als in dem Zustand der Ruhe bleiben, ist also die einzige, woraus wir die Fortsetzung derer Bewegungen einigermaassen erklären können, welche die Körper einer von dem andern zwar annehmen, aber ohne Zuthun des andern lange fortsetzen. Denn was wollen und können wir anders für einen Grund angeben, warum z. E. ein aus freyer Hand geworfener Stein noch eine merkliche Weile, nachdem er von der Hand ganz frey geworden ist, die ihm eingedruckte Bewegung fortsetzt, wenn wir ihn nicht in dieser Eigenschaft des Steins suchen wollen, daß er die einmal angenommene Bewegung eben so nothwendig ohne eine äusserliche Ursache, welche sie aufhebt, behält, als er vorhin die Ruhe behielt, so lange keine äusserliche Ursache sie störte. Die Luft thut es nicht, wie wol ehemals die Alten glaubten, welche dieses Naturgesetz nicht kannten, so wie es die wenigsten Menschen kennen. Sie sagten: die Luft, durch welche der Körper gedrungen ist, klemmt sich hinter demselben wieder zusammen, und treibt ihn auf diese Art, wie ein Keil, fort, oder, um die Sache sinnlicher zu machen, wie ein Kirschenkern zwischen den Fingern, die auf beyden Seiten an ihn klemmen, fortgleitet. Allein sie gedachten nicht daran, daß ein solcher Körper auch vorne beständig Luft gegen sich finde, welche er aus ihrer Stelle treibt, und die ihm mehr widerstehen muß, als die hintere Luft ihn fortklemmen kann. Zudem müßten diejenigen Körper geschwinder gehen, welche viel Fläche haben, und auf welche die Luft in mehreren Puncten wirken kann, als die, welche weniger Fläche haben. Dieses aber ist ganz umgekehrt. Bey den immerwährenden Bewegungen der Himmelskörper fällt dieser Grund ganz weg. Denn wir wissen, daß die Substanz, welche wir Luft nennen, immer dünner und weniger wird, je höher wir über die Erdfläche kommen, und daß sie bey jenen entfernten Körpern gewiß ganz aufhört.

§. 4.

Doch wie wird uns diese Fähigkeit der Körper, ihre Bewegungen durch sich selbst fortzusetzen, wunderbar scheinen, da wir mehr als dieses bey ihnen wahrnehmen, nämlich eine beständige Bemühung sich gegen die Erde zu bewegen, welche den Körpern so eigen ist, daß sie dieselbe in keinem Zustande verlieren, und von welcher wir doch keine äussere Ursache wahrnehmen. Ich rede von der Schweerkraft, welche man jedoch keinesweges mit jener Kraft der Trägheit vermengen muß. Denn diese ist niemals der Grund einer anfangenden, sondern nur der fortgesetzten Bewegungen. Die Schweerkraft aber thut mehr als dieses, und setzt die Körper ohne Zuthun einer äussern Ursache allemal und unfehlbar in eine Bewegung gegen die Erde zu, so bald sie sich frey überlassen sind, und keine mächtige Hindernisse derselben im Wege stehen. Sie macht, daß die Körper in dieser Richtung beständig drücken, und der Erde wenigstens so nahe zu kommen suchen, als in der Verbindung, in welcher sie mit andern Körpern stehen, möglich ist. Ein schweerer Körper, der auf einer nicht ganz festen Grundlage ruhet, drückt dieselbe so lange zusammen, bis sie nicht weiter nachgiebt. Ein Stein, der an einem Bande aufgehangen ist, senkt sich, wenn er seitwärts gestossen wird, so lange in einem Bogen herunterwärts, bis er der Erde am nächsten ist, und kann nicht anders, als in dieser Lage zur Ruhe kommen. Wenn ihn dieses Band Jahre lang getragen hat, und endlich zerreißt, so nimmt er sogleich die geradeste Bewegung gegen die Erde zu an, wie er sie in dem Augenblick, da er zuerst aufgehangen ward, würde angenommen haben. Eine Kugel rollt an der Lehne eines Berges so lange herab, bis kein niedrigerer Ort mehr ist, zu welchem sie kommen könnte. Unser eigner Körper, den wir doch sonst lenken und bewegen können, wie wir wollen, ist dem Eindruck der Schweere eben so gehorsam, als alle leblose Körper. Ihn vorwärts, rückwärts und seitwärts

zu

zu bewegen, so weit als wir wollen, kostet uns wenig Mühe. Aber ihn zu einiger Höhe seiner Schweere entgegen zu bewegen, dazu wird die Anwendung weit mehrerer Kräfte erfodert, und ein Mensch, der seinen Körper mit einem Sprunge nur sechs bis acht Schuh hoch von der Erde bewegen kann, giebt ein Schauspiel ab, das man mit größter Bewunderung ansieht.

Wir sind freylich an diese Erscheinung, daß die Körper sich von selbst niederwärts bewegen, so gewohnt, daß wir nichts wunderbares mehr darinn finden, und deren Ursachen wenig nachsinnen. Allein man wende nur einiges Nachdenken darauf, so wird man eben diese Sache als das größte Geheimniß in der Natur ansehen müssen. Bey allen andern Bewegungen würden wir über Wunder schreien, wenn wir nicht eine Ursache, die sie hervorbringt, sehen sollten. Wenn wir einen Stein gerade von der Erde in die Höhe eilen sähen, ohne etwas wahrzunehmen, daß ihn aufwärts triebe, so würden wir äusserst erstaunen und unsern Augen nicht trauen. Allein, wissen wir mehr von der Ursache, welche denselben von oben herab gegen die Erde treibt? Und dennoch erstaunen wir darüber nicht, weil die Gewohnheit, dieses zu sehen, unsre Aufmerksamkeit auf diese Sache zu sehr geschwächt. Ist etwas in der Erde, welches diesen Körper zu sich zieht? Ist ein unsichtbares Band zwischen allen Körpern und der Erde befindlich? Ist es der Druck eines nicht sichtbaren und nicht fühlbaren flüßigen Wesens, das mit einem beständigen Strom in die Erde dringt, und die Körper dahin treibt? Ist die Erde ein Magnet von allgemeiner Kraft, der nicht bloß das Eisen, sondern alle Körper an sich zieht, und welches ist das Band, wodurch dieser Magnet zieht? Oder ist es eine Eigenschaft aller Körper, daß sie sich überhaupt einer dem andern zu nähern suchen, eine Eigenschaft, die vielleicht der Wille des Schöpfers in sie gelegt hat? Alle diese Fragen sind längst von den Weltweisen und Naturkündigern gethan; allein

alle Beantwortungen derselben sind unzulänglich. Nur auf die letzte Frage geben die Beobachtungen der neuern Naturkündiger die höchstwahrscheinliche Antwort, daß durch die ganze Körperwelt eine Kraft herrsche, welche die Körper einen zu dem andern treibt, oder daß es eine allgemeine Schweerkraft gebe, und daß die Kraft, mit welcher die Erde die in ihrer Nähe befindlichen kleinern Körper zu sich zieht, eben diejenige sey, mit welcher sie auf die Bewegung des Mondes wirkt, doch so, daß auch der Mond mit einer wechselseitigen Kraft auf die Erde wirkt. Wir kennen die Grenzen nicht, in welchen diese Wirkung der Schweere auf die der Erde benachbarten Körper aufhört. Die Untersuchungen des Neuton machen nicht nur dieses, sondern noch überdem beynahe gewiß, daß alle grössere und kleinere Weltkörper mit einer ähnlichen Kraft versehen sind, und alle mehr oder weniger nach ihrer verschiedenenen Entfernung sich einander zu nähern suchen. Dadurch aber ist der Grund der Sache bey weiten nicht aufgeklärt, und wir wissen nicht besser, und werden auch in dieser Welt nicht erfahren, worinn eigentlich der Trieb, oder der Druck, oder der Zug bestehe, welchem wir den Namen der Schweerkraft beylegen.

§. 5.

Es bleibt indessen, ungeachtet dieser Ungewißheit von der Ursache der Schweerkraft, sehr wichtig für uns, aus gehäuften Erfahrungen die Reguln zu bemerken, nach welchen diese Kraft nahe bey der Erde wirkt. Wir beurtheilen die Größe dieser Schweere zuvörderst aus dem Widerstande der Körper gegen solche Bewegungen, welche wir ihnen eindrücken wollen, deren Richtung nicht mit der Richtung derselben übereinstimmt, wenn wir sie nemlich heben, oder in einen höhern Ort bringen wollen, als derjenige ist, in welchem sie sich in Ruhe befinden. Wir bemerken alsden zwar überhaupt,

1) Daß

1) Daß grössere Körper mehr widerstehen, oder schweerer sind, als kleinere; daß sich aber doch dieses nicht genau und beständig nach der scheinbaren Grösse der Körper richte. Ein Stück Schwamm muß sehr groß seyn, um so schweer zu drucken, als ein ungleich kleineres Stück Holz, und wird ungleich weniger durch die Schweere drucken und widerstehen, als ein Stein oder Stück Metall von gleicher Grösse. Allein man bemerkt eben an dergleichen Körpern sehr leicht die Ursache. Jene, die wir bey einer gewissen Grösse leichter finden, als andre, füllen ihren Raum nicht so genau aus, als die schweereren. Der Schwamm zeigt grosse Hölen, in denen keine feste Materie ist. Auch in dem Holze sieht das blosse Auge Zwischenräume, die freilich kleiner sind, in denen nichts von der Materie des Holzes ist, und in andern Körpern zeigt sie das Vergrößerungsglas. Man nimmt daher Anlaß, gewisse Körper schweerer oder leichter als andre zu nennen, und überhaupt ihnen eine eigenthümliche Schweere beyzulegen. Die Wege, wie dieselbe zu untersuchen sey, werden sich an einem andern Orte zeigen lassen.

§. 6.

2) Die Schweere macht die Körper fallen, das ist, sich gegen die Erde zu bewegen, so bald sie sich frey überlassen sind. Dieser Fall derselben läßt sich so leicht nicht durch tägliche Erfahrungen beurtheilen, wie schnell er geschehe, und wie die Geschwindigkeit desselben zunehme. Indessen ist es eine allgemein bekannte Sache, daß die Wirkung eines fallenden Körpers heftiger sey, wenn er hoch herunter durch einen längern, als wenn er durch einen kürzern Weg fällt. Wir würden keine Gefahr dabey besorgen, wenn uns jemand drohete, einen Stein, etwa einen Apfel groß, einen oder zween Zoll hoch auf unsern Kopf fallen zu lassen. Aber wir werden für unser Leben besorgt werden, wenn wir eben diesen Stein von der Höhe eines

Hauses herab auf uns fallen sehen. Man nimmt schon durch das blosse Auge an Körpern, die von einer grossen Höhe herunter fallen, wahr, daß sie immer geschwinder im Fallen werden, und das Auge, das sie anfangs noch begleiten konnte, kann dieses zuletzt nicht mehr. Noch besser beurtheilen wir dieses an Körpern, die an einer schrägen Ebene heunter rollen. Auch hier wird ihr Lauf immer geschwinder. Allein dergleichen Erfahrungen sind nicht hinlänglich, um uns zu belehren, wie viel geschwinder diese Körper von Zeit zu Zeit in ihrem Laufe werden. Man hat indessen mit grosser Sorgfalt in hohen Gebäuden Versuche angestellt, und gefunden, daß ein Körper von vieler eigenthümlichen Schweere in einer Secunde etwa 15 Pariser Schuh, in zwo Secunden beynahe viermal, in drey Secunden neunmal und in vier Secunden sechszehnmal so weit falle.

Wenn man diese Zahlen der Weiten mit den Zahlen der Zeiten vergleicht, so sieht man, daß jene sich beynahe, wie die Quadratzahlen von diesen verhalten. Man hat Grund zu glauben, daß sie sich genau, wie diese, verhalten würden, wenn nicht die Luft ihnen in dem Fallen widerstünde, und zwar um so viel mehr widerstünde, und von ihrer Bewegung um so viel mehr abnähme, je geschwinder sie durch dieselbe dringen. Es ist nicht daran zu gedenken, daß man die Körper auf der Unterwelt in Umstände werde setzen können, da sie diesem Widerstande der Luft bey lange daurendem Falle nicht ausgesetzt wären. Läßt man die Körper an einer Fläche herunterrollen, so ist, ausser dem Widerstande der Luft, auch das Reiben dem Versuche nachtheilig, doch trifft die Sache noch genau genug zu, und man nimmt überhaupt mit Grunde an, daß die Körper mit einer solchen Geschwindigkeit fallen, daß sie Räume durchlaufen, welche sich, wie die Quadrate der Zeiten verhalten, das ist, sie kommen in der doppelten Zeit viermal, in der dreyfachen neunmal, in der vierfachen sechszehnmal, in der fünffachen

Zeit

Zeit fünf und zwanzigmal so weit fort, als in der ersten, u. s. f.

Eben dieses bestätigt sich auch an denen Körpern, welche nicht der Schweere allein unterworfen sind, sondern durch eine andre Kraft nach irgend einer andern Richtung geworfen werden. Sie bleiben nicht einen kleinen Augenblick der Zeit in der Linie des Wurfs, sondern die Schweerkraft treibt sie sogleich aus derselben heraus, und macht, daß sie eben so weit in jeder kleinern oder grössern Zeit von dieser Linie herabwärts sinken, als sie sonst im freyen Fall zu sinken pflegen. Weil nun dieses für jeden Augenblick und nicht etwan stoßweise geschicht, so verändert der Körper beständig seine Richtung, und bewegt sich in einer krummen Linie, von welcher die höhere Geometrie beweiset, daß sie derjenige Kegelschnitt sey, welchen man die Parabel nennt, die jedoch durch den Widerstand der Luft in etwas verändert wird. In einer solchen Parabel fällt z. E. die Bombe, in welcher Richtung sie auch geworfen wird. Ja selbst der so gerade scheinende Weg einer Kanonenkugel ist ein Stück einer solchen Parabel, deren Krümmung man aber nicht leicht bemerkt, weil die Kugel bey einem horizontalen Schusse zu bald die Erdfläche erreicht. Wenn sie aber dieselbe erreicht, so ist sie nicht auf einmal, sondern nach dieser Regul gesunken: Man setze, die Kanone werde (Fig. 1.) in A abgefeuert; AB sey der Weg, den diese Kugel in dem Viertel einer Secunde durchfliegt; so ist sie schon um $\frac{1}{16}$ von 15 Schuh, das ist um $11\frac{1}{4}$ Zoll in F gesunken; BC sey ihr gerader Weg für das zweyte Viertel einer Secunde, so ist sie viermal so tief, das ist 45 Zoll niedriger in G. Am Ende von $\frac{3}{4}$ Secunden ist sie neunmal, das ist $101\frac{1}{4}$ Zoll tiefer in H, und am Ende der ganzen Secunde volle 15 Schuh tiefer in I. Trifft sie hier, oder schon früher, die Erdfläche an, so schlägt sie in dieselbe ein, und kömmt nicht weiter. Würde sie aber von einem hohen Berge her abgefeuert, so würde sie auf eben die Art immer sinken, aber

immer unter dem Puncte seyn, bis zu welchem sie in gleicher Zeit, wenn keine Schweere auf sie wirkte, in gerader Linie gelangt seyn würde.

Anmerkung.

Es ist nicht schweer, dieses durch die Erfahrung auszumachen. AD (Fig. 2.) ist ein nach einer gewissen Ründung von B bis A ausgearbeitetes Stück Holz. Eine Kugel, die man von B bis A herablaufen läßt, bekömmt dadurch eine gewisse Geschwindigkeit, mit welcher sie in einer gewissen Zeit von A bis E läuft, wenn ein fester Boden ihr untergelegt wird. Durch die Schweere aber fällt sie in C, und wenn man zu eben der Zeit, da diese Kugel bey A hervorkömmt, eine andre Kugel von E gerade herabfallen läßt, so kommen sie zu gleicher Zeit in C hinab. Der Weg aber, durch welchen jene von A in C kömmt, läßt sich auf folgende Art bestimmen: Man theile die horizontale Linie AE in so viel Theile, als man will, z. E. in vier, die perpendiculare Linie EC aber alsdenn in sechszehn, ziehe darauf aus den Theilungs-Puncten der Linie AE Linien perpendicular, die sich wie die Quadrate dieser Theile verhalten. Die Kugel fällt, nachdem sie bey A hervorgekommen, längst einer krummen Linie, die durch diese Puncte gezogen ist, und welche keine andre als die sogenannte Parabel ist. Man kann eben dieses von den springenden Wassern zeigen. Die Bogen, nach welchen sie springen, sind keine Circulbogen, sondern Parabeln.

§. 7.

Aber fallen denn alle Körper gleich geschwind, und werden nicht zehn Pfund Bley geschwinder zur Erde kommen, als Ein Pfund, wenn man beyde von einer Höhe fallen läßt? Die Menschen haben dieses einige tausend Jahre geglaubt. Philosophen haben es ausdrücklich behauptet, und, als vor etwa hundert und funfzig Jahren Galilei, ein Italiäner, das Gegentheil versicherte, so kostete es ihm beynahe Ehre und Leben. Die gemeine Erfahrung beweiset freilich, daß Körper, die bey wenigem Gewichte vielen Raum einnehmen, weit langsamer im Fallen zur Erde kommen, als andere, die viel Gewicht bey wenigem Raum, oder, wie wir

es oben benannten, viel eigenthümliche Schweere haben. Wer weiß nicht, daß eine Feder, ein Blättchen Papier u. d. gl. viel langsamer fallen, als ein Stein oder ein Stück Bley. Allein meine Leser werden sich an den Widerstand der Luft erinnern, welcher alle Bewegung in etwas stört und aufhält, und es muß ihnen bey einigem Nachdenken sehr wahrscheinlich werden, daß auch dieses den Fall der Körper sehr hindre, wenn sie bey wenigem Gewichte mit einer grossen Fläche durch die Luft niederwärts dringen, die daher solchen Körpern, wie Federn, Papier, Flocken Wolle und dergleichen sind, an ihrer grossen Oberfläche einen Widerstand entgen setzt, der ihren Fall sehr langsam macht. Um uns in dieser Sache gewiß zu machen, war nöthig, die Körper in einen Raum zu bringen, der wenig oder gar keine Luft enthält, und sie in demselben fallen zu machen. Fallen hier die Körper, welche wir leicht und schweer nennen, gleich geschwinde zu Boden, so ist es ausgemacht, daß die Ursache jener Verschiedenheit blos in der Luft zu suchen sey. Dieß ist geschehen, und der Versuch läßt sich täglich durch Hülfe einer Luftpumpe wiederholen, durch welche man ein etliche Fuß hohes Glas so rein, als möglich, von Luft ausleert, alsdenn, vermittelst einer gewissen Maschine, einen Ducaten und Feder zugleich niederfallen läßt, welche sodann gleich geschwind den Boden, auf welchem das Glas steht, erreichen.

§. 8.

Diese Erfahrungen zusammen genommen haben die Naturkündiger neuerer Zeiten von der Natur der Schweerkraft gewisser gemacht, als man es ehemals war. Man ist dadurch belehrt worden,

1) daß die Schweerkraft auf die kleinsten Theile der körperlichen Substanz auf eben die Art wirke, wie auf grössere Theile. Sie führt ein Flöckchen Wolle,

wenn der Widerstand der Luft nicht mit ins Spiel kömmt, sie führt einen Span Holz so geschwind der Erde zu, als einen schweeren Kloz, oder als einen Bleyklumpen.

2) Daß also, je mehr körperliche Substanz in einem Körper beysammen ist, desto grösser dessen Gewicht sey, und daß man daher umgekehrt

3) von dem Gewicht eines Körpers auf die Quantität der körperlichen Substanz schliessen könne, die in ihm beysammen ist. Wenn wir z. E. ein Pfund Holz und ein Pfund Gold haben, so können wir versichert seyn, daß in beyden gleich viel körperliche Substanz sich befinde, ungeachtet beyde einen sehr ungleichen Raum einnehmen. Wenn wir aber ein gleich grosses Stück Holz und Gold haben, so werden wir gewiß, daß in jenem so viel weniger körperliche Substanz, als in diesem, sich befinde, je geringer das Gewicht von jenem, in Vergleichung des Gewichts von diesem, ist.

4) Das die Schweerkraft auf eben die Art in die bewegten Körper wirke, wie sie in die ruhenden wirkt. Diese drückt sie gegen alles, was ihnen zur Grundlage gegeben wird, unaufhörlich. Sie drückt aber auch die schon fallenden Körper, und macht, daß sie immer um so viel geschwinder fallen, und sezt ihrer Geschwindigkeit währendes Falls immer diejenige Bewegung aufs neue hinzu, welche sie ihnen im Anfang des Falls gab. Dieses geschicht nicht, wenn man Körper auf einander stossen läßt. Hier ist ihre Wirkung in einem Augenblick vollendet, und der angestossene Körper hat sogleich alle Geschwindigkeit, welche er durch den Stoß bekommen kann, bis ein neuer Stoß seine Geschwindigkeit oder Richtung verändert, oder ein zu starker Widerstand seine Bewegung aufhebt.

5) Daß sie die Geschwindigkeit der fallenden Körper in dem Maasse vermehre, je länger sie gefallen sind.

Ein

Ein Körper, der zwo Secunden lang gefallen ist, wird doppelt so geschwind, als er am Ende der ersten Secunde war, am Ende von drey Secunden wird er dreymal so geschwinde. Denn die Schweerkraft wirkt während des Falles auf eben die Art auf ihn, wie im Anfange, und setzt seiner Geschwindigkeit in gleichen Zeiten immer gleich viel zu. Wenn daher in denen Maschinen, wo man Körper von gewissen Höhen herabfallen läßt, um auf andre Körper zu schlagen, z. E. in den Rammen der Rammkloß viermal höher fallen könnte, so würde er doppelt so viel Geschwindigkeit, und folglich so viel mehr Kraft haben; um dreymal so viel Geschwindigkeit zu bekommen, müßte er neunmal höher fallen. Denn zu jenem Fall braucht er die doppelte, zu diesem die dreyfache Zeit, und in diesem Verhältniß mehrt sich seine Geschwindigkeit, in so fern man dieselbe für einen bestimmten Augenblick der Zeit seines Falles schätzet.

§. 9.

Weil die Schweerkraft sich mit ihrer Wirkung fast in alle Bewegungen einmischt, so ist es schweer, die Bewegungen, welche nicht von derselben herrühren, recht zu beurtheilen. Man muß den Körper in solche Umstände setzen, daß die Wirkung der Schweere ganz unthätig bleibe, und dieses geschicht einigermassen, wenn er sich über eine horizontale Fläche beweget, welche ihn während seiner Bewegung der Erde weder näher noch ferner von ihr bringt. Z. E. in die Bewegung einer Biliard-Kugel hat die Schweere keinen Einfluß, wenn die Tafel vollkommen eben und wagerecht ist, und wir sehen in dieser nichts, als die Wirkung des Stosses, der auf dieselbe gethan ist. Diese Wirkung ist eine wenigstens anfangs gleichförmige Bewegung in der geraden Richtung des Stosses, die nicht abnehmen oder sich verändern würde, wenn nicht die Rauhigkeit des Tuchs sie allmählig schwächte, und sie bald die Bande der Tafel erreichte, an welcher sie widerkehren muß.

Eine auf glattem Eise geworfene Kugel setzt die Bewegung viel weiter und länger fort, als es hier geschehen kann, und wiewol wir keine so glatte und unbegränzte Ebene finden, und den Widerstand der Luft nimmermehr hindern können, so haben wir doch Gründe genug anzunehmen, daß ohne diese Hindernisse die Bewegung, welche dergleichen Körpern durch Stossen, Schlagen, Drucken, Ziehen oder Werfen eingedruckt wird, in der geraden Richtung, in welcher sie angefangen ist, unaufhörlich mit gleicher Geschwindigkeit fortgehen würde. Dergleichen Kräfte theilen dem Körper auf einmal die ganze Bewegung mit, welche er haben soll, und es ist in dem Körper kein Grund, warum er diese Bewegung ändern sollte, sondern, wenn er sie ändert, vermuthen wir mit Grunde eine Ursach ausser ihm, welche dieselbe geändert hat. Wenn die Biliardkugel ihre Bewegung auf freyer Tafel ändert, und einen Punct trifft, auf den sie in gerader Linie nicht treffen könnte, so vermuthen wir mit Grunde, daß die Tafel in diesem Orte nicht wagerecht sey, und folglich die Schweere ihre Wirkung wieder einmische, oder daß das Tuch eine grössere Rauhigkeit habe, oder sonst eine unbemerkte Hinderniß im Wege liege.

§. 10.

Allein eben dergleichen geradelinichte Bewegungen haben nicht immer Eine, sondern oft mehrere Kräfte zur Ursache, die durch Druck oder Stoß wirken. In diesem Fall kömmt die Bewegung mit der Richtung weder der einen noch der andern Kraft überein, sondern geht in einer dritten Linie fort, die von beyden verschieden ist. Man versuche es, eine Biliard-Kugel mit zwo andern Kugeln zugleich anzuschlagen. Sie wird weder dem einen noch dem andern Stoß folgen, sondern die Richtung einer dritten Linie annehmen, welche zwischen den Richtungen beyder Stösse liegt. Ein Kirschenkern, der zwischen zween Fingern fortgequetscht wird,

wird, fliegt in keiner von beyden Richtungen fort, in welchen ihn der eine oder der andre Finger druckte.

Wir werden die Richtung, welche ein durch zwo Kräfte zugleich bewegter Körper annimmt, am besten und genauesten durch folgendes Exempel bestimmen können. A B (Fig. 3.) sey eine solide Linie, längst welcher wir annehmen, daß ein Insect mit einer gleichen Bewegung fortkrieche. Man theile die Zeit, in welcher es dieses thut, in fünf Theile. Seine Bewegung verhalte sich eben so. In der ersten Zeit krieche es von A bis 1, in der zweyten von 1 bis 2 u. s. f. Mittlerweile werde das Lineal mit ebenfalls gleicher Bewegung von A bis C parallel herunter bewegt, und nach und nach in die Lage gebracht, welche die Figur anzeigt. Alsdenn ist am Ende des ersten Theils der Zeit der Punct 1, und mit demselben das Insect in a, am Ende der zweyten der Punct 2 in b, folgends der Punct 3 in c, 4 in d, 5 in e gebracht, und das Insect ist durch seine eigene Kraft und diejenige, die das Lineal bewegte, so fortgeführt, daß es sich immer in einer Linie befindet, von welcher die Geometrie sehr leicht beweist, daß sie die Diagonal-Linie des Parallelogramms sey, welches durch die beyden Linien A B und A C und den Winkel, welchen sie mit einander machen, bestimmt wird. Ein andres Exempel: ABCD (Fig. 4.) sey ein Schiff oder Floß, welches in einer gewissen Zeit mit dem Strom einförmig bis in die Lage a b c d bewegt wird, da mittlerweile ein Mensch von A nach B quer über das Schiff fortgeht. Ihn bewegen also zwey Kräfte, theils seine eigene, theils die von der Bewegung des Schiffs angenommene Kraft. Seine Bewegung fing in A an und hört in b auf, und er ist eigentlich der Linie A b, der Diagonal des Parallelogramms A a b B nachgegangen. Es würde sich eben so mit einem leblosen Körper verhalten, der währender Bewegung des Schiffs queer über dasselbe von A nach B geworfen würde. Dem Auge eines Zuschauers vom Lande

ab würde derselbe in einer schrägen, auf dem Schiffe aber in der gerade über gehenden Bewegung erscheinen.

Man setze, das Schiff habe eben dieselbe Bewegung, ein Mensch bewege sich aus demselben von F aus (Fig. 5.) in der geraden Linie FGE, die von F gegen einen vesten Gegenstande auf dem Ufer gezogen ist. Am Ende seiner Bewegung ist nicht mehr der Punct G sondern der Punct H in dieser Linie und F in f gerückt. Er hat also auf dem Schiffe die Linie FH durchgehen müssen, da mittlerweile die Kraft der Bewegung des Schiffes ihn so weit, als die Linie Ff oder HG, herunter geführt hat. Seine wahre Bewegung ist aber in FG, der Diagonal des Parallelogramms FfGH.

Man kann Fälle angeben, wo ein Körper durch drey und mehrere Kräfte zugleich getrieben wird, wo aber die Bewegung immer geradelinigt bleibt, wann jene Kräfte entweder auf einmal oder mit einem gleichförmigen Eindruck wirken. Zu unserm Zweck aber sind die gegebenen Erläuterungen hinlänglich.

§. 11.

Krummlichte Bewegungen können nicht anders entstehen, als wenn ein Körper seine Richtung beständig in jedem kleinsten Augenblick der Zeit verändert. Dieses ist die Folge von der Wirkung verschiedener Kräfte, von denen eine oder mehrere ihre Wirkung oder Richtung in jedem kleinsten Augenblick der Zeit ändern. Wir haben ein Exempel davon §. 6. an den durch die freye Luft geworfenen Körpern gesehen, denen der Wurf allein nur eine gerade Bewegung mittheilen würde. Allein die Schweerkraft wirkt zu gleicher Zeit auf sie, nicht etwan auf eine gleichförmige Art, sondern ihre Wirkung verstärkt sich von einem Augenblick zum andern, und macht den Körper während seiner fortgesetzten Bewegung immer geschwinder fallen. Wirkte die Schweere nur mit einem Stosse, so würde der geworfene Körper nur eine geradelinichte Richtung bekom-

bekommen. Wirkte sie mit Stössen, die von Zeit zu Zeit wiederholt werden, so würde er in so viel verschiednen geraden Linien, als Stösse auf ihn wirken, forteilen, wie Fig. 6. anzeigt. Da aber ihre Wirkung auch nicht für den kleinsten Augenblick der Zeit sich gleich bleibt, sondern sich beständig erneuert und mehrt, so kann er auch nicht für den geringsten Zeitraum in einerley Richtung bleiben, sondern muß dieselbe unaufhörlich ändern, und folglich in einer krummen Linie fortgehen.

§. 12.

Wir haben ein andres Beyspiel von solchen krummlinichten Bewegungen, wenn wir einen Körper A an einem Bande aufhängen, und ihn mit einem Wurfe in der Richtung AB. (Fig. 7.) in eine schwingende Bewegung setzen, oder durch seine eigene Schweere sich bewegen lassen. Der Wurf oder die Schweere allein würden ihn nach einer geraden Linie AB oder AD forttreiben. Allein das Band, welches ihn trägt, erlaubt ihm nicht, sich über die einmal gegebene Weite von dem Punct C zu entfernen. Er kann also von Anfang an nicht in der Linie AB oder AD bleiben, sondern muß seine Richtung unaufhörlich verändern, wenn er die immer gleiche Entfernung von dem Mittelpunct C beybehalten soll. Reißt das Band, oder wird der Zug gegen den Mittelpunct auf irgend eine Art plötzlich aufgehoben, so fliegt er in der Linie davon, die den Circul, in welchem er sich bewegte, in dem Punct berührt, wo er sich für diesen Augenblick befand, und er entfernt sich immer mehr von dem Mittelpunct. Auf diese Art fliegt ein in der Schleuder lange um die Hand geschwungener Stein in der Linie davon, welche den krummen Bogen, in dem er geschwungen worden, eben da berührt, wo das Band, das ihn an die Hand hielte, gelöset wird. So fliegen von einem Feuerrade die entzündeten Pulvertheilchen in anfangs geraden Linien davon, bleiben aber in der Fläche des Circuls, in welchem sie so lange mit dem Rade herumgeschwungen waren.

Man

Man nennt diese gegen einander wirkenden Kräfte, deren eine gegen den Mittelpunct der Bewegung zu, die andre von demselben abführt, mit einem Namen **Centralkräfte**. Ich setze ihre nähere Betrachtung so lange aus, bis sie uns zur Beurtheilung derer Vortheile dienen kann, welche diese Kräfte in der Bewegung der Maschinen geben können.

Zweyter Abschnitt,

Gründe zur Vergleichung derer Kräfte, durch welche die Bewegungen hervorgebracht werden.

§. 13.

Wenn wir einen Körper in Bewegung gesetzt, oder wenn wir Bewegungen verändert oder gar aufhören sehen, so setzen wir allemal eine Ursache voraus, welche diese Bewegung hervorbringt oder ändert. Diese Ursache kann uns freylich oft unbekannt seyn. Wir geben ihr aber dennoch allemal die Benennung der Kraft, und wir verstehen darunter überhaupt ein Vermögen, Bewegungen hervor zu bringen und zu unterhalten, oder zu verändern, kurz, alles was auf die Bewegung einigen Einfluß hat. Wir nennen dagegen Last einen jeden Körper, der in Bewegung gesetzt werden soll, in so fern er dieser Bewegung widersteht, wiewol eben dieser Widerstand als eine Kraft angesehen werden kann. Wir nennen in diesem Verstande die Schweere, so wenig wir auch ihre Natur kennen, eine Kraft. Wir nennen das vorhin §. 2. erklärte Vermögen der Körper, den anfangenden Bewegungen zu widerstehen, aber auch die einmal angefangenen Bewegungen fortzusetzen, eine Kraft der Trägheit. Der Widerstand der Luft, das Reiben der Körper zeigen sich als Kräfte, welche Bewegungen aufhören machen.

machen. Körper, die in Bewegung gesetzt sind, haben eine Kraft, andern Körpern ihre Bewegungen mitzutheilen. Doch erfolgt diese Bewegung nicht allemal auf die Wirkung einer jeden Kraft. Denn, da die Körper der Bewegung widerstehen, so kann dieser Widerstand auch oft zu groß werden, und es entsteht keine Bewegung. In diesen Umständen bleibt es sehr oft mit der Wirkung der Schweerkraft. Die schweeren Körper wirken auf alles, was ihnen zur Grundlage gegeben wird, fortdaurend, doch sehr oft, ohne sie oder ihre Theile in Bewegung zu setzen. Die Kraft bleibt also eine **todte Kraft**, ein blosser **Druck**, bey welchem der Körper so wol, der bewegt werden, als der, welcher den andern bewegen sollte, ruhet. So lange aber ein Körper wirklich in Bewegung ist, und auch den andern in Bewegung setzt, so nennt man die Kraft des einen und des andern Körpers eine **lebende Kraft**.

Anmerkung.

Hier scheidet sich die gewöhnlich in Handbüchern abgehandelte Mechanik von der mechanica rationali, welche einen wichtigen Theil der Physik ausmacht. In jener bringt man alles auf den Stand der Ruhe, oder der todten Kraft. In dieser werden auch die lebenden Kräfte abgehandelt, und ihre Wirkungen erläutert. Doch ich finde zu viel nützliche Wahrheiten in Ansehung der letztern anzumerken, als daß ich diese Sache hier schon verlassen mögte.

§. 14.

Es sind also **lebende Kräfte**, durch welche ein Körper dem andern seine Bewegung mittheilt, und wenn wir eine Bewegung hervorzubringen zur Absicht haben, so muß die Kraft, die wir dazu anwenden, eine lebende Kraft werden. Es ist uns nicht genug, eine Maschine so eingerichtet zu haben, daß an ihr eine gewisse Kraft gehalten werde, die alsdenn nur eine todte Kraft bliebe. Wir verlangen mehr als dieses, daß nemlich die Kraft eine lebende werden, und die vorgesetzte Bewegung wirklich zuwege bringen möge.

Es wird also wichtig für uns, die Umstände etwas genauer zu kennen, in denen eine Kraft lebend, das ist stark genug wird, um die Bewegung, welche wir zur Absicht haben, hervor zu bringen. Ich werde einige allgemein erkannte Wahrheiten meinen Lesern in Erinnerung bringen, welche uns in dem Urtheile über diese Sache vornemlich leiten können. Eine derselben ist

1) daß die Körper, wenn sie sich gleich geschwinde bewegen, um so viel mehr Kraft haben, je schweerer sie sind. Man lasse einen Körper von einem Pfunde, und einen Körper von zehn Pfunden von einerley Höhe auf einen dritten Körper fallen, da beyde eine gleiche Geschwindigkeit haben werden; so wissen wir zum voraus, daß die Wirkung des leztern viel grösser seyn, ja wir schliessen so gar, daß sie zehnmal grösser seyn werde.

2) Die Kraft wird grösser, wenn die Geschwindigkeit grösser wird. Man lasse einen Körper natürlich fallen, und werfe einen andern, der von gleichem Gewicht ist, von eben der Höhe gerade herunter, und vermehre auf diese Art seine Geschwindigkeit, so wird gewiß seine Wirkung ungleich stärker, als die Wirkung des ersten seyn. Niemand wird sich für dem Gewicht einer Musketenkugel sehr fürchten, wenn sie aus freyer Hand mit der größten Geschwindigkeit, die ein Mensch ihr geben kann, geworfen würde. Allein bey der grossen Geschwindigkeit, die sie erhält, wenn sie abgeschossen wird, ist ihre Wirkung jedem thierischen Körper verderblich.

3) Daher kann ein kleiner Körper eine eben so starke Wirkung haben, als ein andrer ungleich schweererer, wenn er mit einer grössern Geschwindigkeit, als jener, geworfen wird. Wenn ein Pfund von einer gewissen Höhe herunter fällt, und ein andres Gewicht von zehn Pfunden von einer ungleich geringern, so kann jenes Pfund eben so viel ausrichten als dieses. Aus §. 8. haben

wir

wir schon gelernt, daß es mit zehnmal länger dauerndem Fall diese zehnfache Geschwindigkeit erlangen werde.

4) Ja, ein leichter Körper kann so gar die Wirkung eines weit schweereren ungemein weit übertreffen, wenn er bey wenigerm Gewicht eine viel grössere Geschwindigkeit hat. Eine zehnpfündige bleyerne Kugel, die mit der Hand geworfen wird, thut bey weiten nicht die Wirkung einer Musketenkugel, die wenige Lothe schweer ist, blos darum, weil diese eine so ungleich grössere Geschwindigkeit hat.

§. 15.

Allein meine Leser werden erwarten, daß ich diese allgemein bekannten Wahrheiten genauer bestimme, und hier anzeige, in welchem Verhältniß theils die Masse oder das Gewicht der Körper, theils die Geschwindigkeit derselben ihre Kräfte vermehre. Doch wie werde ich eine Sache hier zu entscheiden wagen, welche unter den Naturkündigern noch so streitig ist? Einige behaupten, die lebende Kraft der bewegten Körper nehme in dem Maasse zu, wie ihre Gewichte und ihre Geschwindigkeiten. Andre aber nehmen die Quadratzahlen der Geschwindigkeiten, und bestimmen aus deren Verhältnisse und dem Verhältniß ihres Gewichts die Kraft des bewegten Körpers. Z. E. man setze einen Körper A, (Fig. 8.) der sich längst der Linie AC in einer gewissen Zeit bewegt, und einen doppelt so schweeren Körper B, der sich in eben der Zeit durch die zweymal grössere Linie BD bewegt, und folglich die doppelte Geschwindigkeit hat. Nun rechnen jene, der Körper B habe wegen seiner zweyfachen Schweere und zweyfachen Geschwindigkeit viermal so viel Kraft, als A. Diese aber nehmen die Quadratzahl der Geschwindigkeit, und behaupten, er habe bey seinem doppelten Gewicht und doppelter Geschwindigkeit eine 2 × 4 mal das ist 8 mal grössere Kraft, als A. Wäre die Geschwindigkeit von B dreyfach, so würden jene sagen, seine

Kraft sey 2 ⋊ 3 mal, diese, sie sey 2 ⋊ 9 mal grösser. Man wird sich vielleicht wundern, daß diese Sache nicht durch Versuche habe ausgemacht werden können. Man hat freylich versucht, es zu thun. Man hat Körper mit gewissen Geschwindigkeiten und Gewichten in weichen Leim fallen lassen, und die Vertiefungen, welche sie in demselben gemacht, berechnet und verglichen. Allein in diesem Zusammendrücken des weichen Körpers durch einen harten kommen so viel Umstände mit vor, die wir nicht genau wissen, daß diese Versuche noch nicht so ausgefallen sind, als erfodert wurde, um die Sache auszumachen. Indessen ist der Nachtheil von dieser Ungewißheit nicht sonderlich groß für die Geschäfte des bürgerlichen Lebens. Wir wenden vielerley Werkzeuge an, z. E. Stampfmühlen, Hämmer, Rammen u. d. gl., um gewisse Körper zu zerstossen, ihre Figur zu verändern, oder sie in der Erde oder andern Körpern durch Einschlagen zu bevestigen, indem wir schweere Körper auf sie fallen lassen. Wenn wir genau wüßten, wie stark diese Körper bey einer gewissen Geschwindigkeit wirken, so würden wir freylich diese Maschinen besser berechnen können. Unterdessen thun sie ihre Dienste auch ohne diese Berechnung, und es ist nicht nöthig, wenn wir dreißig Mann an eine Ramme stellen, ihnen vorher die Neutonische oder Leibnitzische Meinung von der Berechnung der lebenden Kräfte zu erklären. Sie werden dennoch den Rammkloß nicht anders heben, und nicht anders fallen lassen, als sie ohne diese Wissenschaft thun würden. Zudem geht in dem Zerstossen solcher Körper, die auf einem vesten Boden liegen, und dem Einschlagen derselben in einem Boden von mehrerer oder minderer Vestigkeit, etwas vor, daß sich keinen gewissen Berechnungen unterwerfen, und unter keine bestimmte Reguln bringen läßt. Die Wirkung des Schlagens ist ungemein groß, in Vergleichung mit der Wirkung der Drückungen. Ein starker Schlag mit einem Hammer von fünf Pfunden, den man mit einer Hand führen kann,

thut ungefehr eben das, was man mit einem Druck von 500 Pfunden ausrichten kann. Ein Schlag mit einem Hammer von zwölf Pfunden thut eben so viel, als ein Druck von 1000 Pfund. (Man sehe *le Camus* Tr. des Forces mouvantes pour la Pratique des Arts & des Metiers Chap. 3. Prop. 6 & 7.) Ein kleiner Hammer kann einen Nagel so bevestigen, daß er mit einigen hundert Pfunden Gewicht sich nicht wieder herausziehen läßt. Pfähle, die mit einem Rammblock von einigen hundert Pfunden in die Erde getrieben worden, tragen nachher, ohne weiter nachzugeben, den Druck einer viele tausend Pfund schweeren Mauer. Man ist also nicht so sehr darum verlegen, wo man Kraft genug für solche Maschinen hernehmen wolle, die durch Schlagen und Stossen wirken. Der Schade ist nur, daß bey den meisten derselben mehr Kraft angewandt wird, als zur Erreichung ihres Endzwecks nöthig ist. Es wird einmal eine wichtige Verbesserung in der Mechanik seyn, wenn man in dieser Lehre so weit gekommen seyn wird, daß man bey jeder Maschine zuverläßig angeben kann, wie man es machen müsse, um nicht zu viel und nicht zu wenig Kraft an ihr anzuwenden, damit die stärkste Wirkung durch sie hervorgebracht werde. Die Naturkündiger haben sich hierinn viele Mühe gegeben, und für viele einzelne Fälle mit hinlänglicher Genauigkeit die Sache ausgemacht; allein man ist noch nicht so weit in dieser Sache gekommen, als zu wünschen wäre, und vielleicht hat sich die Nachwelt dieses Vortheils einst zu erfreuen.

§. 16.

Indessen muß man damit den Anfang machen, daß man die Maschinen und Werkzeuge der Bewegung in dem Zustande des Gleichgewichts untersucht, oder das Verhältniß derer Kräfte, die an ihnen wirken, für den Fall bestimmt, da sie durch den beyderseitigen Widerstand die Bewegung, welche die eine oder die andre allein hervorbringen würde,

aufheben. Ehe ich hievon rede, muß ich von dem Widerstande, den die Bewegungen überhaupt leiden, einige Anmerkungen beyfügen.

Wir kennen auf der Erde keine ohne Ende dauernde Bewegungen. Die vielen vergeblichen Bemühungen sind bekannt genug, welche man angewandt hat, um ein so genanntes perpetuum mobile oder ein Werkzeug, durch welches einem Körper eine unaufhörliche Bewegung beygebracht werden könnte, zu Stande zu bringen. Die Hindernisse derselben sind

1) **der Widerstand der Luft**, durch welche sich alle Körper bewegen, und welche um so viel mehr ihre Bewegung hindert, je leichter sie sind, und je mehr Oberfläche sie in Vergleichung ihrer Gewichte haben. Es gehört nicht viel Kraft dazu, einen Stein von etlichen Pfunden viele Fuß weit fortzuwerfen, Allein der stärkste Mensch wird mit Anwendung aller seiner Kräfte eine leichte Feder nicht sechs Fuß weit werfen können. Man kennt die Geschwindigkeit und die ferne Bewegung einer Kanonenkugel, wenn sie mit voller Ladung abgeschossen wird. Allein man schiesse eine Kugel von leichtem Holz mit eben der Ladung ab. Diese wird bey weitem nicht so geschwinde und so fern als jene gehn. Denn ihre Fläche ist grösser, in Vergleichung ihres Gewichts, und der Widerstand der Luft vermag folglich so viel mehr auf dieselbe. Es ist auch bekannt, daß die so genannten Kartetschen, welche aus vielen Kugeln oder unförmlichen Stücken Eisen bestehen, ihre Kraft in einer kurzen Weite verlieren, und dieses deswegen, weil die vielen Stücke weit mehr Oberfläche haben, als eine Kugel von gleichem, ja gar von weit grösserem Gewichte.

2) **Das Reiben der Körper an einander.** Man wird überhaupt bemerken, daß ein Körper sehr bald seine Bewegung verliert, wenn er sich mit seiner Fläche über die Oberfläche eines rauhen und unebenen Körpers fort bewegt, und man wird dieses um so viel eher bemerken, je rauher

und unebener die Fläche eines oder beyder Körper ist. Die Bewegung einer Biliard-Kugel ist nicht so leicht auf einem ganz neuen, als auf einem schon etwas abgenutztem Tuche. Sie würde noch viel schweerer auf einem begrasten Rasenbette seyn. Allein auf einer ganz glatten metallenen Platte würde sie doch endlich aufhören müssen, und überhaupt kann man keine Körper so glatt und eben machen, daß alles Reiben aufhörte, wenn sie sich übereinander fort bewegen. Denn wenn sie gleich dem Auge ganz glatt und eben scheinen, so entdeckt doch das Vergrösserungsglas Erhöhungen und Vertiefungen auf ihrer Oberfläche, welche nothwendig eine in die andre sich eindrücken, und die Bewegung ganz aufhalten würden, wenn sie nicht bey ihrer Schwäche theils zerbrächen, theils sich niederdrückten. Man stelle sich zwo Sägen vor, die mit ihren Zähnen in einander gepaßt sind. Es wird nicht möglich seyn, eine oder die andre, oder, wenn eine von beyden fest liegt, nur eine fortzubewegen, wenn nicht die Zähne einer oder beyder Sägen zerbrechen. Eben dasselbe geht, wiewol in geringerm Maasse, vor, so oft ein Körper über die Fläche eines andern fortbewegt wird. Doch wird dieses sehr gemindert, wenn der bewegte Körper rund ist. Denn alsdenn kann keine Bewegung desselben erfolgen, da sich die Zacken desselben zwischen den Zacken des unterliegenden Körpers ausheben, ohne zu zerbrechen.

3) Auch die Schweere wird eine öftere Hinderniß der Bewegungen, ich meine derer, die mit der Richtung der Schweere nicht übereinstimmen. Ein Stein, wenn er gerade aufwärts geworfen wird, nimmt eine immer langsamere Bewegung an, und muß sehr bald gegen die Erde widerkehren. Man hat Kanonen gerade in die Höhe gerichtet und abgeschossen, allein die Kugeln sind nach kurzer Zeit wieder zurück herunter gefallen. Ein jeder Körper, der schräge aufwärts geworfen oder abgeschossen wird, weicht sogleich von der geraden Linie gegen den Erdboden ab, wo er bald ruhig liegen bleibt. Wir bemerken diese Verände-

rung der Bewegung in eine krumme Linie nicht, wenn wir einen Körper über eine ebene Fläche fortwerfen, die den Eindruck der Schweere hindert, und macht, daß er gar nicht niederwärts sinken kann, sondern hier beschreibt derselbe eine gerade Linie und folgt der Richtung des Wurfs.

§. 17.

Dieses sind Hindernisse von der Fortdauer einer Bewegung. Theils eben dieselben Hindernisse, theils andre setzen sich dem Anfange der Bewegungen entgegen, und machen, daß Körper ungeachtet aller Kräfte, die auf sie wirken, dennoch in Ruhe bleiben.

Die Körper widerstehen überhaupt allen Bewegungen zu Anfange, vermöge der sogenannten Kraft der Trägheit, und dieses um so viel mehr, je mehr Masse oder Gewicht sie haben. Es gehört viel dazu, einen schweeren Stein über die ebene Erdfläche fortzubringen, ungeachtet diese Bewegung seiner Schweere nicht entgegen ist, und sehr grosse Körper werden eher zerbrechen, als daß sie sich so ganz, wie sie sind, fortbewegen liessen. Auch leichtere Körper widerstehen um so viel mehr, je grösser die Bewegung ist, welche man ihnen auf einmal eindrucken will. Man versuche es, einen Körper mit einem zerbrechlichen Stabe, z. E. einem Pfeifenstiele, fortzurücken. Es wird geschehen können, wenn man anfangs schwach drückt, und allgemach den Druck verstärkt. Allein der Stab wird zerbrechen, wenn man gleich anfangs ihn sehr schnell fortzurücken versucht. Oder man binde einen zarten Faden an einen etliche Pfund schweeren Körper und ziehe denselben allgemach über eine ebene Fläche fort. Dieser Faden wird zerbrechen, wenn man die Bewegung gleich anfangs sehr geschwinde macht, weil der Körper der geschwindern Bewegung mehr als der langsamern widersteht.

Allein wir haben mehr Ursache, darauf zu sehen, wie die Körper selbst durch ihre Schweere einer des andern Bewegung

gung hindern, indem sie beyde nicht zugleich vollführt werden können. Wir sehen diesen Fall täglich an den Waagen, wo zwar beyde Körper auf beyden Waagschalen sich beständig bemühen, niederwärts zu sinken, aber einer durch den andern durchaus daran gehindert werden. Wir nennen dieses ein **Gleichgewicht**, und man deutet überhaupt den Fall mit diesem Worte an, wenn die Kraft eines Körpers, welche er anwendet, um sich oder einen andern Körper zu bewegen, durch den Widerstand des andern Körpers aufgehoben wird.

Die Waage ist das einfachste Instrument, an welchem wir diesen Zustand des Gleichgewichts zwischen schweeren Körpern untersuchen können. Wir dürfen aber nicht gleich anfangs alles, was zur Einrichtung unsrer künstlichen Waagen gehört, dabey in Betrachtung ziehen. Eine unbiegsame Linie AB, (Fig. 9.) die auf einem vesten Punct C aufliegt, giebt das wesentliche derselben ab.

Man stelle sich an dieser Linie zween gleich schweere Körper, P und Q, in gleichen Entfernungen von dem Punct C in den Puncten P und Q bevestigt, oder, welches einerley ist, an denselben aufgehangen vor. (Fig. 10.) Es ist gewiß, daß die Kraft des einen Körpers P nichts mehr, als die von dem andern Q, vermöge, um die Linie AB in Bewegung zu setzen. Denn das, was die Grösse der Kraft hier bestimmen kann, ist auf beyden Seiten gleich, a) das **Gewicht**, welches wir gleich angenommen haben; b) die **Geschwindigkeit**, welche beyde Körper haben könnten, wenn sie sich wirklich bewegten. Denn sie würden sich in gleichen Bogen von gleichen Circuln, nemlich PD und QE, um den Punct C bewegen.

Allein man verändre eines von beyden, und mache 1) das Gewicht des einen Körpers P geringer, als das von dem andern Q. (Fig. 12.) Alsdenn ist die Kraft des ersten nohtwendig geringer, als die von dem andern, und jener wird nicht gänzlich durch diesen gehindert, sich zu bewegen. Oder

man verändre 2) den Ort des Körpers P und verrücke ihn in F. (Fig. 11.) Alsdenn hört seine Geschwindigkeit auf, der Geschwindigkeit des Körpers Q gleich zu seyn, und er kann sich der Bewegung desselben nicht mehr mit gleicher Kraft entgegen setzen. In beyden Fällen bewegt sich also der eine Körper Q, ungeachtet des Widerstandes von P, und das Gleichgewicht besteht nicht mehr.

Aber werden denn Körper von ungleichem Gewichte und ungleichen Geschwindigkeiten niemals einander das Gleichgewicht halten, und mit gleichen Kräften einer des andern Bewegung stören können? Wir haben schon oben (§. 14.) angemerkt, daß die Wirkung kleiner aber schnell bewegter Körper in ihrer Bewegung oft die Wirkung weit grösserer, aber langsam bewegter Körper, weit übertreffe. Wird sich hier gar keine Gleichheit erlangen lassen? Wird es nicht möglich seyn, auch Körpern, die sich an einer solchen Maschine gegen einander bewegen, das an Geschwindigkeit wieder zu geben, was ihnen am Gewicht abgeht, oder dem Körper, der sich in der Verbindung, worin er sich an der Maschine bewegt, langsamer bewegen muß, so viel mehr Gewicht zu geben, daß dadurch das, was ihm an der Geschwindigkeit fehlt, ersetzt werde? Man nehme (Fig. 12.) zween ungleiche Körper P und Q an der Waage AB an. Allein P sey eben so weit entfernt von C, als Q ist, so wird derselbe der Kraft von Q nachgeben müssen. Man verrücke ihn aber weiter gegen A, so wird seine Geschwindigkeit immer grösser werden, als die Geschwindigkeit von Q, und es wird sich endlich ein Punct D finden lassen, in welchem seine Geschwindigkeit, und mit derselben seine Kraft so zunimmt, daß er gerade so viel vermag, als der Körper Q. Die Frage ist, wie dieser Punct zu treffen sey?

Ein jeder, der dieser Sache nachdenkt, wird zum voraus vermuthen, daß es derjenige Punct sey, in welchem P eine Geschwindigkeit bekömmt, welche um so viel grösser ist, denn die Geschwindigkeit des Körpers Q, als das Gewicht

von diesem grösser ist, denn das Gewicht des Körpers P. Gesetzt, dieser sey halb so schweer als Q, dagegen aber bewege er sich zweymal so geschwind, als jener; so wird ihm das an der Geschwindigkeit ersetzt, was ihm an der Schweere abgeht, und also läßt sich hier eine Gleichheit der Kräfte vermuthen, welche endlich die Bewegung des andern Körpers ganz aufheben wird.

Die Erfahrung beweiset dieses in der That, und wir bringen allemal ein Gleichgewicht zwischen zween ungleichen Körpern zuwege, wenn wir sie so ordnen, daß, indem sie gegen einander wirken, der eine um so viel mehr Geschwindigkeit bekömmt, je kleiner sein Gewicht in Vergleichung des andern ist, oder wie man es lieber ausdrückt: **Das Gleichgewicht entsteht, wenn sich die Geschwindigkeiten der gegen einander wirkenden Körper umgekehrt, wie ihre Gewichte, verhalten.** Weil aber diese Geschwindigkeiten von denen Entfernungen abhängen, welche die Körper von dem Ruhepunct haben, und sich eben so, wie diese, verhalten, so läßt sich auch der Satz also ausdrücken: **In dem Gleichgewicht an der Waage verhalten sich die Gewichte umgekehrt, wie die Entfernungen von dem Ruhepunct.**

Wenn vier Grössen in gleichem Verhältnisse sind, so ist das Product der ersten durch die vierte gleich dem Product der zweyten durch die dritte. Wenn sich nun in dem Zustande des Gleichgewichts das Gewicht des Körpers P zu dem Gewicht des Körpers Q verhält, wie die Geschwindigkeit des Körpers Q zu der Geschwindigkeit des Körpers P, so ist das Product von dem Gewichte P durch seine Geschwindigkeit gleich dem Product von dem Gewichte Q durch die Geschwindigkeit desselben. Man nennt diese Producte das Moment der Körper, und man sagt dem zufolge mit einem andern Ausdruck: **In dem Gleichgewicht sind die Momente der Körper gleich.**

Dieses Gesetz gilt für die ganze Mechanik, und wir werden es bey allen, wenn gleich noch so sehr zusammengesetzten, Maschinen wieder antreffen, wo das Gleichgewicht allemal in dem Fall Statt hat, wenn die Geschwindigkeit der Kraft oder der Raum, durch welchen dieselbe bey der kleinsten Bewegung fortrückt, sich zu dem Raum, durch welchen die Last fortrückt, so verhält, wie das Gewicht der Last zu dem Gewicht der Kraft.

Anmerkung.

Ich habe dieses Grundgesetz der Mechanik nicht mit denen Beweisen bestättigen mögen, welche man in so vielen Abhandlungen von der Mechanik antrifft, unter welchen mir der vom de la Hire in seiner Mecanique S. 15. allemal am meisten Genüge gethan hat, ein Beyfall, welchen ich durch vieler grosser Mathematikverständigen Beystimmung mit Vergnügen bestättigt sehe. Ich nehme aber diesen Satz hier vornehmlich als einen Erfahrungssatz an, auf welchen jedoch der Verstand sehr leicht geleitet wird, wenn er die Gleichheit der Kräfte untersucht, welche er sich in keinem Falle leichter, als in diesem, vorstellen kann, wenn der eine Körper gerade so viel an Geschwindigkeit gewinnt, die Bewegung beyder Körper mag so klein seyn, wie sie wolle, als er am Gewicht weniger hat. Man wende nicht ein, daß in dem Zustande des Gleichgewichts gar keine Bewegung sey, und man anders von den Drückungen, als von dem Stosse urtheilen müsse. Denn es entsteht kein Gleichgewicht, ohne eine vorhergehende, wenn gleich oft unmerkliche Bewegung und Schwankung der Körper, welche man an die Maschine bringt, die aber wegen der Gleichheit der Kräfte für keinen Theil überwiegend werden kann, und durch das Reiben und den Widerstand der Luft bald gar gehemmt wird.

Ich habe vorhin der Ungewißheit erwähnt, in welcher noch die Schätzung der lebenden Kräfte sich befindet. Nach der eben gemachten Anmerkung trägt die Erfahrung an den im Gleichgewichte befindlichen Kräften sehr vieles zur Entscheidung dieser Frage bey. Denn hier vergleicht man zwar nur die so genannten todten Kräfte; allein der geringste Ruck oder Stoß versetzt sie sogleich in den Zustand der lebenden Kräfte, welche aber dennoch nicht eine die andre zu einer fortdaurenden

Bewegung bringen können, wenn die Masse des einen Körpers durch seine Geschwindigkeit multiplicirt eben so viel beträgt, als die Masse des andern, wenn sie durch dessen Geschwindigkeit multiplicirt wird. Wollte man die Quadrate der Geschwindigkeiten nehmen, und dadurch die Massen multipliciren, so würden ganz ungleiche Kräfte entstehen, bey welchen gar kein Gleichgewicht Statt haben könnte. Doch es ist für uns genug, daß wenigstens das Maaß der Kräfte im Gleichgewichte keiner Ungewisheit unterworfen ist, und beyde Partheyen wenigstens in dieser Sache übereinkommen.

§. 18.

Wir sehen auf diese Art ein Mittel ein, einem schweeren Körper durch den Gegendruck einer ungleich leichteren Kraft zu widerstehen. Wir dürfen die letztere Kraft nur ein wenig verstärken, dadurch, daß wir ihr mehr Gewicht oder Geschwindigkeit geben, so wird das Gleichgewicht zum Vortheil dieser Kraft gehoben werden, und der schweere Körper der Bewegung des ungleich leichteren nachgeben müssen. Man hänge an die Linie AB einen Körper von einem, und einen andern von zwey Pfunden an, doch mit umgekehrten Entfernungen, so wird das Gleichgewicht da seyn. Man hänge dem leichteren Körper ein kleines Gewicht an, oder rücke ihn etwas ferner von dem Ruhepunct ab, so wird die Kraft desselben in beyden Fällen verstärkt, und das Gleichgewicht gehoben, oder es entsteht ein Uebergewicht der einen Kraft über die andre. Man kann dieses auf unendliche Art verändern, und man kann bey einer sehr grossen Entfernung von dem Ruhepunct einem sehr leichten Körper das Uebergewicht über einen sehr schweeren geben. Dabey aber wird der schwerere eine so viel langsamere Bewegung behalten, und es wird so viel mehr Zeit dazu gehören, ihn durch einen gewissen Raum zu heben, je leichter der Körper ist, dessen Kraft man dazu anwendet, oder je weniger derselbe drückt. Indessen achtet man den Verlust an der Zeit wenig, wenn man den andern Vortheil erhalten kann. Wir finden uns öfter in den Umständen, da wir Gewichte,

die allen menschlichen und thierischen Kräften an sich zu schweer sind, wollen gehoben wissen. Wenn wir dieses durch Hülfe einer Maschine zu Stande bringen, so ist uns gewöhnlich gleichgültig, ob dieses in längerer oder kürzerer Zeit geschehe. Doch giebt es auch Fälle, wo man mit Anwendung vieler Kraft einen Körper sehr schnell zu bewegen sucht, und der Vortheil an der Geschwindigkeit mehr als der Vortheil an der Kraft, deren Druck wir anwenden, mit unsern Absichten übereinstimmt.

Für beyde Fälle sorgt die practische Mechanik, welche ich nun in der Folge abhandeln werde. Man kann sie daher in ihrem allgemeinen Umfange beschreiben als eine **Wissenschaft, eine jede gegebene Last mit Vortheil der Zeit oder der Kraft zu bewegen.**

Anmerkung.

Man nehme eine ungeheure Last, z. E. von einer Million Pfunden, an, und verlange, daß sie durch die wenigstens zehntausendmal kleinere Kraft eines Menschen in Bewegung gesetzt werden solle; so giebt freilich die Mechanik durch ihre Theorie das Werkzeug ohne Schwierigkeit an, durch welches diese Wirkung hervorgebracht werden kann. Man wird sich an den Wunsch des Archimedes erinnern, der, als er die Geheimnisse der practischen Mechanik, und wie weit dieselben führten, deutlich einsahe, ausrief: man solle ihm einen festen Stand ausser der Erde geben, so wolle er die Mittel finden, sie aus ihrem Orte zu heben. Ich weiß nicht, ob Archimedes die Maschine entworfen hat, die er dazu anwenden wollte. Allein, er hätte sie gewiß entwerfen können, und man darf dieses nicht für eine leere Prahlerey ansehen, in so fern es sich blos auf die Theorie der Mechanik bezieht, für welche keine Aufgabe zu schweer oder unauflöslich ist. Allein, wenn es zur Ausübung kömmt, so entstehen freylich eine Menge Hindernisse aus der Beschaffenheit der Materialien, die man zu den Werkzeugen anwendet, aus dem Reiben und andern Hindernissen der Bewegung, daß sich nicht alles, was aufgegeben wird, ausführen läßt. Zuletzt wird auch bey einem ungemein grossen Verhältniß der Last gegen die Kraft der Verlust an der Zeit sehr nachtheilig, die Maschine bewegt sich

sich zu langsam, und man wählt lieber eine andre, die mehr Kraft erfodert, und ihre Wirkung geschwinder leistet. Denn beydes zugleich zu erhalten und an der Kraft, so wie an der Geschwindigkeit, zu gewinnen, ist unmöglich, und wer eine Maschine, die diesen gedoppelten Vortheil leisten sollte, anzugeben sich unternähme, würde seine Unwissenheit in den ersten Grundsätzen der Mechanik gar zu deutlich verrathen.

Dritter Abschnitt.

Von dem Hebel und denen einfachen Maschinen, die sich aus dem Hebel erklären lassen.

§. 19.

Wir haben dem Werkzeuge, an welchem wir das Grundgesetz des Gleichgewichts einsahen, bisher den Namen der Waage gelassen. Allein wir werden von nun an allen Werkzeugen, an denen wir uns eine starre Linie, die auf einem vesten Punct aufliegt, und in zween oder mehreren Puncten von verschiedenen Kräften angezogen wird, vorstellen können, die allgemeinere Benennung eines Hebels geben, den Namen **Waage** aber nur für das Werkzeug gebrauchen, das im gemeinen Leben unter demselben bekannt ist, dessen Ruhepunct sich in unveränderter Lage zwischen zween gleich langen Armen befindet.

Wir kennen den Hebel freylich im gemeinen Leben, als ein Werkzeug, das aus einer starken Stange besteht, auf eine veste Unterlage gelegt wird, und mit dem kürzern Theile schweere Lasten zu bewegen angewandt wird, da auf den längern Theil die Kraft wirkt. Allein wir sehen hier noch nicht auf die Materie, Dicke und Schweere eines solchen Werkzeugs, wobey wir genöthigt seyn würden, zugleich auf das Gleichgewicht der Theile des Hebels selbst zu achten.

Wir müssen aber sogleich zwo Arten des Hebels unterscheiden. Die Lage des Ruhepuncts, in Absicht auf die Last und Kraft, giebt den Grund zu diesem Unterschiede.

Ein

Ein Hebel der ersten Art ist, dessen Ruhepunct C (Fig, 13.) zwischen der Kraft V und der Last P liegt. Man braucht denselben am gewöhnlichsten zur Hebung oder Fortwälzung grosser Lasten. Bey einem Hebel der zweyten Art sind Kraft und Last beyde auf einer Seite des Ruhepuncts C befindlich, wirken aber in entgegen gesetzten Richtungen, da die Last P (Fig. 14.) niederdrückt, die Kraft V aufwärts zieht. Hebel dieser Art geben die gewöhnlichen Schubkarren, und alle den Karren ähnliche Fuhrwerke ab, bey denen der Bewegungspunct C in der Axe des Rades (Fig. 15.) zu suchen ist, die Last P in einer gewissen Entfernung niederwärts drückt, und die Kraft in einer gewissen Entfernung aufwärts zieht. Man findet in vielen mechanischen Büchern als eine besondre dritte Art den Hebel angegeben, bey welchem Kraft und Last auf einer Seite des Ruhepuncts (Fig. 17.) die Last aber in einer grösseren, die Kraft in einer kleineren Entfernung wirken. Dergleichen Hebel geben die Knochen der Glieder des menschlichen Körpers ab, welche von den Muskeln um ihre Gelenke gewandt werden, die aber in einer viel kürzern Entfernung auf den Hebel ziehen, als in welcher der Druck des Gewichts, das dieselben beschweert, auf ihn wirkt. Allein dieser Hebel ist von dem Hebel der andern Art zu wenig unterschieden, und wir haben nicht mehr Ursache, denselben in eine besondre Klasse zu setzen, als wir Gründe finden, unter den Hebeln der ersten Art diejenigen, bey welchen die Last die weitere Entfernung von dem Ruhepunct hat, von denen zu unterscheiden, bey welchen sie die kürzere Entfernung hat.

Bey allen diesen Hebeln aber hat das Gleichgewicht Statt, wenn die Entfernung der Kraft sich zu der Entfernung der Last so verhält, wie das Gewicht der Last zu dem Gewichte, mit welchem sich die Kraft vergleichen läßt. Ist daher die Last entfernter von dem Ruhepunct, so muß die Kraft stärker drücken, als die Last, und die Bewegung ist schweerer, aber auch geschwinder, als wenn die Last unmittelbar gehoben werden sollte.

§. 20.

§. 20.

Wir haben bis dahin den Hebel als eine gerade starre Linie betrachtet, und zu den ersten Versuchen, die das Gesetz des Gleichgewichts erläutern, wendet man freylich keine andre Werkzeuge als solche an, deren Figur mit einer solchen Linie genau überein kömmt. Sollte aber die Vorstellung des Hebels bey solchen Körpern aufhören, die nicht diese Figur haben? Man nehme eine krumm geschmiedete Stange, oder den unausgebildeten Ast eines Baums, so wird man ihn noch zu eben dem Gebrauch anwenden können, und, wenn man ihm (Fig. 18.) eine feste Unterlage in C giebt, in P eine Last anhängt, und in dem entferntern Punct V auf der andern Seite drückt, noch eben den Vortheil der Kraft an demselben bemerken, den man bey einem ganz geraden Hebel findet. Denn der geradelinigte Hebel ist noch da in der Linie PCV, die zwar nun nicht mehr ganz in der vesten Masse des Körpers, den man dazu anwendet, liegt, auf welche wir aber doch eben die Vernunftschlüsse anwenden können, die uns das Grundgesetz des Gleichgewichts bey jenen Hebeln §. 17. einsehen machten.

Wir werden also in der Folge, wenn wir von Hebeln reden, nicht an die Figur des Körpers, der dazu gebraucht wird, unsre Vorstellung binden dürfen, ja nicht einmal denn, wenn die Figur desselben so beschaffen ist, daß die Puncte P, C, V, deren Bedeutung man nun schon kennen wird, nicht mehr in eine gerade Linie sich bringen lassen. Man nehme einen Körper von so wunderlicher Bildung, als Fig. 19. darstellt, der aber dennoch als Hebel dienen kann. Wenn die Last auf P die Kraft aber auf V drückt, so beschreiben beyde Puncte und mit denselben Kraft und Last die Circulbogen VA und PB, deren Radii die Linien CV und CP sind. Allein die Kraft muß nun der Bewegung folgen, welche der Punct natürlich annehmen kann, und da derselbe in der ersten kleinen Bewegung nicht gerade niederwärts, in der Richtung VD, sondern nur nach der

Richtung VE weichen kann, so muß sie nach dieser lezten Richtung drücken oder ziehen. Thut sie dieses, so ist ihre wahre Geschwindigkeit zu der Geschwindigkeit der Last, wie CV zu CP, und sie kann, wie vorhin an dem geradelinigten Hebel, in dem Verhältnisse CP zu CV kleiner, als diese, seyn. Ein Hebel dieser Art, den wir uns nicht anders, als in zwo gegen einander laufenden Linien vorstellen können, hat die Benennung des **Winkelhebels.**

Wir müssen nach diesen Anmerkungen zu dem geradelinigten Hebel zurück gehen, an welchem wir bisher die Kraft und Last nur in dem Zuge betrachtet haben, den sie annehmen, wenn sie als Gewichte perpendicular niederwärts an dem horizontalen Hebel ziehen. Allein man verändre die Richtung der erstern aus der perpendicularen in die schräge VB (Fig. 20.) Dieses muß nothwendig einen Einfluß auf die Veränderung ihres Vermögens haben. Denn der Punct V kann nun bey seiner ersten Bewegung nicht in der Richtung weichen, in welcher er gezogen wird. Da wir aber wissen, daß wir in der Vorstellung des Hebels nicht an die Figur des Körpers, der denselben darstellt, gebunden sind, so leuchtet es bald ein, daß der wahre Hebel, den wir uns vorzustellen haben, der Winkelhebel PCv sey, welcher bestimmt wird, wenn wir die Richtung der Kraft VB nach Willkühr verlängern, und alsdenn eine Linie Cv von C aus perpendicular auf dieselbe ziehen. Hätte der Hebel einen andern soliden Arm in dieser Richtung, so ist es deutlich einzusehen, daß die Wirkung der Kraft sich nicht verändern könne, man mag sie auf den Punct V oder auf v ziehen lassen. Wären alle diese Linien in einer Scheibe (Fig. 21.) veste, die sich um den Punct C wenden kann, und kein Uebergewicht weder zum Vortheil der Kraft noch der Last hat, so würde es einerley für die Kraft seyn, ob der Faden, an dem sie zieht, in V oder in v bevestigt wäre. Die grössere oder kleinere Länge des Fadens kann nichts für oder wider die Kraft ausrichten.

Alles dieses aber gilt auch von dem Druck oder Zuge der Last, wenn dieselbe nicht perpendicular auf den Arm des Hebels drückt. Man lasse den Faden, an welchem dieselbe hängt, an dem Punct P bevestigt, gebe ihm aber, auf eine oder die andre Art, die schräge Richtung PD, und ziehe auf diese in der Scheibe die Perpendicularlinie Cp, so ist es nicht anders, als wenn sie auf den Punct p zöge, und die wahre Entfernung der Kraft wird nun durch die Linie Cp ausgedrückt.

Wir können aber die Scheibe oder die soliden Hebel allemal künftig aus unsrer Vorstellung entfernen, und wenn wir den Bewegungspunct und die Richtung der Kraft und der Last wissen, sehr geschwinde das wahre Verhältniß von beyden für den Fall des Gleichgewichts bestimmen, wenn wir von jenem aus auf diese zwo Perpendicularen ziehen, es mag alsdenn ein gerader oder ein Winkelhebel entstehen. Man wird alsdenn deutlich einsehen, warum manchmal eine Kraft, welche mehr als hinlänglich seyn würde, um einen gewissen Widerstand zu heben, wenn sie in der rechten Richtung zöge oder drückte, nichts ausrichte, weil sie eine gar zu schräge Richtung hat, wenn sie gleich dem Anschein nach in einer grossen Entfernung wirkt. Z. E. in der 22sten Figur sey P ein Gewicht von 10 Pfunden, CV zweymal so groß, als CP; so dürfte die Kraft in V nur halb so groß als P, nemlich fünf Pfunde stark seyn, wenn sie perpendicular auf den Hebel drückte. Allein bey der Richtung, welche sie hier hat, wird sie 20 Pfund stark seyn müssen. Denn die wahre Entfernung Cv ist nur halb so groß, als CP. Diejenigen Maschinen sind daher die vortheilhaftesten, in welchen die Kraft beständig in perpendicularer Richtung auf die Linie wirkt, welche von dem Ruhepunct aus auf den Punct, auf welchen die Kraft wirkt, geht. Bey vielen Maschinen ist dieses unmöglich zu erhalten, und die Kraft muß ihre Richtung beständig während der Bewegung derselben verändern. Wir werden dieses in der Beurtheilung

derer Maschinen häufig anwenden, welche wir in der Folge zu erklären haben. In den Bewegungen des menschlichen Körpers ist auf diesen Umstand hauptsächlich zu achten. Die Muskeln ziehen auf die Knochen als auf Hebel in einer sehr schrägen Richtung, welche sich aber ohn Unterlaß verändert.

§. 21.

Wir haben bisher die Hebel als Linien ohne Schweere angesehen. Allein ein solcher Hebel ist nirgends zu finden, sondern ein jeder Körper, den wir dazu anwenden können, hat eine gewisse Schweere, nicht nur überhaupt, sondern auch in allen einzelen Theilen. Er wird überdem noch durch das Gewicht derer Körper beschweert, die als Kraft und Last auf ihn drücken. Allein die Wirkung dieser Schweere wird ganz gehoben, wenn der Hebel nur in einem Punct, welchen wir bisher den Ruhepunct genannt haben, unterstützt wird. Man unterstütze ihn in irgend einem andern Puncte, als in diesem, so wird alsobald die ganze Wirkung seiner Schweere sich wieder äussern, und der Hebel samt den mit ihm verbundenen Gewichten wird, so weit er nur kann, gegen die Erde sinken. Man kann also die ganze Schweere aller dieser Körper als in diesem einzigen Punct vereint ansehen, welcher daher mit einem andern Namen der Schweerpunct genannt wird.

Wir merken eben dieses bey Körpern von aller Gestalt und Grösse an, die freylich, sowol im Ganzen, als in ihren Theilen, ein gewisses Gewicht haben. Allein es lässt sich in allen ein gewisser Punct bemerken, welcher allein nur unterstützt, oder von oben her gehalten werden darf, damit der ganze Körper getragen werde. Es ist alsdenn nicht nöthig, den Körper in andern Puncten seiner Fläche zu unterstützen, sondern derselbe bleibt in Ruhe, so lange nicht eine andere Kraft diesen Schweerpunct aus seiner Stelle verdrängt.

§. 22.

Es ist schweer, bey der mannigfaltigen Figur, Grösse und ins unendliche verschiedenen Zusammensetzung der Körper, diesen Punct anders als durch die Erfahrung zu bestimmen. Die Geometrie weiset zwar die Wege, dieses durch Zeichnungen oder durch Rechnung zu thun. Allein sie setzt dabey allemal Körper voraus, deren Figur nach einer gewissen Regul bestimmt ist, und die durchaus von einerley Materie zusammengesetzt sind. So sind aber nur wenige Körper beschaffen, und wir können daher diese Hülfsmittel der Geometrie im gemeinen Leben nur selten anwenden. Wir wollen indessen einige Wahrheiten bloß als Erfahrungssätze hier anmerken, welche uns theils in der Bestimmung des Schweerpuncts der Körper, theils in der Beurtheilung derer mannigfaltigen Erscheinungen leiten können, welche davon abhängen.

1) Wenn der Körper durchaus aus einerley Materie besteht, so kömmt der Mittelpunct seiner Grösse mit seinem Schweerpunct überein.

Eine Kugel, ein Cylinder, ein Parallelepipedum von Metall haben einerley Schweerpunct und Mittelpunct der Grösse, wenn sie durchgehends von einerley Materie sind. Allein man bevestige gegen den Rand zu in einem hölzernen Cylinder ein Stück Metall, so wird zwar der Mittelpunct der Grösse noch an eben demselben Ort bleiben, aber der Schweerpunct von demselben ab, gegen das Metall zu, weichen. Bey den Rädern, wenn sie gut gearbeitet sind, fallen der Mittelpunct der Grösse, der Schweere und der Bewegung alle in einander, und es ist ein grosser Fehler, der die Regulmäßigkeit der Bewegung solcher Räder sehr störet, wenn dieses nicht geschicht.

2) Wenn der Mittelpunct der Schweere und der Grösse übereinkommen sollen, so muß der Körper auf allen Seiten des lezteren gleichförmig gebildet seyn, und alle Linien, die durch den Mittelpunct der Grösse nach der Oberfläche zu

gehen, auf beyden Seiten gleich lang seyn. Man nehme z. Ex. eine regulär geschmiedete Stange Eisen, in deren Mitte deren Schweerpunct sich findet. Man lasse die Hälfte derselben zu einer grössern Länge schmieden, und lasse die andre Hälft unverändert. Alsdann bleibt zwar der Mittelpunct der Grösse noch unverändert, aber der Schweerpunct ist gegen den verlängerten Theil zu gewichen.

3) Wenn daher ein Körper seine Figur von Zeit zu Zeit ändert, so verändert sich mit derselben sein Schweerpunct, wenn gleich die Materie und Grösse desselben unverändert bleibt. Wir haben davon ein sehr deutliches Beyspiel an dem menschlichen Körper. Der Schweerpunct desselben ist, wenn die Arme gleichförmig liegen, in einem bestimmten Puncte. Allein eine jede Ausstreckung des einen Armes, eine kleine Verbeugung des Leibes, ja auch nur eine Neigung des Kopfs, verändert die Lage des Schweerpuncts. Der Schweerpunct der meisten Vögel ist zwischen ihren Flügeln, wenn sie mit gerecktem Halse und hinter sich gestreckten Beinen fliegen. Allein der Hals des Reihers ist zu lang, und sein Schweerpunct würde vor den Flügeln seine Lage bekommen, wenn er auf diese Art fliegen wollte. Er muß also die Figur des Halses ändern, und biegt denselben, wie in einen Ring, zusammen, so bald er sich im Fluge von der Erde erhebt.

4) Der Schweerpunct liegt nicht immer in der soliden Masse der Körper. Ein holes rundes Gefäß (Fig. 23.) hat denselben nicht in den soliden Theilen, woraus es besteht, sondern er fällt innerhalb des holen Raums z. Ex. in C, welchen dessen Wände einschliessen. Es ist eben so mit einem nicht beladenen Schiffe bewandt.

5) Der Schweerpunct nimmt allemal den niedrigsten Ort ein, zu welchem er nach der Lage, die dem Körper gegeben ist, gelangen kann. So lange also der Grund, welcher den Körper trägt, den Schweerpunct desselben nicht auf eine solche Art unterstützt, daß alle Bewegung desselben nieder-

niederwärts verhindert wird, so kann er nicht in dieser Lage bleiben. Der Körper A (Fig. 24.) wird daher der Länge nach auf den horizontalen Boden, der ihn trägt, aus der Lage BB in die Lage BbD fallen müssen. Denn dieser hindert freylich den Körper, daß er nicht ganz unter die Fläche Bb sinken kann, aber er hindert den Schweerpunct C nicht, daß er nicht in dem Bogen Cc sich bewegen sollte, und da er in jedem Punct dieses Bogens niedriger zur Erde kömmt, so nimmt er wirklich diese Bewegung an, und setzt sie so lange fort, als er kann. Der Körper E (Fig. 25.) wird aus ähnlichen Gründen auf der schiefen Fläche überfallen. Ein andrer F wird zwar nicht überfallen. Denn um dieses zu thun, müßte sein Schweerpunct zuerst sich in dem Bogen Cc in die Höhe heben, welches nicht möglich ist. Aber er wird längst der Fläche in der Linie CG herabgleiten. Eine Kugel H oder ein jeder runder Körper (Fig. 26.) wird auf keiner schiefen Fläche in Ruhe bleiben können, sondern beständig herabrollen, weil der Mittelpunct der Schweere C nicht von der Fläche unterstützt wird, sondern die Linie der Richtung CI, nach welcher der Schweerpunct sich zu senken sucht, über den Punct hinaus fällt, in welcher die Kugel von der Fläche getragen wird. Ueberhaupt, wenn auch der ganze Körper von einem vesten Grunde getragen wird, es bleibt aber noch eine Bewegung für den Schweerpunct frey, in welcher derselbe der Erde näher kommen kann, so wird er diese Bewegung annehmen, und den ganzen Körper, so weit als möglich, mit sich fort führen. Wenn eine Kugel A (Fig. 27.) an einem Bande hängt, aber etwas seitwärts gehalten wird, so bewegt sie sich mit einer gemehrten Geschwindigkeit in dem Bogen AB, bis sie den Punct B erreicht, in welchem sie der Erde am nächsten hängt. Doch bleibt sie nicht in diesem Puncte, sondern, weil sie die Geschwindigkeit, welche sie mit diesem Fall bekommen hatte, nicht auf einmal verlieren konnte, bewegt sie sich in dem Bogen BD eben so weit, als sie herab gesun-

ken war, und würde in dieser wiederkehrenden Bewegung beständig fortfahren, wenn nicht der Widerstand der Luft sie nach und nach abnehmen machte, bis sie endlich in dem Punct B völlig zur Ruhe kömmt. Diese wiederkehrende schwankende Bewegung ist unser Aufmerksamkeit sehr würdig. Ich will aber das, was sich in Ansehung derselben anmerken läßt, lieber auf einen andern Ort sparen, als den Zusammenhang dieser den Schweerpunct betreffenden Anmerkungen unterbrechen.

6) Wenn dem Körper eine Bewegung in einer Richtung eingedrückt wird, die nicht unmittelbar auf den Schweerpunct gehet, so wenden sich alle Theile des Körpers um den Schweerpunct, und dieser bleibt so lange in Ruhe, bis ein fortdauernder Zug oder Druck denselben in eine solche Stellung gebracht hat, daß die Richtung desselben gerade durch den Schweerpunct geht. Wenn z. Ex. ein gleich dicker Balken von der Seite her durch irgend eine Kraft angestossen oder gezogen wird, so wendet er sich so lange um seine Mitte, wo auch sein Schweerpunct ist, bis er bey fortwährendem Zuge eine Lage nach der Linie angenommen hat, die durch den Schweerpunct geht, in deren Richtung der Zug fortgeht, dem nunmehr, wenn derselbe stark genug ist, der ganze Balken folgt.

Ein Körper kann auf eine solche Art bewegt oder geworfen werden, daß er überhaupt dem Wurfe folgen muß, die Theile desselben aber noch eine Bewegung für sich behalten. Alsdenn bewegen sie sich um den Schweerpunct, und dieser allein bewegt sich in der Richtung, welche die auf ihn wirkende Kraft oder Kräfte bestimmen. In einer Kugel, die über einer Fläche fortrollt, beschreibt der Mittel- oder Schweerpunct die Linie, nach welcher dieselbe fortgeworfen wird, da unterdessen alle Puncte Circul um die Axe derselben beschreiben. Ein Stab, wenn er an einem Ende gefaßt, geschwungen und durch die Luft fortgeschleudert wird, bewegt sich um seinen Schweerpunct, der mitlerweile

weile dem Eindruck des Wurfs und der Schweere folgt, und eine krumme Linie beschreibt.

§. 23.

Wenn daher ein Körper eine Lage haben soll, in welcher er vor dem Fall oder Umsturz sicher seyn kann, so muß er so gestellt werden, daß sein Schweerpunct nicht anders, als mit grosser Mühe, verrückt und in eine niederwärts gehende Bewegung gesetzt werden könne. Es ist an sich nicht unmöglich, daß eine Kugel A auf einer zarten Nadelspitze ruhe, (Fig. 28.) so lange nämlich der Schweerpunct derselben C gerade über der Spitze ist. Allein der geringste Stoß, oder eine schwache Bewegung der Luft, darf nur den Körper etwas seitwärts treiben, so kömmt der Schweerpunct in eine Bewegung längst dem Bogen CB, und wird dieselbe verfolgen, bis der Körper ganz von der Spitze herab fällt. Es ist der Mühe wehrt, dieses bey Körpern von andrer Figur etwas genauer zu untersuchen. Doch muß ich eine bis hieher ausgesetzte Anmerkung, in Ansehung des Hebels, vorangehen lassen, welche uns sowol hier, als in der Folge, sehr brauchbar werden wird.

Wir dürfen uns den Hebel nicht immer als einen langen starren Körper, oder als zwo Stangen, die in einen Winkel zusammen gehen, vorstellen. Wir haben genug zu der Vorstellung des Hebels, wenn wir einen Körper haben, von welcher Figur er auch sey, an welchem ein Punct von einer gewissen Kraft angegriffen wird, die ihn um einen andern Punct eben dieses Körpers zu wenden sucht, welcher alsdann der Bewegungspunct wird, da unterdessen eine andere Kraft denselben in einem dritten Punct zurück hält. Diese Kraft kann die Schweere des Körpers selbst seyn, welche wir alsdenn als in dem Schweerpunct desselben vereint ansehen.

Nun nehme man einen Körper AEBD (Fig. 29.) an, dessen Länge AD zweymal so groß, als die Höhe AE, der

aber auf seine längere Seite AD horizontal gelegt ist. Man setze eine Kraft, die ihn in E nach der Richtung EH angreift, um ihn um den Punct A zu bewegen und überzustürzen. Die in dem Schweerpunct C vereinte Schwere wirkt diesem Zuge oder Drucke entgegen. Wir haben also einen Winkelhebel uns vorzustellen, der durch die Linien AE und AC ausgedruckt wird. Allein AC ist noch nicht die wahre Entfernung, in welcher die Schweerkraft des Körpers wirkt. Da diese nach der Perpendicularlinie CG druckt, so haben wir die wahre Entfernung in der Linie AG, der halben Länge des Körpers, welche, wie gesagt, seiner Höhe AE gleich ist. Wenn nun die in E ziehende oder drückende Kraft sich zu der auf G drückenden Schweerkraft verhält, wie AE zu AG, das ist, wenn jene dieser gleich ist, so hat das Gleichgewicht Statt, das ist, der Körper kann noch nicht um den Punct A durch eine Kraft gewandt werden, die doch eben so viel als dessen Gewicht vermag. Wirkt diese Kraft in einem noch niedrigern Punct, z. E. in F, in der Mitte zwischen A und E, so muß sie sich zu der Schweere des Körpers, wie AG zu AF, das ist, wie 2 zu 1 verhalten, und also mehr als doppelt so groß seyn, um den Schweerpunct C um A zu wälzen, als sie seyn dürfte, um den ganzen Körper frey zu heben.

Allein man stelle eben diesen Körper auf seine kleinere Seite, AE (Fig. 30.) aber noch horizontal, und nehme eine Kraft an, die ihn in B, nach der Richtung BI, angreift, so ist die Sache ganz anders bewandt. Denn nun haben wir uns den Winkelhebel BEF vorzustellen, an welchem das Gleichgewicht Statt hat, wenn sich die Kraft in B zu der Schweere des Körpers, die auf F drückt, verhält, wie EF zu EB, oder wie 1 zu 4: das ist, die Kraft, die den Körper umzustürzen sucht, darf nur etwas mehr als den vierten Theil von der Schweere des Körpers betragen, so wird er dadurch umgestürzt werden.

Man gebe eben diesem Körper einen breiten Grund, so wird sein Stand viel vester werden. Denn nun haben wir den Winkelhebel BEC, (Fig. 31.) welcher in den rechtwinklichten KEF verwandelt werden muß, und für das Gleichgewicht das Verhältniß der Kräfte wie FE zu EK angiebt. FE aber ist viel grösser im Verhältniß gegen EK, als es in der dreissigsten Figur war, folglich muß die Kraft in diesem Fall viel stärker, als in jenem, seyn, um den Körper umzustürzen.

Wenn man eben diesen Körper auf einem gleich breiten Grunde, welchen das Stück LA (Fig. 32.) vorstellet, in der Erde bevestigte, so würde es in einer Absicht zur mehreren Vestigkeit des Körpers vortheilhaft, in andrer Absicht nachtheilig seyn. Denn der Widerstand der Erde, die den Grund einschliest, wird vieles vermögen, den Drang zu hindern, mit welchem der Körper seitwärts gedrückt wird. Allein auf der andern Seite ist die Linie EF oder LN kleiner, im Verhältniß der nunmehr grössern Linie LD, als sie vorhin im Verhältniß der Linie EB war. Die Kraft, welche in D den Körper nach DB drängt, vermag also mehr, als sie in dem vorigen Fall vermogte, und wenn die Vestigkeit der Erde dieses nicht ersetzt, so wir der Körper leichter als vorhin umgestürzt werden. Eine Anmerkung, die für die Baukunst sehr wichtig ist.

Ich kann nicht umhin, hiemit einige Anmerkungen in Ansehung der Vestigkeit des Standes thierischer Körper zu verbinden. Diese hängt ebenfalls von der Grösse und Figur des Grundes ab, der sie trägt. Bey dem Menschen ist derselbe diejenige Fläche, welche zwischen der Aussenseite seiner Füsse begriffen ist, wenn er aber auf einem Fusse steht, bloß die Fläche dieses Fusses, auf welchem er nicht anders stehen kann, als nachdem er den Körper seitwärts geneigt, und den Schweerpunct desselben über den Fuß gebracht hat, der ihn trägt. Allein bey einem so kleinen Grunde ist es leicht, den Schweerpunct über diesen Grund hinaus

zu verrücken, und den Körper zum Fallen zu bringen. Der Schweerpunct muß daher verändert werden, welches durch ein geringe Veränderung in der Figur des Körpers, durch die Ausstreckung eines Arms oder Fusses, bewirket werden kann.

Der Seiltänzer wählt sich einen noch schmäleren Grund, als die Unterfläche des Fusses, und darinn besteht seine Kunst, daß er bey unendlichen Verrückungen seines Schweerpuncts durch tausend Wendungen des Körpers und Veränderungen seiner Figur denselben wieder auf den verlohrnen Grund zurück bringt, und die anfangende Gefahr des Fallens störet. Die vierfüßigen Thiere haben eine weit grössere Vestigkeit im Stehen, als die Vögel und der Mensch. Die ganze zwischen ihren vier Füssen begriffene Fläche macht ihren Grund aus, der sie trägt, und es gehört eine starke Kraft dazu, den Schweerpunct ihres Körpers über diesen Grund hinaus zu verrücken.

§. 24.

Es ist indessen eine bekannte Erfahrung, daß die erste Bemühung, welche man anwendet, einen Körper aus seiner vesten Lage zu bringen, gewöhnlich die schweerste ist, und man immer weniger Kraft anwenden dürfe, je weiter man ihn um eine seiner Seiten wendet. Der Grund davon ist aus den bisher erklärten Wahrheiten leicht einzusehen. Man stelle sich den schmalen aber schweeren Körper AB (Fig. 33.) vor, dessen Schweerpunct in C ist, den eine Kraft V in B angreift, um ihn aus der horizontalen Lage um dessen Ende A in die Höhe zu wenden. Bey dem Anfang dieser Bewegung muß die Kraft halb so stark seyn, um der Schweere des Körpers das Gleichgewicht zu halten, weil ihre Entfernung von dem Bewegungspunct A zweymal so groß, als die Entfernung des Schweerpuncts C ist. Allein nun gewinne die Kraft, und bringe den Körper in die Lage Ab und den Schweerpunct C in c. Alsdann ist die wahre

wahre Entfernung des Schweerpuncts von A durch eine Linie AD zu bestimmen, welche auf die Richtung der Schweere cD aus dem Punct A unter einem rechten Winkel gezogen ist. (§. 23.) Der Druck der Kraft und deren wahre Entfernung von A bleibe unterdessen unverändert, so wird dieselbe, um das Gleichgewicht gegen die Schweere des Körpers zu halten, sich zu derselben wie AD zu Ab verhalten, folglich ungleich kleiner in Vergleichung derselben seyn dürfen, als sie vorhin war. Die wahre Entfernung, in welcher der Schweerpunct druckt, und mit derselben der Druck selbst, wird auf diese Art immer mehr abnehmen, wie der Körper weiter gerückt wird, und, wenn er endlich in die aufrechte Lage Aβ gerückt ist, ganz verschwinden.

Gesetzt der Körper AB (Fig. 34.) würde durch den schrägen Zug eines Gewichts P um den Punct A aufwärts gewandt, so käme noch eine Ursache mehr hinzu, weswegen der Zug anfangs weniger, und hernach immer mehr vermag. Denn hier ist anfänglich die wahre Entfernung des Zuges nicht AB sondern AD, und es muß sich daher für den Fall des Gleichgewichts das Gewicht P zu der Schweere des Körpers AB wie AC zu AD verhalten, folglich mehr als die Hälfte desselben betragen. Wenn aber der Körper um etwas in die Höhe in die Lage Ab gerückt ist, so nimmt die Entfernung des Zuges Ad zu, und die Entfernung der Schweerlinie AE ab. Jene wird endlich AB gleich, wenn der Körper ganz in die Höhe gebracht ist, und diese verschwindet ganz. Der Körper schlägt daher mit einer gar zu grossen Heftigkeit über, und es ist dieses ein ungeschicktes Mittel, einen Körper um einen seiner Puncte aufwärts zu bewegen.

Anmerkung.

Die Zeichnung dieser Figur stellt eine Zugbrücke vor, welche auf diese Art um ihren Angel in A durch ein Gewicht gewandt wird. Die krumme Fläche FG bildet zugleich ein Mittel ab, wie man die Ungleichheit des Zuges verbessern könne. Denn nam

man sieht überhaupt leicht, daß das Gewicht P immer schwächer niederwärts drücke, je weiter es an dieser Fläche herunter kömmt, welche zuletzt in G ganz horizontal ausgeht. Um demselben das gehörige Verhältniß zu dem Widerstande der Schweere der Zugbrücke beständig zu geben, muß diese Fläche nach einer krummen Linie ausgebildet werden, welche die Sinusoide genannt wird, weil sie aus dem Sinus des immer veränderlichen Winkels cAE bestimmt wird. Man kann die genauere Beschreibung dieser vortheilhaften mechanischen Einrichtung in Belidors Science des Ingenieurs im 5ten Cap. des 4ten Buchs nachlesen.

§. 25.

Man sieht aus den erläuterten Wahrheiten in Ansehung des Schweerpuncts leicht ein, daß, wenn man demselben eine Unterlage giebt, oder ihn von oben her an einem Bande hält, diese Unterlage oder dieser Punct, an dem das Band bevestiget ist, von der ganzen Schweere des Körpers gedruckt werde. Man hänge den Körper an einer Stange AB (Fig. 35.) auf, so wird derselbe den Punct C dieser Stange mit seiner ganzen Schweere drucken. Wenn nun diese Stange an den Puncten A und B in ungleicher Entfernung von C aufgehangen wird, so tragen beyde Puncte ungleiche Theile der Last P. Denn, wenn eine Kraft in B die Stange angreift, und dieselbe um A zu wenden sucht, so wird sie das Gleichgewicht halten, wenn sie sich zu dem Gewicht P verhält, wie AC zu AB. Greift eine andre Kraft in A an, so muß sie sich zu dem Gewicht P, wie BC zu AB, verhalten. Der Druck, den beyde Puncte von der Last P aushalten, ist einerley mit der Kraft, die in denselben angewandt werden muß, um diese Puncte in Ruhe zu erhalten. Da nun die Kraft in B sich zu der ganzen Last wie AC, die Kraft in A aber wie BC zu der ganzen Linie AB verhält, so würde ein Mensch, der diese Stange in B trägt, so viel weniger, als der, welcher in A trägt, von der Last zu halten haben, als die Linie AC kleiner ist, denn BC. Die Erfahrung bestättigt dieses, wenn man an die

Puncte

Puncte A und B Fäden heftet, diese über Rollen schlägt, und daran Gewichte hängt, die zwar zusammen dem Gewichte P gleich sind, aber sich zu einander, wie die Linien BC und AC, verhalten. Verändert man sie einigermassen, so wird eins von beyden das Uebergewicht bekommen. Man muß aber, ehe man die Last P anhängt, so viel Gewicht anhängen, als die Stange allein zu halten hinlänglich ist.

Wenn daher zwo Personen von ungleichen Kräften an einer solchen Stange eine Last tragen, und man will es einrichten, daß ein jeder so viel trage, als er vermag, so muß die Last so gerückt werden, daß sich die Entfernung des schwächern von der Last zu der Entfernung des stärkern umgekehrt wie die Kräfte derselben verhalte. Die 36ste Figur stellt den Fall dar, wie er eingerichtet werden müßte, wenn in A ein Mann trüge, der doppelt so viel Kräfte hat, als der, welcher in B trägt. Die Linie AB ist in drey Theile getheilt. BC hat zween und AC einen dieser Theile. In der 36sten Figur ist AB in acht Theile getheilt. BC hat fünf und AC drey dieser Theile; und so müßte es eingerichtet werden, wenn die Kräfte der in A und B tragenden Menschen sich wie fünf zu drey verhielten.

§. 26.

Wir werden von den itzt erläuterten Sätzen eine nützliche Anwendung auf die Waage machen können, deren vortheilhafteste Einrichtung und die bey ihr vorkommenden Betrüge sich nun genauer werden erklären lassen.

Das Hauptstück der gemeinen Waage ist ein Hebel, an dessen gleichen Armen Gewichte angehangen werden, welche deßwegen genau einander gleich seyn müssen, um einander das Gleichgewicht zu halten. Ist in den Armen einige Ungleichheit, so müssen die Gewichte auch alsdann, wenn sie einander das Gleichgewicht halten, einander ungleich seyn. Ein Betrug, der alsobald entdeckt wird, wenn die Gewichte, die einander gleich zu seyn scheinen, verwechselt,

wechselt, und aus einer Waagschale in die andre gelegt werden.

Dieser Hebel hat, wie alle Körper, einen Schweerpunct C, welcher entweder mit dem Puncte, (Fig. 37.) in welchem die Axe der Waage aufliegt, übereinkommen, oder unter oder über demselben liegen kann.

Kommen beyde Puncte mit einander überein, so müssen die Gewichte, welche einander das Gleichgewicht halten sollen, vollkommen einander gleich seyn. Denn es ist nichts in der Waage, welches dem geringern Gewichte zu Hülfe kommen, und den Waagebalken in eine wenigstens beynahe horizontale Lage wieder bringen könnte, da die ganze Wirkung der Schweere des Waagebalkens aufgehoben, und dem Schweerpunct keine Bewegung seitwärts oder niederwärts erlaubt ist. Die Waage hat also die größte Vollkommenheit, welche man bey ihr zur Absicht haben kann.

Allein man verlangt eine solche Vollkommenheit und genaue Gleichheit der Gewichte, die man untersuchen will, nicht bey einer Waage. Man bringt daher lieber in Verfertigung derselben den Schweerpunct des Waagebalkens unter den Einhängepunct. Hiedurch wird derselbe in einer horizontalen Lage erhalten, so lange er nicht durch Gewichte beschweert ist, indem dieser Schweerpunct sich allemal in den niedrigsten Punct des Bogens herabsenkt. Man nehme, um dieses einzusehen, einen langen Körper, (Fig. 38.) der in der Mitte in einem Punct C aufgehangen ist, um welchen er sich bewegen kann. Man wähle diesen Punct so, daß er über dem Schweerpunct bleibe, oder setze dem Körper in dieser Gegend ein Stück an, welches seinen Schweerpunct G unter den Punct C bringt. Ein jeder Stoß, welcher diesen Körper seitwärts niederdrückt, macht diesen Punct G einen kleinern oder grössern Circulbogen um den Punct C beschreiben, in welchem er nicht anders zur Ruhe kommen kann, als bis er seine vorige niedrigste Lage in G wieder eingenommen hat. Es wird also schon ein gewisses kleines

Gewicht

Gewicht an dem einem oder dem andern Arme des Hebels nöthig seyn, um diesem Druck des Schweerpuncts entgegen zu wirken, und es wird die Waage auf der einen Seite um ein weniges mehr als an der andern beschweert seyn können, ehe der Waagebalken aus seiner horizontalen Lage so weit getrieben wird, daß man es mit blossem Auge wahrnehmen kann. Wenn durch den Stoß, der bey dem Auflegen der Gewichte unvermeidlich ist, der Waagebalken aus der horizontalen Lage getrieben wird, so wird eben dieser Druck des Schweerpunctes denselben wieder in diese zurück bringen. Es wird aber hie eben das geschehen, was bey andern Körpern vorgeht, die an einem Bande aufgehangen sind, und von der Seite hinab unterwärts sinken. Die Geschwindigkeit, welche der Schweerpunct in dem Sinken bekömmt, macht ihn diese Bewegung über den Punct G hinaus fortsetzen, bis er abermals sinkt, und überhaupt diese schwankende Bewegung verschiedene mal wiederholt. Eine auf diese Art eingerichtete Waage wird eine faule *Waage* genannt.

Ist der Schweerpunct über dem Einhängepunct befindlich, so ist die Waage zum Wägen ganz untauglich. Denn der geringste Stoß, der auf die Arme des Balkens geschicht, treibt den Schweerpunct G (Fig. 39.) in dem Bogen GA niederwärts, und es ist nichts da, das denselben wieder aufwärts triebe, und den Balken wieder in die waagerechte Lage zurück brächte. Die Waage wird also, auch wenn sie mit vollkommen gleichen Gewichten beschweert ist, durch den geringsten Stoß, auf welche Seite man will, überschlagen, und uns verleiten, ein Uebergewicht anzunehmen, auch da, wo keines ist.

Anmerkung.

Ein bekannter Vortheil, der einer wohl zubereiteten Waage gegeben wird, ist, daß man die Axe nicht abründet, sondern in eine Schärfe ausarbeitet, mit welcher sie sich in der stählernen Pfanne, auf welcher sie ruhet, ohne merkliches Reiben wendet. Man arbeitet auf eben die Art die Puncte,

an denen die Waageschalen hängen, aus. Doch dieser Vortheil an einer guten Waage ist zu bekannt, als daß ich in der Erklärung desselben weitläuftig seyn mögte.

Eben so wenig mag ich mit Erläuterung der sogenannten Römischen oder Schnellwaage meine Leser aufhalten, da nichts von ihr gesagt werden kann, welches nicht die Theorie des Hebels der ersten Art, auch ohne besondre Anleitung, einem jeden, der diese recht verstanden hat, an die Hand gäbe.

§. 27.

Der Hebel wird dadurch eine zum Gebrauch unbequeme Maschine, weil er nur bis zu einer geringen Höhe die Lasten heben kann, bey welchen man ihn anwendet. Die Kraft kann auch, wenn sie zum Wirken kömmt, und sich mit dem Hebel bewegt, nicht lange in derjenigen auf den Hebel perpendicularen Richtung beharren, welche wir oben als die vortheilhafteste erkannt haben, sondern muß bald diese ihre Richtung auf eine nachtheilige Art verändern. Eine Maschine, die immer der Kraft einen neuen Hebel, an welchem sie gleichförmig wirken kann, und der Last einen andern Arm desselben in den Weg bringt, würde daher weit vortheilhafter, als der blosse Hebel seyn. Eine solche ist in der That die bekannte **Radwinde** oder **das Rad an der Axe**. (Fig. 40.) Wenn um deren Axe ein Seil, und um die Felge des Rades ein anders geschlagen ist, welche beyde ihre verschiedenen Gewichte tragen, so wirken diese ganz und gar auf eben die Art, als wenn beyde an den Puncten A und B eines Hebels zögen, der sich nur um den Punct C wenden kann. Das Gleichgewicht hat auch hier Statt, wenn sich die Last P zu der Kraft V verhält, wie die Linie BC zu AC. Die Sache bleibt noch in denselben Umständen, wenn das Rad um etwas herumgeführt wird, auch noch, wenn das Seil in einem andern Punct, z. E. D, anliegt, und die Kraft in der Richtung DV zieht. Denn nun entsteht ein Winkelhebel DCA, an dessem langen Arme CD die Kraft

noch

noch in eben der Entfernung und perpendicularen Richtung wirkt, wie sie es in der Richtung BV that.

Zwar sind hier die Arme des Hebels nicht in einer Fläche befindlich, auch ist es hier nicht ein einzeler Ruhepunct, sondern eine Axe, die sich in sich selbst wendet. Allein eben die Vernunftschlüsse, welche das mechanische Grundgesetz bey einem Hebel, der aus einer geraden Linie besteht, erweisen, gelten auch von einem Hebel, der aus drey geraden Linien zusammen gesetzt ist, von denen die mittlere, an welcher die beyden übrigen bevestigt sind, sich in sich selbst um die Zapfen CC wendet, wie die 41ste Figur abbildet.

Doch gehört zu dem wesentlichen einer solchen Radwinde nicht die ganze Zusammensetzung dieses Werkzeuges, welche die gewöhnliche ist. Alles geht auf eben dieselbe Art vor, wenn in einer Welle, die sich in sich selbst wenden kann, ein Hebel auf eine oder die andre Art bevestigt ist, welchen die Kraft angreifen und sich mit demselben im Circul bewegen kann. Die Winden, welche man bey den Krahnen anbringt, in deren Welle man wechselsweise einen Hebel einstößt, alle Kurbeln und Handgriffe, an welchen die Kraft bey zusammengesetzten Maschinen arbeitet, gehören hieher, und ihre Wirkung muß auf dieselbe Art beurtheilt werden, in so fern man das Gewicht des Hebels oder der Kurbel nicht dabey in Betrachtung zieht. Denn das Rad ist mit sich selbst im Gleichgewicht, wenn es wol verfertigt ist, die Kurbeln aber wirken mit ihrem Gewicht bald zum Vortheil, bald zum Nachtheil der Kraft, auf die Maschine.

Aber alles kömmt hier auf die geradelinichte Entfernung der Kraft und der Last von der Axe der Maschine an. Die Kraft wirkt mit grösserm Vortheil auf ein grosses, als auf ein kleines Rad, und der Widerstand der Last ist um so viel geringer, je näher sie an der Axe wirkt. Ein grosses Mühlenrad ist bey einem geringen Wasserschatze vortheilhafter, als ein kleineres, das Kammrad aber, oder das Rad, auf welches der Widerstand des Mühlsteins wirkt, hat um so

viel mehr Wirkung, je kleiner es ist, wiewol die dadurch zugleich abnehmende Geschwindigkeit der Wirkung oft Anlaß gibt, der Kraft nicht die Vortheile zu geben, die man ihr geben könnte.

Aus eben dem Grunde giebt es der Kraft keinen Vortheil, wenn man die Kurbel, woran sie arbeiten soll, wie gewöhnlich geschicht, in einen Bogen, oder wie ein S, krümmet. Denn in der Kurbel (Fig. 42.) hat die Kraft B keine grössere Entfernung von der Axe, als in der geraden Kurbel CD, (Fig. 43.) und da von dieser Entfernung ihre Wirkung abhängt, so ist diese bey der einen Kurbel nichts grösser, als bey der andern.

Wir finden bey der Radwinde das oben bey dem Hebel erklärte mechanische Gesetz vollkommen wieder, daß sich im Gleichgewicht die Kräfte umgekehrt, wie ihre Geschwindigkeiten oder die Räume, durch welche sie sich bewegen, verhalten. Denn der Circul der Welle, an die sich das Seil anlegt, mittelst dessen die Last aufgewunden wird, sowol, als der Circul des Rades, von dem das Seil sich abwindet, an welchem gezogen wird, verhalten sich, wie ihre Durchmesser, oder wie die Entfernungen der Last und der Kraft von dem Punct, um welchen die Bewegung geschicht.

Wenn daher der Umriß der Welle an dem Rade (Fig. 40.) zwey Fuß, und der von dem Rade sechszehn Fuß hat, so müssen bey einer vollen Wendung des Rades von dem Seile, welches um dasselbe geschlagen ist, sechszehn Fuß abgewunden seyn, da sich von dem Seil, das die Last trägt, zwey Fuß aufwinden. Mit jenem ist die ziehende Kraft 16 Fuß herunter, mit diesem die Last zwey Fuß in die Höhe gekommen. Es verhält sich eben also, wenn die Hand mit einem Punct der Kurbel sich herum bewegt.

§. 28.

Wenn eine Kraft während des Ziehens an dem Rade sich nach und nach verändert, so ändert sich auch ihr Verhältniß

zu der Last, auf welche sie wirkt. Gesetzt sie würde nach und nach schwächer, so wird sie nicht nur das Uebergewicht, welches sie über die Last hatte, verlieren, sondern sie wird sogar zuletzt derselben nicht mehr das Gleichgewicht halten können. Dieses kann auf zweyerley Art zugehen.

1) Wenn sie selbst in der Stärke der Wirkung abnimmt. Dieses hat z. E. bey der Feder in einer Uhr statt, welche um so viel schwächer auf die Schnecke zieht, je weiter sie sich mit dem Gehäuse, in welchem sie beschlossen ist, herumwendet, und sich folglich um ihr in der Mitte bevestigtes Ende auswindet. Sie würde also die Uhr immer langsamer bewegen, wenn nicht die Schnecke so ausgearbeitet wäre, daß die Kette an derselben in einer beständig veränderten Entfernung zieht, die in dem Maasse grösser wird, wie die Wirkung der Feder abnimmt, und daher vermag die stärkere Kraft der Feder, die sie zu Anfang hat, nichts mehr auf die Uhr, als die schwächere, welche sie am Ende der Ausdehnung, die ihr erlaubt ist, hat, weil sie Anfangs auf ein Rad von geringerer, und allmählig auf ein Rad von einer vergrösserten Weite vermittelst der Kette zieht.

Wenn man indessen diese Entfernungen, in welchen Kraft und Last an einer Radwinde ziehen, genau schätzen will, so muß man auch die halbe Dicke des Seils mit zu der einen und der andern Entfernung rechnen. Man stelle sich die Welle eines Rades (Fig. 44.) vor, um welche ein dickes Seil geschlagen ist, welches von dem Gewichte P gerade niederwärts gezogen wird. Die Richtung des Zuges von dem Schweerpunct der Last geht mitten durch das Seil nach der Linie PA aufwärts, und die wahre Entfernung derselben von dem Mittelpunct ist nun AC, eine Linie, die um die halbe Dicke des Seils grösser ist, als die halbe Dicke der Welle CD. Es ist eben so in Ansehung des Seils bewandt, welches um das Rad geschlagen ist, und den Abstand der Kraft von dem Mittelpunct A ebenfalls um seine halbe Dicke vermehrt. Allein dieser Umstand wird dadurch

beträchtlich, weil das Seil, welches die Last trägt, gewöhnlich dicker ist, als das, an welchem die Kraft zieht, und wenn man seine halbe Dicke zu dem kleinen Radius der Welle hinzusetzt, das Verhältniß der Entfernungen, und folglich die Wirkungen der Kraft und der Last merklich verändert. Diese Veränderung wird noch beträchtlicher, wenn das Seil bey lange fortgesetztem Winden sich auf die Welle doppelt oder gar dreyfach auflegt. Denn alsdann wird die Entfernung der Last immer durch die ganze Dicke des Seils vermehrt, da zu der Entfernung der Kraft nichts hinzukömmt. Die Bewegung der Maschine wird daher immer schweerer, und die Kraft zuletzt oft zu schwach, als daß sie dieselbe weiter fortsetzen könnte. Man verhütet dieses bey vielen Winden, die zu einer lange fortgesetzten Bewegung angewandt werden, indem man das Seil mit einem Ende verschiedene mal um die Welle schlägt, bis es durch das Reiben und Anklemmen vest genug an demselben hält, ohne dem Zug der Last nachzugeben, und sich von der Welle abzulösen, und alsdenn dasselbe, so wie es sich auf der einen Seite aufwindet, auf der andern wieder herabzieht, oder es durch ein mäßiges Gegengewicht abwinden läßt. Wo man dieses nicht thun kann, sondern das viele Klafter lange Seil oder Kette sich aufwinden lassen muß, macht es eine grosse Hinderniß in dem Gebrauch der Radwinden.

2) Die Kraft ändert auch ihre Wirkung durch eine solche Veränderung ihrer Richtung, welche ihre wahre Entfernung von dem Mittelpunct mindert oder vermehrt. Man setze, das Seil sey an einem Punct A des Rades ABD (Fig. 45.) befestigt, und die Kraft ziehe an demselben in der Richtung AE, so ist es nicht anders bewandt, als wenn sie in dieser fortgesetzten Richtung auf ein kleineres Rad abd zöge. Ihre Wirkung kann also nichts grösser seyn, als sie seyn würde, wenn das Rad ABD so viel kleiner wäre, und die wahre Entfernung der Kraft von dem Mittelpunct C ist nun nicht AC, sondern aC. Die Wirkung wird folglich

in

in diesem Verhältnisse kleiner. Dieser Umstand ist in den Maschinen von grosser Wichtigkeit. Er kann z. E. bey einem Mühlenrade sehr nachtheilig werden, wenn der Schuß des Stroms so auf das Rad zustößt, daß er den Circul desselben schneidet, und folglich in seiner Richtung dem Mittelpunct desselben näher kömmt, als er eigentlich thun sollte. Bey einigen Maschinen ist dieser nachtheilige Umstand bey der Art, wie die Kraft wirkt, nicht zu ändern. Bey Rädern, die von Menschen getreten werden, (Fig. 46.) schneidet B D, die Richtung der Schweere, mit welcher der Mensch wirkt, den horizontalen Radius A C in dem Punct B, und der Mensch wirkt mit seinem Gewicht nicht anders, als er thun würde, wenn er mit demselben auf die Peripherie eines ungleich kleineren Rades B E F zöge. Seine Kraft vermag also bey weitem nicht das, was sie vermögen würde, wenn er auf die Peripherie des grossen Rades in der Richtung A G perpendicular drückte. Tritt ein solcher Mensch um einige Weite bis in H zurück, so kann er seine Entfernung und mit derselben das Moment der Kraft so sehr verändern, daß die Last das Uebergewicht bekömmt, und die Maschine mit ihm herum zieht, welches eine Ursache häufiger Unfälle an dergleichen grossen Maschinen abgiebt.

Beyde Mängel, die Veränderung in der Stärke der Kraft selbst und in ihrer Richtung, kommen bey den Kurbeln und Hebeln zusammen, wenn mit denselben die Hand sich herum bewegt, um eine Welle herum zu führen. Denn, indem die Hand ihren Circul macht, muß sie ihre Richtung ohn Unterlaß verändern, und sie kann dieses nicht genau so thun, daß sie beständig die Kurbel in der perpendicularen Richtung drückte, sondern sie wird oft in eine schräge Richtung gerathen, welche, auf der einen oder der andern Seite verlängert, den Circul der Kurbel schneidet. Die Muskeln der Hand müssen dabey ihre Lage und ihren Zug auf die Knochen der Hand ohn Unterlaß verändern, und

dieses geht nicht zu, ohne daß kleine Zwischenräume der Zeit entstünden, in welchen die Hand zur Bewegung der Kurbel nichts beytragen kann, weil die Muskeln nicht zugleich auf die Veränderung der Lage der Hand und die Verrückung der Kurbel oder des Hebels wirken können. Eben so nachtheilig für die Kraft ist es, wenn an den sogenannten Haspeln (Fig. 47.) die Hand die Hebel nicht durch den ganzen Circul verfolgen kann, sondern bald den einen bald den andern ergreifen, und mitlerweile die Bewegung stocken lassen muß. Eine der vortheilhaftesten Maschinen für Menschen, um daran zu wirken, geben daher diejenigen Winden ab, an welchen die Hebel horizontal liegen, und mehrere Menschen mit dagegengelehntem Körper drucken, und sich im Circul in fast immer perpendicularer Richtung gegen den Hebel herum bewegen können. Dergleichen Einrichtung haben die sogenannten Erdwinden (Fig. 48.) und stehenden Haspel (Fig. 49.) Doch macht das Schreiten der Menschen auch hier einige Aenderung.

§. 49.

Wenn über ein Rad A B, (Fig. 50.) das sich um den Punct C wenden kann, ein Seil geworfen wird, an dessen einem Theile ein Gewicht P hängt, da an dem andern die Kraft V zieht, so ist die Wirkung der Kraft nicht anders anzusehen, als wenn das Seil VA in A, das Seil BP aber in B bevestigt wären, und nun beyde auf die Arme A C und C B des Hebels ACB wirkten. Weil aber beyde einander gleich sind, so hat das Gleichgewicht nicht anders, als bey einer Gleichheit der Kraft und der Last, Statt.

Es ist deutlich, daß eine Maschine dieser Art nicht von der bekannten Rolle verschieden sey, deren Ruhepunct C von oben gehalten wird, und es ist eben daraus leicht zu erkennen, daß dieselbe der Kraft eines an derselben ziehenden Menschen keinen andern Vortheil gebe, als daß das Seil, welches sich ungemein reiben würde, wenn man es über eine feste Unterlage ziehen wollte, nun eine bewegliche Unterlage

Unterlage hat, die dem Zuge des Seils nachgiebt, und daß folglich hier nur das Reiben geschwächt wird. Ein Mensch wird an einer Rolle, die diese Lage hat, nichts mehr als sein Gewicht halten, und dieses keineswegs in die Höhe ziehen können. Er wirkt bloß durch die Schweere seines Körpers, nicht durch die Stärke seiner Muskeln und Gliedmassen, welche ihm nur dient, das Seil scharf anzugreifen; und ein nervichter Tagelöhner wird hier nichts mehr, als ein andrer weichlicher Mensch vermögen, wenn beyde ein gleiches Gewicht des Körpers haben. Denn der Ziehende und die Last wirken hier nicht auf eine andre Weise gegen einander, als sie an den Armen einer gleicharmigten Waage thun würden.

§. 30.

Allein man bevestige das Seil an irgend einem vesten Punct A (Fig. 51.) und führe es unter einer Rolle BD durch, die an einem Hacken das Gewicht P hält, welches man aufwärts bewegen will, so ist die Sache ganz anders bewandt. Die anfangende Bewegung der Rolle geht nun um den Punct B vor, an welchem das Seil AB anliegt. Die Last P zieht in der Entfernung BC, die Kraft V aber in der Entfernung BD. Jene ist halb so groß als diese, und daher darf die Kraft V, die sich zu P verhalten muß, wie BC zu BD, nur halb so groß als die Last seyn. Die Sache ist von einer andern Seite sehr leicht einzusehen, wenn man bedenkt, daß der Nagel oder die Bevestigung in A und die Kraft V gleich viel von dem Gewicht P, folglich jede die Hälfte desselben tragen. Weil indessen die Richtung VD für Menschen nicht sehr bequem zum Ziehen in die Höhe ist, so schlägt man das Seil lieber über eine feste Rolle in D, welche jedoch nichts zur Vermehrung der Wirkung der Kraft beyträgt. Alsdenn wird ein Mensch, der 50 Pfund Kraft anwenden kann, wenn er an diesem Seile zieht, 100 Pfund halten, und bey mehrerer Anstrengung seiner Kraft sie aufwärts ziehen können.

Dieser Vortheil der Kraft hat in jeder Einrichtung der Rollen Statt, wo die Kraft an einer beweglichen Rolle zieht; diese Rolle mag aufwärts oder niederwärts gezogen werden. Man ziehe z. E. die Last P (Fig. 52.) an einem Seile über die Rolle E in die Höhe. Allein anstatt das Seil selbst anzugreifen, bevestige man es an die bewegliche Rolle C A, schlage über dieselbe ein in irgend einem Puncte B bevestigtes Seil, und ziehe an diesem in der Richtung AV. Auch hier darf nach eben den vorhin angeführten Gründen die Kraft nur der Hälfte der Last gleich seyn, und ein Mensch, der etwas mehr als 50 Pfund Kraft anwenden kann, wird das Gewicht P von 100 Pfunden aufwärts bewegen können.

Allein man wird einigen Unterschied in der Wirkung der Kraft bemerken, wenn die Seile, welche die Rolle tragen, nicht parallel sind. Man wird hier bey genauer Ueberlegung anmerken, daß die wahre Entfernung der Kraft nicht mehr dem ganzen Durchmesser der Rolle AB (Fig. 53.) gleich sey. Die Bewegung geht in diesem Fall um den Punct C vor. Die fortgesetzte Richtung der Kraft V E zieht hier an dem Arm CE. Das Gewicht der Rolle und der Last drückt auf den Punct P, und wirkt also auf den Arm PC des Winkelhebels PCE. Jene muß sich also zu dieser im Fall des Gleichgewichts verhalten, wie PC zu CE. PC aber ist nach geometrischen Gründen grösser als die Hälfte von CE, und folglich muß die Kraft mehr als die Hälfte der Last in diesem Fall betragen.

§. 31.

Weil aber dieser Vortheil, da man nur die Hälfte der Kraft, welche das Gewicht P hat, anwenden darf, demjenigen nicht gleich ist, den man durch andre Maschinen erhalten kann, so verbindet man gewöhnlich mehrere Rollen von beyden Arten mit einander, und dadurch wird die Wirkung der Kraft in dem Verhältniß verstärkt, wie die Zahl der

Seile

Seile zunimmt, welche das Gewicht samt den beweglichen Rollen tragen. Man nennt dergleichen Rollen, die sich gegen einander bewegen, einen **Flaschenzug**, und jeden Satz Rollen einen **Kloben**. Die 54ste Figur stellt einen dergleichen vor, an welchem den untern mit dem Gewichte P vier Seile tragen, die von demselben gleich stark gespannt werden, und also jedes den vierten Theil des ganzen Gewichts tragen. AB ist dasjenige Seil, welches über den obern Kloben geschlagen in C ausgeht. Der Theil des Seils CV wird noch eben so stark von dem Gewicht gezogen, als AB, folglich hat die Kraft in V nur den vierten Theil der ganzen Last zu halten, und wird, wenn sie mehr als den vierten Theil der Last vermag, dieselbe in die Höhe bewegen können. Wenn der oberste Kloben drey, der unterste zwo Rollen hat, so wird die Last von fünf Seilen gehalten, und wenn daher die Kraft etwas mehr als den fünften Theil der Last vermag, so wird diese dadurch aufwärts bewegt werden.

Man sieht aber auch hier deutlich ein, daß die Geschwindigkeiten sich umgekehrt, wie die gegen einander wirkende Kraft und Last, im Gleichgewicht verhalten. Wenn bey dem Flaschenzuge (Fig. 54.) die Kraft das Seil um vier Fuß vorwärts zieht, so sind die vier Seile zwischen den Rollen iedes um einen Fuß verkürzt, und der unterste Kloben mit der Last nur um einen Fuß aufwärts bewegt. Sind fünf Seile da, an denen die Last hängt, so muß die Kraft fünf Fuß von dem Seile, an welchem sie greift, durch die obere Rolle gezogen haben, um die Last einen Fuß hoch zu bewegen.

Die Rollen und Flaschenzüge geben also keinen so grossen Vortheil für die Kraft, als die schon erklärten Maschinen, der Hebel und die Radwinde thun. Bey diesen ist es leicht, die Kraft zehnmal stärker, als die Last, wirken zu machen. Wollte man aber dieses mit einem Flaschenzuge thun, so müßte man in iedem von beyden Kloben fünf Rollen haben, von denen die äussersten sehr groß und die innersten sehr

klein

klein seyn müßten, um das Reiben der Seile an einander zu verhüten. Sie sind aber da sehr nützlich, wo man wenig Raum zur freyen Bewegung der grossen Maschinen hat, z. E. auf Schiffen, wo die vielen Seile und das Schiffsgeräthe keine lange Hebel und grosse Winden zulassen. Sie geben auch der Kraft die vortheilhafte Richtung des Zuges von oben nach unten, wobey das Gewichte des Körpers mehr als die Anstrengung der Muskeln und Nerven wirkt.

Vierter Abschnitt.

Von der schrägen Fläche und den daraus zu erklärenden Maschinen, der Schraube und dem Keil.

§. 32.

Es ist oben §. 22 S. 57 f f. angemerkt worden, daß ein Körper auf einer schief liegenden Fläche nicht in Ruhe bleiben könne, weil sein Schweerpunct nicht gehörig unterstützt werde. Soll er dennoch hier in Ruhe bleiben, so muß eine Kraft ihn zurück halten, welche dem Druck gewachsen ist, mit welchem ihn die Schweerkraft niederwärts treibt. Die gemeine Erfahrung überzeugt uns, daß diese Kraft niemals dem ganzen Gewichte des sinkenden Körpers gleich seyn dürfe. Ein Mensch, der mit allen Leibeskräften kein Gewicht von 100 Pfund würde halten können, wird es thun können, wenn dasselbe an der Lehne einer schrägen Fläche liegt, ja es sogar in manchen Fällen hinauf ziehen können. AB (Fig. 55) sey eine solche Fläche an einem Instrument, das wir zu Versuchen, die diese Lehre erläutern, anwenden. C sey ein runder Körper, der an demselben herab rollen würde, wenn ihn nicht das Gewichte D hielte, das an einem Seile hängt, welches über die Rolle K geschlagen, und auf eine solche Art an C bevestigt wird,

daß

daß es die rollende Bewegung desselben nicht hindert, da seine fortgesetzte Richtung auf dem Mittelpunct C zugeht. Das Gewicht D darf nun keinesweges so groß seyn, als das von C. Es kömmt aber darauf an, wie groß es seyn müsse, um mit demselben in genauem Gleichgewicht zu seyn.

Wenn C in einige Bewegung gesetzt werden sollte, so würde dieselbe um den Punct F erfolgen, welcher folglich hier als der Bewegungspunct angesehen werden muß. Die Kraft zieht auf den Punct C in dem Abstande CF perpendicular. Die Schweere des Körpers C drückt nach der Linie CI, in dem Abstande FG von dem Punct F. Die Umstände sind demnach eben so beschaffen, als wenn an einem Winkelhebel CFG (Fig. 56.) ein Gewicht, an dem Punct G, des horizontalen Arms FG hienge, und eine Kraft auf C in einem rechten Winkel zöge. Hier müßte, um das Gleichgewicht zu schaffen, die Kraft sich zu der Last, wie FG zu FC verhalten, und eben so ist es auch bey jenem Körper bewandt. Allein das Verhältniß FG zu FC finden wir in den Linien AE und AB wieder, davon jene die Höhe der schrägen Fläche, diese die Länge darstellt. Denn man kann geometrisch beweisen, daß der Triangel FCG dem Triangel ABE ähnlich sey, und folglich FG : FC = AE : AB.

Es muß daher das Gewicht D sich zu dem Gewicht C, im Fall des Gleichgewichts, so verhalten, wie die Höhe der schrägen Fläche sich zu der Länge desselben verhält.

Wir können hieraus sehr vieles beurtheilen, was sich bey der schrägen Fläche täglich wahrnehmen läßt. Einerley Last drückt bald weniger bald mehr gegen die Kraft, welche sie auf der schrägen Fläche erhält, je kleiner oder grösser der Winkel ist, mit welchem diese sich gegen den Horizont neigt. Ein Pferd zieht in dem Maasse schweerer, als der Berg steiler ist. Unserm Körper wird sein eignes Gewicht immer mehr zur Last, und die Muskeln und Nerven müssen

um

um so viel stärker angestrengt werden, je jäher der Weg ist, welchen wir hinan zu steigen haben. Denn in allen diesen Fällen muß die Kraft, welche angewandt werden soll, um so viel stärker im Verhältniß gegen das zu hebende Gewicht werden, als die Linie AE größer wird in Vergleichung der Linie AB. Wenn man diese AB unverändert läßt, (wie denn eine jede Größe hier gleichgültig ist,) und beschreibt mit derselben einen Viertheilcircul, (Fig. 57.) innerhalb dessen alle die verschiedenen Lagen fallen, welche der Linie AB, von der horizontalen Lage an bis zur perpendicularen, gegeben werden können, so geben die perpendicularen AE, Ae, Aε die Sinus der verschiedenen Neigungswinkel; und wir können mit einem andern Ausdrucke sagen: Die Kraft, die den Körper auf der schrägen Fläche, in paralleler Richtung, erhält, nimmt zu, wie die Sinus des Winkels der Schräge, und hält bey jeder Schräge gegen die Last das Verhältniß des Sinus von diesem Winkel zu dem Radius. Man kann daher aus den gemeinen Sinustafeln für jeden gegebenen Winkel dieses Verhältniß sogleich herauslesen. Z. E. auf eine Schräge von 30 Grad wird die Hälfte der Last erfodert. Denn der Sinus von 30 Grad ist dem halben Radius gleich. Auf 45 Grad werden schon mehr als $\frac{7}{10}$ der Last erfodert. Denn der Sinus dieses Winkels hat 70710 derer Theile, davon der Radius 100000 hat. Auf 60 Grad ist das Verhältniß, wie $8\frac{2}{3}$ zu 10. Denn hier hält der Sinus 86602. Wenn AB in die perpendiculare Richtung gebracht wird, so trägt die Fläche nichts mehr zur Haltung desselben bey, und es wird ein Gewicht erfodert, das gerade so schweer, als der Körper selbst ist.

§. 33.

Man wird anmerken, daß wir in diesen Erläuterungen die Richtung, in welcher die Kraft zieht, parallel mit der

Fläche

Fläche angenommen haben. Diese ist in der That die vortheilhafteste, aber sie ist nicht die einzige, in welcher Körper an einer schrägen Fläche herauf gezogen werden können. Sie ist schon anders bey den Fuhrwerken bewandt, wo die Räder niedriger, als die Brust des Pferdes sind, mit welcher dasselbe gegen die Zugseile dringt, und also aufwärts zieht. Sie kann auch anstatt mit der Fläche parallel zu seyn, es mit dem Horizont werden. Wir haben Ursache, auf diesen Fall besonders zu sehen. AB Fig. 58. sey eben die schräge Fläche, C eben der Körper, den die 55ste Figur vorstellte: Allein der Zug gehe nach der Richtung CK, welche nun horizontal ist. Wir können uns hier, wie vorhin, einen Winkelhebel HFG vorstellen, an dessen einem Arme HF die Kraft P, an dem andern FG die Schweere des Körpers C wirkt. Jene muß sich also zu dieser, wie die Linie FG zu HF oder CG verhalten. Allein der Triangel CFG ist, wie die Geometrie erweiset, dem Triangel AEB ähnlich, und FG verhält sich zu CG, wie AE, die Höhe der schrägen Fläche, zu EB der Grundlinie derselben. Woraus die Regul folgt: **wenn ein Körper an der schrägen Fläche mit horizontaler Richtung gezogen wird, so verhält sich im Gleichgewicht die Kraft zu der Last, wie die Höhe der schrägen Fläche zu deren Grundlinie.** Die Kraft muß also in diesem Fall grösser als in jenem seyn, denn AE ist grösser in Vergleichung mit EB, als es in Vergleichung mit AB war. Wenn dieser Satz, wie der vorige, §. 32. trigonometrisch bestimmt wird, so ist AE der Sinus und EB der Cosinus des Winkels der Schräge, und man kann daher ebenfalls aus den Sinustafeln das Verhältniß der Kraft zur Last sehr geschwind bestimmen.

Man sieht hieraus, wie eine Kraft, die in parallelem Zuge eine Last aufwärts bringen konnte, bey veränderter Richtung nicht nur das Uebergewicht, sondern so gar das Gleichgewicht verlieren können. Es ist eine bekannte

Erfah-

Erfahrung, daß Pferden, wenn sie einen Wagen bergan gezogen haben, oft die Kräfte fehlen, ihn auf die Ebene zu bringen, in die sich ein solcher Berg endigt, und daß, wenn der Fuhrmann nicht klug genug ist, sie zuletzt recht scharf anzutreiben, der Wagen wieder zurückschiessen, und die Pferde, ungeachtet sie auf der schon erreichten Ebene einen festern Stand haben, mit sich zurückziehen kann. Warum dieses? deswegen, weil der letzte Zug der Pferde aus einem parallelen Zuge horizontal wird.

§. 34.

Wir haben bisher die schräge Fläche als unbeweglich angesehen, an welcher die Lasten herauf gezogen werden. Allein man sieht leicht ein, daß die Last sich auch aufwärts bewegen müsse, wenn die schräge Fläche ein beweglicher Körper ist, der unter die Last, welche auf eine oder die andere Art gehalten oder gestützt wird, daß sie nicht zurückweichen kann, untergeschoben wird. Man setze, die Last P (Fig. 59.) werde durch die Kraft K in horizontaler Richtung so gehalten, daß sie nicht herab sinken, aber wol in der Linie PD steigen könne. Nun werde die schräge Fläche durch die Kraft V vorwärts in der Richtung BE gedruckt; bis sie in die Lage FEG kömmt. Dieses kann nicht geschehen, ohne daß das Gewicht P bis in D erhoben werde. Das Verhältniß der Kraft V zu dem Gewichte P wird hiebey nicht verändert, sondern dieses äussert eben denselben Widerstand gegen den horizontalen Druck von jenem, welche es vorhin gegen den horizontalen Zug (Fig. 58.) äusserte. Verhält sich nun die Kraft V zu der Last P, wie AC zu CB, so ist, wie vorhin, das Gleichgewicht da. Druckt V in einem grössern Verhältniß, so weicht P aufwärts. Druckt P stärker, als in dem Verhältniß CB zu AC, so muß die schräge Fläche zurückweichen.

§. 35.

Ich werde von dem zweyten dieser Fälle die Anwendung zur Erläuterung einiger sehr nützlichen Bewegungen im

letzten

letzten Abschnitt machen. Hier erfodert der erste Fall unsre nähere Betrachtung, da die schräge Fläche durch ihre Bewegung den auf sie drückenden schweeren Körper in die Höhe treibt. Wir finden hierin die Gründe zur Erklärung eines der bekanntesten und nützlichsten Werkzeuge, nemlich der Schraube. Man nehme eine schräge Fläche ABC (Fig. 60.) an, auf welcher ein schweerer Körper ABDE mit seiner ganzen Fläche liegt. Beyde haben eine mäßige aber gleiche Dicke. Jene werde in die Lage abc gebracht, da unterdessen dieser gehindert wird, sich mit derselben vorwärts zu bewegen. Alsdenn kann diese Bewegung der Fläche ABC nicht erfolgen, ohne daß ABED aufwärts in die Lage abed gedrängt werde. Die Kraft, mit welcher ABC vorwärts gedrängt wird, muß sich auch hier zu der Schweere der Last, wie AB zu BC, in dem Fall des Gleichgewichts verhalten, und in einem grössern Verhältniß, als dieses, zu der Last stehen, wenn diese aufwärts gedrängt werden soll. Nun biege man beydes die Fläche und den darauf druckenden Körper in die Runde, wie Fig. 61. anzeigt, und wende die Fläche, anstatt sie vorwärts zu treiben, in die Runde herum, so haben wir die Schraube, in welcher die Wirkung der Fläche auf den drückenden Körper noch eben dieselbe ist, welche wir vorhin betrachtet haben. Die Linie BC aber wird nun zum Circul, oder zur Peripherie des Schraubengangs; AC stellt nun die Höhe desselben dar. **Kraft und Last verhalten sich also hier, wie die Höhe des Schraubengangs zum Umkreise desselben.**

Es ist wichtig hiebey anzumerken, daß wenn die Kraft sich mit der schrägen Fläche längst der Linie BC, sie sey nun gerade, wie Fig. 60, oder ein Circul (Fig. 61.) fortbewegt, die Last unterdessen um die Linie AC aufwärts bewegt werde. Wir finden also hier unsern mechanischen Grundsatz §. 17. wieder, daß sich im Fall des Gleichgewichts die Kraft zu der Last umgekehrt wie ihre Geschwindigkeiten verhalten.

Bey dem Gebrauch der Schraube verändern sich aber die Umstände in verschiedenen Stücken. Der Körper, welcher durch die Umwendung der Schraube gehoben werden soll, trägt gewöhnlich ein grosses Gewicht. Die Kraft, mit welcher die Schraube gewandt werden soll, haben wir uns als in derjenigen Richtung druckend vorgestellt, in welcher dieselbe weichen kann, das ist, in der den Circul berührenden Linie. Man stelle sich eine Scheibe AB (Fig. 62.) vor, an deren Umkreis eine Kraft in der Richtung BD zieht, um sie um den Punct C in eine Bewegung zu setzen, die durch irgend einen Druck oder Hinderniß gestört wird. Das Vermögen dieser Kraft wird sich nach CB, der Entfernung von dem Mittelpunct, richten. Man bevestige einen Hebel BE an dieser Scheibe, welcher der Kraft Gelegenheit gebe, in einer grösseren Entfernung CE zu wirken. Nun ist die Kraft in diesem Verhältnisse grösser geworden, Sie bewegt sich aber nun durch den grössern Circul EFD, da mittlerweile die Last, wenn diese Scheibe die Grundfläche einer Schraube ist, um die Höhe des Schraubengangs steigt. Das umgekehrte Verhältniß der Geschwindigkeiten ist auch hier noch immer das Verhältniß der Kraft und der Last. Dieß ist aber die Art, wie man gewöhnlich eine Schraube bewegt. Man bevestigt an einem Ende derselben, einen Hebel, an welchen die Kraft drucken kann, wodurch die Wirkung derselben so viel stärker, aber auch zugleich so viel langsamer wird, indem sich die Kraft in einem so viel grössern Kreise bewegen muß, ohne daß die Last deswegen geschwinder stiege.

Man läßt die Schraube gewöhnlich auf einen Körper wirken, der so ausgehölt ist, daß sich die Gänge der Schraube ganz in denselben fügen, und beschweert diesen mit der Last, welche durch Umdrehung der Schraube bewegt werden soll. Die Benennung desselben ist die Schraubenmutter. Man sehe Fig. 63. Oder man legt die Schraubenmutter, als eine unbewegliche Grundlage, unter, an deren Gängen sich

die Schraube gegen die aufliegende Last bewegen muß. (Fig. 64.) Der eine oder der andre Fall macht in Ansehung der Wirkung keinen Unterschied, doch ist der erste als eine Bewegung der schrägen Fläche gegen die Last, der andre als eine Bewegung der Last über der schrägen Fläche anzusehen.

Der vortheilhafteste Gebrauch der Schraube hat Statt, wenn man die Gänge derselben in die Zähne eines Rades eingreifen läßt, (Fig. 65.) die zu diesem Ende schräg ausgeschnitten werden. Der Widerstand, welchen die Schraube alsdenn zu überwinden hat, ist der Druck, den die Wirkung einer an der Welle des Rades angehangenen Last auf die Zähne in dem Umkreise desselben äussert, welcher aber in dem Verhältnisse der Entfernung schwächer wird. Eine auf diese Art angebrachte Schraube thut ihre Wirkung, so lange als Zähne des Rades in dieselbe eingreifen, das ist, so lange man die Bewegung fortsetzt, weil das Rad, wann eine Zahn sich ausgewunden hat, immer einen andern der Schraube in den Weg bringt. Man nennt sie deswegen eine Schraube ohne Ende. Bey der vorhin beschriebenen Schraube hat dagegen die Wirkung, so wie die Bewegung, nur bis zu einer gewissen Höhe statt.

Bey der schrägen Fläche Fig. 59. und folglich auch bey der Schraube (Fig. 63. und 64.) kann die Kraft um so viel geringer seyn, je kleiner AC, oder die Höhe des Schraubengangs, in Vergleichung mit BC, oder dem Umkreise desselben ist. Die Schrauben vermögen also das meiste, deren Gänge sehr enge sind. Allein wo man keine so grosse Kraft und eine so viel geschwindere Bewegung erfodert, macht man lieber die Schraubengänge sehr weit, so daß man Raum für einen zweyten Schraubengang behält, welcher zugleich mit dem ersten die Last trägt, und mit diesem parallel um die Welle der Schraube gezogen ist. Auf diese Art sind die Schrauben an den Buchdruckerpressen und vielen andern Maschinen ausgearbeitet.

Die Schrauben überhaupt, und insbesondere die Schrauben ohne Ende, haben ein grosses Vermögen, welches durch die Länge des angebrachten Hebels nach Gefallen verstärkt werden kann. Sie schaffen aber dagegen eine sehr langsame Bewegung der Last, welche man durch sie heben will. Man setze, an der Schraube ohne Ende (Fig. 65.) sey der Durchmesser der Welle zehnmal kleiner, als der Durchmesser des Rades, so geht die Last schon zehnmal langsamer, als die Zähne des Rades fort. Allein, ehe ein Zahn sich auswindet, muß die Kraft an der Kurbel ihren ganzen Circul durchlaufen, und dieses so viel mal thun, als das Rad Zähne hat, ehe dasselbe und mit ihm die Last ihren Circul nur einmal durchläuft.

Anmerkung.

Ich habe in dieser Erläuterung des Vermögens der Schraube gewisse von neuern Mechanikverständigen angemerkte Umstände in der wahren Figur derer Flächen, die bey der Schraube auf einander drücken, aus der Acht gelassen, welche freylich mit in Betracht zu ziehen sind, wenn man dieses Vermögen genau schätzen will. Allein theils weicht die gewöhnliche Erläuterung zu wenig von der Wahrheit ab, theils würde die Erwähnung jener Nebenumstände den Beweis für dieses Buch zu schweer machen. Zudem stört ohnehin das Reiben, welches bey keiner Maschine so stark, als bey der Schraube ist, die Wirkung derselben so sehr, daß der genaueste Beweis sich dennoch nicht durch die Erfahrung bestättigen läßt. Ich werde aber überhaupt in denen Erläuterungen, die ich von den einfachen und zusammengesetzten Maschinen, und der Methode, ihr Vermögen zu berechnen, geben werde, die verdriesliche Schwierigkeit, welche das Reiben macht, nicht in genaue Betrachtung ziehen, sondern diese nebst andern Schwierigkeiten, die sich der Ausführung der Mechanischen Theorie in den Weg legen, für einen besondern Abschnitt sparen.

§. 36.

Die schräge Fläche giebt die Gründe zur Erläuterung einer andern für das gemeine Leben sehr brauchbaren Maschine

schine ab. Diese ist der Keil, ein Werkzeug, welches man gewöhnlich zur Trennung des Zusammenhangs der Theile vester Körper anwendet, das aber seine starke Wirkung durch den Stoß oder Schlag eines andern harten Körpers bekömmt. Wie aber ein Keil durch seine eigene Schweere schon zwischen die Theile eines vesten Körpers sich eindrücken kann, so ist es für die Mechanische Theorie bequemer, ihn in diesem Zustande zu betrachten, und zuförderst den Fall des Gleichgewichts zu bestimmen, da der Druck von dessen Schweere gegen die Kraft, welche die Theile der Körper zusammen hält, ohne Wirkung bleibt.

Man weiß überhaupt, daß ein Keil so viel leichter in den Körper, den er trennen soll, eindringt, je schweerer und je spitzer er ist, das ist, je kleiner der Winkel wird, unter welchem dessen beyde Seitenflächen zusammen gehen. Wir wollen uns dieses etwas bestimmter vorstellen. ABC (Fig. 66.) sey der Keil, E und F zween Körper, die durch irgend eine Kraft, welche sie auch sey, gegen einander gezogen, oder zusammen gehalten werden. Wir haben alsdenn in dem Drange der beyden Flächen AC und BC gegen E und F den Fall zwiefach, den wir bey der schrägen Fläche, wenn sie unter oder gegen eine Last gedrückt wird, einfach betrachtet haben. Soll das Gleichgewicht da seyn, so muß sich die Kraft, mit welcher die Fläche BC gegen F gedruckt wird, zu F verhalten, wie DB zu DC, und die Kraft, mit welcher die Fläche AC niederdrückt, wie AD zu DC. Allein die Wirkung beyder Flächen vereint, oder des ganzen Keils, verhält sich zu der Kraft, die beyde Körper zusammen hält, wie die ganze Linie AB, das ist die Grundlinie des Triangels, der den Keil vorstellt, zu DC, der Höhe des Keils. Je kleiner also AB, oder diese Dicke des Keils, in Vergleichung seiner Länge, oder je spitzer derselbe ist, desto stärker ist seine Wirkung durch den blossen Druck.

Wenn daher der Druck des Keils, oder die Kraft, welche er durch den Schlag oder Stoß eines andern Körpers gewinnt, grösser ist im Verhältniß der Kraft, welche die Theile des Körpers zusammen hält, als die Dicke des Keils gegen seine Höhe, so dringt er in den Körper ein. Ist jene Kraft geringer, als in diesem Verhältnisse, so kann er nicht eindringen, oder wird in gewissen Umständen gar zurück gestossen. Man beweiset diese Regul, in Ansehung des Keils, durch Versuche, vermittelst einer Maschine, deren Einrichtung zu beschreiben, für meinen Zweck zu weitläuftig seyn würde. Ich bediene mich derjenigen, welche in s'Gravesande Physik §. 279. beschrieben ist.

Wir brauchen dieses Werkzeug öfter im gemeinen Leben, als wir glauben, weil der Keil seine Benennung bey so vielen Werkzeugen verändert. Alle unsre Messer, Scheeren, Aexte, Meissel, kurz alle Werkzeuge, die wir zum Zertheilen der Körper gebrauchen, sind nichts anders, als Keile, von denen einige mit einem blossen Druck, andre mit Stoß und Schlag wirken, alle aber um so viel mehr vermögen, je schärfer sie sind, oder je kleiner die Dicke derselben in Vergleichung ihrer Höhe ist.

In dem Gebrauch der Messer und aller Werkzeuge, die man zum Schneiden braucht, kömmt der Zug, mit welchem dieselben bewegt werden, der Wirkung des Drucks zu Hülfe, indem sie zugleich als eine Säge wirken. Denn auch die schärfste Schneide ist nicht nach einer fortgehenden Linie ausgearbeitet, sondern hat eine unendliche Menge kleiner Haken, welche in die kleinen Fasern derer Körper, die man zerstücken will, eingreifen, und sie durch den Zug zerreissen.

Diese Werkzeuge wirken auf eben die Art, wenn sie selbst keine Bewegung haben, und andre Körper auf ihre Schärfe drücken, oder gegen dieselbe stossen. Wir verwunden uns eben so oft, indem wir unsre Glieder gegen spitzige und scharfe Körper stossen, als wenn diese gegen jene gedruckt oder gestossen werden.

Auch die Nadeln, Nägel, Degen und alle Werkzeuge des Stechens, sind als Keile anzusehen, die mit mehr als zwo Seiten wirken. Die Bohrer sind Keile mit gekrümmten Flächen, die mit ihrer herumbewegten Schärfe zugleich als eine Säge wirken, welche Wirkung durch den zu oberst angebrachten Handgrif, als durch einen Hebel, sehr verstärkt wird.

Fünfter Abschnitt.

Von der Zusammensetzung der Maschinen.

§. 37.

Die Theorie der Mechanik giebt freylich ein solches Verhältniß in den Theilen der einfachen Maschinen an, durch welches die geringste Kraft mit der größten Last ins Gleichgewicht gebracht werden kann. Es ist an sich nichts ungereimtes in der Vorstellung eines Hebels oder eines Rades, an welchem die Kraft tausendmal entfernter von dem Bewegungspunct ist, als die Last, und daher für das Gleichgewicht tausendmal kleiner als diese seyn kann. Man kann sich die schräge Fläche deutlich vorstellen, deren Höhe den tausenden Theil ihrer Länge ausmacht, oder eine Schraube, an der die Weite der Schraubengänge tausendmal kleiner als der Umriß der Schraube ist, bey denen folglich eben das Verhältniß der Kraft zu dem Widerstande Statt hat. Allein die Verfertigung solcher Werkzeuge, und die Anbringung der Last oder der Kraft, führt unüberwindliche Schwierigkeiten mit sich. Wo wird man z. Ex. die Materialien zu einem Rade hernehmen, an welchem das Verhältniß der Kraft zu der Last auch nur wie eins zu hundert wäre. Gesetzt, die Axe wäre von dem vestesten Stahl, und stark genug, um hundert Pfund zu tragen. Sie wird doch, bey einer gewissen Länge, die man ihr geben muß, wenigstens

einen Zoll dick seyn müssen. Um nun der Kraft eine hundertmal grössere Entfernung zu geben, würden die Speichen dieses Rades hundert Zoll lang seyn müssen. Sie werden entweder ebenfalls einen Zoll stark seyn müssen, und die Axe zu sehr beschweeren, oder, wenn sie schwächer sind, zu biegsam werden, daß die Maschine eben dadurch ihre Wirkung nicht leistet. Macht man die Maschine von Holz, so wird diese Schwierigkeit noch viel grösser seyn.

Man weicht dieser Schwierigkeit dadurch aus, daß man mehrere einfache Maschinen, theils von einer, theils von verschiedenen Arten zusammen sezt, welche iede für sich, nach dem Verhältnisse des Widerstandes, den sie auszustehen haben, Stärke genug haben, um vereint die verlangte Wirkung zu thun. Ich werde zuerst die Zusammensezung der einfachen Maschinen von einer Art, und hernach derer von verschiedener Art erläutern.

§. 38.

Ich will den Fall abermals annehmen, daß durch blosse Hebel eine Last von 100 Pfunden mit einer Kraft von einem Pfunde ins Gleichgewicht gestellt werden solle. Man nehme einen Hebel ACB (Fig. 67.) an, der auf einer Seite des Ruhepuncts von C bis A einen, auf der andern von C bis B zehn Theile hat. Das Gewicht P erfodert alsdenn in dem Punct B eine Kraft von zehn Pfunden. Allein nun liege auf diesen Punct B ein andrer Hebel DEF mit seinem Ende D auf, der auf eben die Art eingetheilt ist. Es ist klar, daß der Punct D mit eben der Gewalt aufwärts gedruckt werde, mit welcher B gedruckt wird. Wir können diese Kraft aus der Grösse derjenigen schäzen, welche in dem Punkt B zum Gleichgewicht erfodert wurde. Sie betrug zehn Pfund. Der Druck von diesen zehn Pfunden wird durch eine zehnmal kleinere Kraft, das ist von einem Pfunde, in dem Punct F gehalten, die aber aufwärts ziehen muß. Es ist also klar, daß durch diese zween Hebel die

Kraft

Kraft zu der Last in das Verhältniß eins zu hundert gesetzt werde. Wir könnten aber eben dieses durch die Zusammensetzung dreyer Hebel (Fig. 68.) erhalten haben, von denen AB wie 1 zu 5 CD wie 1 zu 4 und EF wie 1 zu 5, von dem Ruhepunct an, eingetheilt ist.

Indessen läßt sich auch hier anmerken, daß die Geschwindigkeiten im umgekehrten Verhältnisse der Kraft und der Last sind. In der 67sten Figur bewegt sich B und mit demselben D zehnmal so geschwind als A, F aber zehnmal so geschwinde als D, folglich F hundertmal so geschwinde als A. In der 68sten Figur bewegt sich B fünfmal so geschwind als A, D viermal so geschwind als B, und F fünfmal so geschwind als D, folglich F $5 \times 4 \times 5$ mal oder hundertmal so geschwind als A.

Doch man wird eine solche Zusammensetzung der Hebel nicht leichte wählen, weil sie der Last nur eine sehr kurze Bewegung geben können. Sie kann höchstens nur da nützlich seyn, wo man grosse Gewichte ohne grosse Genauigkeit schätzen will. Denn man sieht leicht ein, daß, wenn in den bemerkten Figuren die Hebel mit sich selbst ins Gleichgewicht gestellt, und das Gewicht P nicht bekannt wäre, man eben daraus schliessen könnte, daß es 100 Pfund betrage, weil in dem Punct F eine Kraft von einem Pfunde demselben das Gleichgewicht hält. Würde diese Kraft oder Gewicht schon in G das Gleichgewicht halten, so würde man aus ähnlichen Gründen schliessen können, daß P nicht mehr als 80 Pfund betrüge, und überhaupt aus dem Punct des genau eingetheilten Hebels, in welchem das kleine Gewicht im Gleichgewicht mit P steht, das Gewicht P auf eben die Art schätzen, wie an einer einfachen Schnellwaage, die auf Schätzung so entferneter Gewichte nicht eingerichtet werden kann, ohne an dem langen Arme zu schwach zu werden. Man sieht aber leicht, daß die Bewegung solcher mit einander verbundenen Hebel wegen des Reibens in denen Puncten, wo sie aufliegen oder gegen einander drücken, nicht

so frey sey, als einer einfachen Schnellwaage, und man braucht daher dergleichen Waagen nur zur Abwägung solcher Waaren, bey welchen es auf einen Irrthum von einigen Pfunden nicht ankömmt. Die Heuwaagen sind an denen Orten, wo man das Heu nach dem Gewichte verkauft, zum Theil nach diesen Gründen eingerichtet. Man giebt ihnen aber zur Ersparung des Raums eine solche Einrichtung, da die verschiedenen Hebel nicht in der Länge hinter- sondern über einander liegen.

§. 39.

Der Nachtheil in der Zusammensetzung der Hebel, daß sie die Last nur durch einen kleinen Raum heben, wird durch die Zusammensetzung der Räder gehoben, und diese hat im mechanischen Gebrauch eben den Vorzug, den ein einfaches Rad vor dem einfachen Hebel hat. Man kann sich indessen den deutlichsten Begrif von der Wirkung zusammengesetzter Räder auf einander, aus der eben jetzo erklärten Wirkung zusammengesetzter Hebel machen. Wir wollen auch hier den Fall beybehalten, daß hundert Pfund durch ein Pfund im Gleichgewicht erhalten werden sollen. Man stelle sich die Arme der Hebel (Fig. 67. 68.) vor, als in verschiedenen Scheiben bevestigt, von denen die kleinere mit dem Radius AC, die grössere mit dem Radius BC beschrieben wird (Fig. 70 und 71.) In dem Verhältniß der Kraft und Last wird hier nichts geändert, in so fern diese Scheiben mit sich selbst im Gleichgewicht stehen. Man bilde auf eben diese Art den zweyten Hebel DF Fig. 70. und den zweyten und dritten Fig. 71. in Scheiben aus, und füge nur an diesen Scheiben die Puncte, in welchen die Hebel gegen einander drücken, so an einander, daß der eine sich nicht ohne den andern bewegen kann; so ist noch alles mit diesen Scheiben oder Rädern auf eben die Art, wie mit den Hebeln, bewandt, und die Kraft, die an der Peripherie des letzten Rades das Gleichgewicht mit der Last P hält, darf nicht mehr als den hunderten Theil von dieser betragen. Es

Es ist bekannt, daß man diese Verbindung der Räder dadurch erhält, daß man ihre Umkreise in Zacken oder sogenannte Zähne ausbildet, welche in einander gefügt werden, und sich nicht einer ohne den andern bewegen können. Wenn man diese Zähne in der fortgesetzten Fläche des Rades anbringt, so nennt man ein solches Rad ein Stirnrad oder Sternrad. (Fig. 72.) Setzt man sie aber rechtwinklicht auf die Seitenfläche des Rades, so giebt es ein sogenanntes Kammrad ab. (Fig. 73.) Es sind aber hier gewöhnlich ein grösseres Rad und ein kleineres an einer Axe bevestigt. Wenn die Zähne des kleinen Rades mit der Axe in einem Stücke verbunden sind, so nennt man dieses kleine Rad ein Getriebe. (A Fig. 72.) Allein oft besteht dieses kleine Rad aus Stäben von vester Materie, welche von zwo Scheiben zusammen gehalten werden. Alsdann wird es ein Trilling benannt, dergleichen zur Verbindung mit einem Kammrade die zuträglichsten sind. (B Fig. 73.) Es ist klar, daß die Zähne, Kämme oder Stäbe des grössern und kleinern Rades, welche in einander eingreifen, einerley Grösse und Abstand von einander haben müssen, und man kann daher die ungleichen Bewegungen zweyer mit einander verbundenen Räder aus der verschiedenen Zahl ihrer Zähne sehr leicht beurtheilen. Wenn z. E. (Fig. 70.) das erste Rad in dem Umkreise sechzig, und das darein greifende Getriebe sechs Zähne hat, so müssen die Zähne des Getriebes sich aus den sechzig Zähnen des grössern Rades zehnmal auslösen, und folglich jenes samt dem an derselben Axe bevestigten zweyten Rade so viele mal herum kommen, ehe das erste Rad sich einmal umwendet.

Wenn man bey zusammengesetzten Rädern das Verhältniß der Kraft und der Last gefunden hat, so wird sich dabey allemal finden, das jenes das umgekehrte Verhältniß der Geschwindigkeiten sey, welche die Puncte haben, an denen die Kraft und die Last wirken. Z. E. die 71ste Figur stellt drey Räder vor, von denen das erste eine Welle hat, deren

Halb-

Halbmesser AC der fünfte Theil von dem Halbmesser CB des Rades ist. Dieses erste Rad habe im Umkreise dreyßig Zähne und das Getriebe D des zweyten Rades deren sechs. Die Geschwindigkeit aller Zähne in dem Umkreise des ersten Rades war schon fünfmal grösser, als derer Puncte in der Welle, mit denen sich das Gewicht P aufwärts bewegt. Dieser ist die Geschwindigkeit der Zähne des Getriebes D gleich. Allein in dem Umkreise des zweyten Rades bewegen sich alle Zähne noch viermal geschwinder, weil der Circul viermal grösser, als der Circul des Getriebes ist, und folglich zwanzig mal geschwinder, als der Punct A an der ersten Welle. Dieses zweyte Rad habe 24 Zähne, und das Getriebe E des dritten Rades sechs. Beyde greifen in einander ein und bringen den Punct F des dritten Rades, welches hier auch eine Kurbel seyn kann, in eine noch fünfmal geschwindere Bewegung, weil der Circul fünfmal weiter ist, die folglich hundertmal geschwinder wird, als die von dem Punct A.

Aber dieses umgekehrte Verhältniß der Geschwindigkeiten wird man viel leichter bestimmen können, so bald man die Zahl der Umläufe des ersten und des dritten Rades, und das Verhältniß des Umkreises der Welle zu dem Umkreise des letzten Rades weiß. Das erste Rad kömmt, wie aus der Vergleichung der Zahlen der Zähne an den Rädern und Getrieben erhellet, einmal herum in der Zeit, da das letzte sich zwanzigmal wendet, und das Verhältniß der erwähnten Circul ist, wie eins zu fünf. Nun ist es klar, daß, wenn sich ein Körper in einem fünfmal grössern Circul in eben der Zeit bewegt, in welcher ein andrer in dem fünfmal kleinern herumkömmt, die Geschwindigkeit des ersten fünfmal grösser, als des andern sey. Wenn aber jener in dem fünfmal grössern Circul zwanzigmal herumkömmt, da dieser in dem kleinern einmal sich herumbewegt, so ist die Geschwindigkeit des ersten noch zwanzigmal, das ist überhaupt hundertmal grösser, als des andern. Aber die Geschwindig-

schwindigkeit der Last ist einerley mit der, welche die einzelnen Puncte in der Fläche der Welle haben, und die von der Kraft einerley mit der Bewegung der Peripherie des letzten Rades. Kraft und Last verhalten sich also umgekehrt, wie diese Geschwindigkeiten, das ist, wie eins zu hundert. Das Verhältniß des ersten und des letzten Circuls, mit welchem sich beyde bewegen, kann nicht anders als durch unmittelbare Messung erforscht werden. Die Zahl der Umläufe findet man durch folgende leichte Regul: Man zähle die Zähne eines jeden grossen Rades und des Getriebes, in welches dasselbe eingreift. So oft diese Zahl in jener enthalten ist, so oft wird das Getriebe mit dem an eben der Axe befindlichem Rade während eines Umlaufes von jenem Rade sich herumwenden. Greift das zweyte Rad in das Getriebe eines dritten Rades ein, so läßt sich die Zahl der Umläufe desselben mit den Umläufen des zweyten und folgends des ersten Rades vergleichen. In der 71sten Figur habe das erste Rad 30 und das Getriebe des zweyten Rades sechs Zähne. Dieses muß also sich fünfmal herumwenden, ehe dieses einmal herumkömmt. Das zweyte Rad habe 24 und das Getriebe des dritten Rades 6 Zähne. Das dritte Rad wendet sich also viermal, da das zweyte sich einmal wendet, welches fünf Wendungen mit einer Wendung des ersten Rades macht. Es hat folglich 4 mal 5, oder 20 Umläufe, ehe das erste Rad einen Umlauf vollendet.

Allein man richtet die Maschinen nicht gerne so ein, daß die Zahl der Umläufe so leicht zu berechnen ist. Die Ursache ist diese: Wenn die Zahl der Zähne des Getriebes drey oder mehrere mal in der Zahl der Zähne des Rades begriffen ist, so treffen bey jeder Umwendung des Rades immer einerley Zähne auf einander. An dem ersten Rade der 71sten Figur würde der Zahn des Getriebes, der nun den Zahn des zweyten Rades drückt, auf die Zähne 1, 7, 13, 19, 25 des zweyten Rades bey jedem Umlaufe drücken. Hat nun dieser Zahn des Getriebes eine unrichtige Figur, so wird er einen

Eindruck davon in allen denen Zähnen lassen, welche nur er und kein andrer Zahn dieses Getriebes bey allen Wendungen der Maschine berührt. Oder ist einer von den Zähnen des Rades nicht recht beschaffen, so wird er bey jeder Wendung den Zahn des Getriebes ausschleifen, und nach und nach untauglich machen. Oder ist die Weite dieser Zähne ungleich, so wird die Maschine, wenn ihre Wendung diese Zähne zusammen bringt, entweder stocken oder schlottern, und die Zähne werden sich durch das erwähnte Abschleifen noch mehr verderben. Man gebe aber diesem Rade statt 30 Zähne deren 31, so ist es klar, daß der anliegende Zahn des Getriebes in der ersten Wendung die Zähne 1, 7, 13, 19, 25, 31, in der zweyten die Zähne 6, 12, 18, 24, und so fortan alle Zähne des Rades drucken und schleifen wird. Gesetzt es sey fehlerhaft ausgearbeitet, welches immer böse genug ist, so wird er an den 31 Zähnen den Schaden nicht thun können, den er an jenen wenigen, die er sechsmal öfter berührte, that, und er wird eher vor diesen 31 Zähnen so zurecht geschliffen seyn, wie es die Bewegung der Maschine mit sich bringt, als er diese verderben kann. Es ist also vortheilhafter, die Räder und Getriebe nach solchen Zahlen einzutheilen, die sich einander nicht ohne Brüche dividiren, als nach solchen, die genau in einander aufgehen. Freylich wird die Berechnung der Maschine dadurch etwas schweerer, und fällt nun in die Brüche. Man setze z. E. das erste Rad (Fig. 71.) habe 31, das erste Getriebe 6, das zweyte Rad 25, und das zweyte Getriebe 6 Zähne, so geht das zweyte Rad $5\frac{1}{6}$mal öfter herum, als das erste, das dritte $4\frac{1}{6}$ öfter als das zweyte, und daher hat das dritte $\frac{775}{36}$ oder ungefähr $21\frac{1}{2}$ Umläufe gegen einen Umlauf des ersten. Nun sey das Verhältniß des Durchmessers der Welle AB zu dem Durchmesser des dritten Rades, wie 5 zu 36, so ist das genaue Verhältniß der Geschwindigkeiten wie 1 zu $\frac{36}{5}$ mal $\frac{775}{36}$, oder wie 1 zu 155, und so verhält sich die Last zu der Kraft im Gleichgewicht; ein Verhältniß, das demnach aus diesen drey Brüchen in ganzen Zahlen sich finden läßt. Man

Man wird nun leicht einsehen, wie geschickt Räder sind, die Wirkung der Kraft in jedem gegebenen Verhältnisse zu vermehren. Wir haben bey zwey Rädern die Wirkung der Kraft hundertfach gefunden. Ein drittes Rad, an welchem Rad und Axe eben das Verhältniß 10 : 1 haben, würde dieselbe tausendfach, ein viertes zehntausendfach u. s. f. machen. Wenn verlangt würde, eine Maschine darzustellen, wo ein Pfund mit einer Trillion Pfunde im Gleichgewicht stehen sollte, so würden nicht mehr als neunzehn dergleichen Räder nöthig seyn, deren Radius zehnmal grösser, als der von der Axe oder den Getrieben ist. Kurz, die Theorie kennt hier keine Gränzen, wenn gleich in der Ausführung die Natur allerley Schwierigkeiten in den Weg wirft, von denen wir unten reden werden.

§. 40.

Die Rollen lassen sich nicht mit Nutzen ohne Zusammensetzung gebrauchen, und ich habe schon oben §. 31. von der Wirkung geredet, die sie in der gewöhnlichen Zusammensetzung in so genannten Flaschenzügen haben, durch welche ein einiges Seil läuft, so daß die ganze Maschine als ein Ganzes angesehen werden kann. Folgende Zusammensetzung, welche die 74ste Figur vorstellt, ist weit vortheilhafter für die Kraft. Das Gewicht P betrage 32 Pfunde. Es hängt an der beweglichen Rolle A, und der Faden, welcher diese Rolle trägt, ist an einer zweyten Rolle B bevestigt, welche nur die Hälfte des Gewichts P trägt. Von dieser Hälfte trägt die Rolle C nur die Hälfte, und also das Viertheil von 32 Pfunden, D ein Achttheil, E ein Sechszehntheil, und die Kraft V hat von der ganzen Last nur ein zwey und dreißigtheil, nämlich ein Pfund zu halten. Ich rechne hiebey nicht die Kraft, welche hinzugethan werden muß, um dem Gewicht der Rollen das Gleichgewicht zu halten. Diese beträgt nicht mehr, als das Gewicht einer Rolle weniger $\frac{1}{32}$. Denn die Kraft V trägt die Hälfte der Rolle E, ein

Viertheil

Viertheil des Gewichts der Rolle D, ein Achttheil von C u. s. f.

Die Geschwindigkeit verhält sich auch hier umgekehrt, wie die Kraft und Last. Diese bewegt sich 32mal so langsam, als jene, und überhaupt müßten die Seile der letzten Rollen sehr lang seyn, um die Last nur einige Fuß hoch zu bewegen. Es ist daher diese Zusammensetzung der Rollen in keinem andern Fall nutzbar, als wo man eine schweere Last nur eben von der Erde und etwa auf Walzen heben will, um sie weiter fortzuschaffen.

Eine andre nützliche Einrichtung der Rollen ist die in der 75sten Figur abgebildete. Das über die Rolle A geschlagene Seil trägt mit einem Ende die Rolle B. Ein zweytes Seil geht über diese Rolle, und trägt mit einem Ende die Rolle C. Ein drittes Seil schlägt über die Rolle C, und wird an einem Ende von der Kraft V gehalten, alle drey Seile zusammen aber sind an einem Haken bevestigt, und halten an diesem das Gewicht P, welches hier für das Gleichgewicht siebenmal so groß als die Kraft V ist. Die Gründe hiervon einzusehen, dient die 76ste Figur. Hier trägt die Rolle C auf einer Seite ein Gewicht D von einem Pfunde. Auf der andern den Druck der Kraft V. Beyde müssen einander gleich seyn, und also wird diese Rolle mit 2 Pfund niederwärts gezogen. Diesem Zuge hält das Gewicht E von 2 Pfunden das Gleichgewicht. Nun wird die Rolle B mit 4 Pfunden beschweert, wogegen das Gewicht F von 4 Pfunden zieht, und jetzt ist das Gleichgewicht da. Es wird aber noch bestehen, wenn die drey Gewichte (Fig. 75.) in eines vereint werden, auf welches alle drey Seile vereint ziehen, und die Kraft V dabey wie vorhin bleibt. Wenn man die Rolle A an eine vierte Rolle hinge, so würde ein Gewicht von acht Pfunden das Gleichgewicht halten, und vereint mit dem Gewichte G 15 Pfunde betragen. Mit einer fünften Rolle könnten noch 16 Pfunde hinzukommen, u. s. f. Man sieht leicht ein, daß diese Einrichtung ohne

viele

viele Zurüstung der Kraft einen grossen Vortheil gebe, und sich sehr wohl anwenden lasse, wo man ein schweeres Gewicht mit weniger Kraft einen bestimmten Raum durch heben will. Man wendet daher diese Einrichtung auf den Schiffen, doch nur mit einer beweglichen Rolle an, um mässige Lasten sehr geschwind aus dem Raum und über Bord, oder umgekehrt zu heben.

Anmerkung.

Ich erinnere mich keiner Zusammensetzung der schrägen Flächen oder derer einfachen Maschinen, welche wir oben aus der schrägen Fläche erklärt haben, die für das gemeine Leben nutzbar seyn könnte. Es lassen sich zwar mehrere Schrauben oder Keile zugleich zur Bewegung grosser Lasten und zur Ueberwindung eines grossen Widerstandes anwenden, aber nicht leicht so, daß eines derselben auf das andere wirkte, und die Kraft desselben verstärkte. Ich gehe also jetzt zur Erläuterung der Zusammensetzung von Maschinen verschiedener Art.

§. 41.

Der Hebel wird in der Zusammensetzung der mehresten Maschinen angewandt, und dient theils als eine Handhabe, an welcher die Kraft der Menschen auf eine bequeme Art wirken kann, theils als ein Werkzeug, durch welches ein Theil der zusammengesetzten Maschine den übrigen Theilen derselben seine Bewegung mittheilt. Ich habe von dem Gebrauch der Handhabe oder Kurbel in der ersten Absicht hinlänglich oben § 28. gehandelt. Wenn man dieselbe in der letzten Absicht anwendet, so geschicht es gewöhnlich, um eine wiederkehrende geradelinichte Bewegung zuwege zu bringen. In der 77sten Figur ist CA eine Kurbel oder sogenannter krummer Zapfen, welcher mit dem Rade BD herumgeführt wird, und die Stange AE mit sich zieht. Wenn die Kurbel in die Lage Cα kömmt, so ist die Stange so hoch hinaufwärts getrieben, als sie kommen kann, wird aber, so wie die Kurbel weiter in ihrem Circul herum

kömmt, wieder herunter gezogen, und in die niedrigste Lage gebracht, wenn die Kurbel in die Lage Ca kömmt. Man sieht leicht ein, daß die Kurbel während dieser Bewegung auf eine sehr ungleiche Art auf die Stange wirke, und diese hinwieder mit ganz verschiedenem Drucke der Kurbel widerstehe. Ich werde aber diesen Umstand weiter unten in nähere Betrachtung ziehen.

§. 42.

Alle Arten der Radwinden geben in der Zusammensetzung mit den Rollen und Flaschenzügen eine sehr vortheilhafte Maschine ab, insonderheit aber die Erdwinde, bey welcher man, wie oben erwähnt worden, die Kräfte mehrerer Menschen mit beynahe immer gleichem und sehr vortheilhaftem Drucke anwenden kann. Man kennt die grosse Wirkung dieser Maschine in dem Gebrauch, den die Schifbauer davon bey dem Aufschleppen grosser Schiffe auf den Werft zur Ausbesserung machen, wo sie aber noch dazu mit einer schrägen Fläche verbunden ist. Ueberhaupt ist diese Maschine eine der vortheilhaftesten, die man zur Bewegung ungeheurer Lasten, in horizontaler oder jeder andern Richtung, anwenden kann. Des *Fontana* Maschinen zur Fortschleppung und Aufhebung des eine Million Pfund schweeren Obeliskus in Rom waren hauptsächlich Erdwinden mit Flaschenzügen. Ich werde indessen hier ein Beyspiel einer auf diese Art zusammengesetzten Maschine wählen, an deren Endzweck und Wirkung sich manche meiner Leser als Augenzeugen erinnern werden. Diese ist die vor wenig Jahren von unserm erfahrnen Baumeister, Herrn Sonnin, zur Rechtstellung der aus ihrem Stand gerückten Spitze unsers Nicolai Thurms mit dem besten Erfolge angewandte. Ich nehme sie mit desto mehrerem Grunde zum Beyspiel, um wenigstens von ihr eine allgemeine Vorstellung zu geben, da hier Schwierigkeiten vorkamen, welche in andern dergleichen Unternehmungen sich nicht in den Weg legen.

AB (Fig. 78.) sey hier ein Balken statt eines von denen acht Pfeilern des Thurms, welche die Spitze desselben über dem Glockenspiele tragen. Jeder dieser Pfeiler war wegen mangelhafter Verbindung an deren unterm Theile durch die starken Westwinde aus dem senkrechten Stande gebracht, und sie hingen zwischen 12 und 18 Zoll, einige mehr einige weniger, über. Hier war also die Arbeit zu thun, da ein überhängender Körper um einen seiner Endpuncte der Schweere entgegen aufwärts gewandt werden muß, welche ich oben § 24. beschrieben und die Gründe zur Beurtheilung des Drucks und Gegendrucks angegeben habe. Der Pfeiler mußte bey dem Ueberhange seines Schweerpuncts, in welchem wir das Gewicht von dem achten Theil der Thurmspitze als mit vereint ansehen wollen, in die perpendiculare Lage zurück gebracht werden. Hier sind freylich in der Bestimmung des Drangs von dem Thurm gegen diese Pfeiler gewisse Umstände in Betrachtung zu ziehen, die ich aber beyseite setzen werde, weil uns hier nur an der Kenntniß der Maschine und der Schätzung ihrer Wirkung gelegen ist. Wenn ein solcher Körper, wie dieser Pfeiler, an einem seiner Ende angegriffen und zurück gezogen werden soll, so muß ein vester Punct da seyn, gegen welchen er gezogen werden könne. Dieser war hier in dem Gebäude selbst nicht zu finden. Die Pfeiler gegen einander zu ziehen, konnte sich niemand einfallen lassen. Sie mußten vielmehr alle zugleich mit gleichen Kräften angegriffen und zurück gerückt, folglich für jeden Pfeiler ein vester Punct, und zwar bey den vier westlichen Pfeilern in freyer Luft über das Gebäude hinaus, gesucht werden. Dieses wurde auf folgende Art erhalten: Ein starker Balken DC wurde in die schräge Lage, welche die Figur vorstellt, gebracht. Man konnte ihn sicher gegen den Pfeiler anhängen, weil er denselben schon durch sein eignes Gewicht zurück ziehen half. Hinten aber hielten ihn starke Ketten, daß sich sein Ende C nicht gegen den Pfeiler zu bewegen konnte. Unten bey D stand

er mit seinem Fusse in der Nuth einer vesten Unterlage. Nun gab sein Ende C einen vesten Punct ab, gegen welchen das Ende A des Pfeilers sich bewegen mußte, wenn eine Maschine mit hinlänglicher Kraft denselben angriff. Diese bestand aus einem grossen Flaschenzuge F, mit sieben Seilen, durch welchen das Seil GH zu einem Haspel T in das untere Stockwerk des Thurms hinab ging, welcher Haspel aber gehörig bevestigt war, so, daß er nicht bey der Gegenwirkung des Widerstands aufwärts weichen konnte. Nun läßt sich die Wirkung der Maschine auf folgende Art schätzen: Acht Männer, deren jedem wir nur 20 Pfund Kraft beylegen wollen, um nichts weiter für das Reiben und die nicht vortheilhafte Stellung bey dem Haspel abrechnen zu dürfen, greifen den Haspel mit 160 Pfund-Kraft an. Ich nehme die Entfernung von der Axe desselben sechsmal grösser, als die halbe Dicke der Welle, an; so können sie mit 160 Pfund durch den Haspel allein schon 960 Pfund bezwingen. Der Flaschenzug vermehrt ihre Kraft siebenmal, und also vermag dieselbe 7×960 oder 6720 Pfund. Alle acht Maschinen aber, wann sie zugleich wirken, haben 8×6720 oder 53760 Pfund Kraft, welche hier ihre Wirkung gewiß erreichen mußten, weil hier bey weitem nicht das ganze Gewicht des Thurms zu heben, sondern nur der seitwärts gehende Drang desselben und das starke Reiben und Klemmen in den ausgelöseten Fugen zu überwinden war.

§. 43.

Die schräge Fläche dient auf eine vortheilhafte Art in der Verbindung mit andern einfachen Maschinen, und verstärkt die Wirkung derselben in ungemein grossem Verhältnisse. Ich habe S. 322 der Winde der Schiffsbauer erwähnt, und hier ist der Ort, das Vermögen dieser starken Maschine genauer zu berechnen. Man nehme das Gewichte des Schiffes Fig. 79. zu 60000 Pfund an; die schräge Fläche AB, an welcher man dasselbe hinaufwindet, habe bey einer

Länge

Länge von 100 Fuß 8 Fuß Höhe. Weil nun der Zug parallel mit der Fläche aufwärts geht, so gewinnt man zufolge §. 32. an der Kraft in dem Verhältniß 25 zu 2, und es würden, wenn das Schiff ohne weiteres Werkzeug an der schrägen Fläche heraufgezogen wird, 4800 Pfund zum Gleichgewicht hinlänglich seyn. Nun habe der Flaschenzug die Einrichtung, daß das Schiff mit fünf Seilen gezogen werde; so wird nur der fünfte Theil von jener Kraft, nämlich 960 Pfund, nöthig werden. Die Erdwinde C aber habe Hebel, welche sechsmal so lang, als die halbe Dicke ihrer Welle mit der halben Dicke des Seils sind, so wird an allen diesen Hebeln 160 Pfund Kraft, wenn ihrer aber, wie gewöhnlich, vier sind, 40 Pfund an jedem nöthig werden. Diß ist freylich für einen Menschen bey dem vortheilhaften Druck, den er hier anwenden kann, nicht zu viel. Allein sie werden wegen des gar starken Reibens nicht Kraft genug haben, das Schiff in die Höhe zu ziehen. Wenn aber ein zweyter Mensch an jeden dieser Hebel tritt, so wird, ungeachtet diese eine kleinere Entfernung von der Axe des Rades haben, der Zusatz ihrer Kraft mehr als hinlänglich seyn, um den Widerstand des Reibens zu heben, und die Maschine mit der Last in Bewegung zu setzen.

Die schräge Fläche giebt ebenfalls einen grossen Vortheil für die Kraft, wenn man eine schweere Last an derselben hinauf, oder gar hinab rollen, noch mehr aber, wenn man diese rollende Bewegung mit Hebeln befördern kann. Dieß ist das wesentliche der von dem Königl. Schwedischen Schiffsbaumeister Sheldon angegebenen Maschine, welche wir ebenfalls in der Rechtstellung des hiesigen Dom- und auch des Cathrinenthurms von dem Herrn Baumeister Sonnin mit erwünschtem Erfolge haben anwenden gesehen.

Ich muß, ehe ich dieselbe erläutere, anmerken, daß nicht bloß eine gegen den Horizont geneigte Fläche eine schräge Fläche zu nennen sey, sondern eine jede Fläche ist als eine solche anzusehen, welche vermöge ihrer Lage dem auf sie

drückenden Körper keine andre Bewegung als seiner Schweere entgegen erlaubt. Man wird mich besser verstehen, wenn man die 80ste Figur betrachtet. Hier ist die Fläche AB zwar an sich horizontal. Allein die Stütze, welche die Last E trägt, kann mit ihrem Ende C nicht längst dieser Fläche in der Richtung CA bewegt werden, ohne daß die Last E ihrer Schweere entgegen aufwärts bewegt würde. Die Fläche AB ist daher in Absicht auf die Last E eine schräge Fläche zu nennen. Man beschreibe aus D mit dem Radius DC einen Circulbogen CF; so ist es klar, daß, wenn die Stütze DC längst diesem Circulbogen sich bewegte, die Last E weder steigen noch sinken würde. Allein an jeder andern Fläche, z. E. CG, welche diesen Circulbogen schneidet, wird sie steigen müssen, und auch diese ist noch als eine schräge Fläche in Absicht auf die Last E anzusehen.

Ich muß ferner erläutern, wie es mit der Kraft sich verhalte, die einen runden Körper an seiner Peripherie angreift, und an eine schräge Fläche hinan zu wälzen sucht. Wenn die Kraft auf den Mittelpunct des Körpers Fig. 81. parallel mit der Fläche zieht, so verhält sie sich zu dem Gewicht, wie die Höhe der Fläche zu ihrer Länge. (§ 32.) Man sieht aber leicht ein, daß, wenn sie auf den Punct A parallel mit der Fläche zieht oder drückt, sie eine zweymal grössere Entfernung von dem Punct B, um welchen die Bewegung geschicht, habe, und also nur halb so groß seyn dürfe. Bevestigt man aber in A einen Hebel AC, welcher dreymal so lang als der Durchmesser CB ist, so hat man dreymal so viel Kraft zur Wendung des Körpers, als die Hand haben würde, die den Körper in A angreift, um ihn fort zu wälzen.

So war die Sache hier bewandt. Der Domthurm war, wegen Baufälligkeit der Mauer, westwärts gewichen. Ihm mußte nicht nur eine neue Unterlage gegeben, und die denselben tragende Balken gestützt, sondern auch diese aufwärts gerückt werden. Das Gewicht des Thurms vertheilte

sich

sich auf vierzehn Stützen, die man unter den Balken dessel-
ben anbrachte, welche auf hölzerne Walzen gestellt, diese
aber auf Unterlagen gebracht waren, welche zwar dem Auge
schräge niederwärts unter die Horizontal-Linie geneigt zu
seyn schienen, aber in der That, so wie eben angemerket
worden, die Last aufwärts brachten. Diese Walzen wur-
den durch eiserne Hebel, welche an ihren Enden eingestossen
wurden, herumgewandt. Wir wollen die Wirkung einer
solchen Maschine, ohne Rücksicht auf ihren Gebrauch, den
sie bey diesem Thurm hatte, näher untersuchen.

EK (Fig. * Tab. 8.) sey der Balken eines gesunkenen Ge-
bäudes, welches durch die schräge gestellte Stütze DC getragen
wird. Die Last dieses Balkens und des darauf druckenden
Gebäudes betragen gegen 30000 Pfund. Nachdem man
alles gehörig auf den Winkelhebel NKM reducirt hat, wel-
cher entsteht, wenn man von dem Ende K des Balkens eine
Perpendicular KM auf die verlängerte Stütze, und KN auf
die Directions-Linie des Schweerpuncts C zieht, bleibe der
Druck der Last auf die Stütze DC noch 16000 Pfunde,
welche man als in der Walze O, welche diese Stütze trägt,
vereint ansehen kann. Die wahre Schräge der Fläche in
Absicht auf diese Last erfahren wir, wenn wir eine Linie GH
perpendicular auf die Stütze, und eine andre HI parallel
mit derselben, folglich perpendicular auf GH, ziehen. Nun
sey IH $\frac{1}{20}$ von IG. Wenn 16000 Pfund an dieser Fläche
vorwärts gezogen werden sollten, so würden 800 Pfunde
Kraft dazu nöthig seyn. Allein die Walzen werden durch
Hebel OP bewegt, welche zehnmal so lang, als die halbe
Dicke der Welle sind, folglich der Kraft einen Vortheil in
dem Verhältniß 1 zu 10 geben, so daß sie nur 80 Pfund
Kraft erfodern. Wir müssen einräumen, daß dieses für
einen Menschen zu viel sey. Allein, wenn zween Hebel
eingestossen und von vier starken Männern zugleich angegrif-
fen werden, so werden sie Kraft genug anwenden können,
die Maschine, ungeachtet des starken Reibens, zu be-

zwingen, und den Punct des Balkens E in die Höhe zu treiben.

Diese Maschine hat vor der Schraube, welche man sonst zu dergleichen Absichten anzuwenden pflegt, einen grossen Vorzug. Es ist schweer, wo nicht unmöglich, der Schraube eine solche Stärke zu geben. 80 hat zu 16000 das Verhältniß 1:200. Der Schraubengang müßte also in der Höhe $\frac{1}{200}$ des Circuls halten, mit welchem die Kraft sich bewegt. Man wird daher, weil die Schraube stark genug seyn muß, um 16000 Pfund zu tragen, den Schraubengang wenigstens 2 Zoll weit machen müssen. Soll der Circul 200 mal grösser seyn, so muß er 400 Zoll betragen. Sein Durchmesser ist also 127 Zoll, und folglich muß der Hebel, mit welchem die Schraube herum gedrehet wird, wenigstens 60 Zoll oder 5 Fuß lang seyn. Nun wird aber der Hebel zu schwach, weil doch eine viel grössere Kraft, als 80 Pfund, bey dem grossen Reiben der Schraube angewandt werden muß. Die Schrauben sind überdem viel kostbarer, als diese Maschine ist. Eine roh ausgearbeitete Stütze, eine glatt abgerundete Walze, ein schräge abgehendes Holz und zween eiserne Hebel machen hier alles aus. Ihren wichtigsten Vorzug giebt aber dieses, daß der Gebrauch der Schraube in einer etwas grossen Höhe ganz wegfällt.

Die genauere Theorie dieser Maschine nebst einigen Verbesserungen derselben, da insonderheit die unterliegende Fläche rund ausgeschnitten wird, findet man in zween Aufsätzen der Herren Sheldon und Polhem in den Abhandlungen der Schwedischen Akademie vom Jahr 1746. S. 45. f. f.

§. 44.

Ich habe schon oben §. 35. der Zusammensetzung der Schraube mit einem Rade oder der sogenannten Schraube ohne Ende überhaupt erwähnt, weil die Schraube in dieser Zusammensetzung sehr häufig vorkömmt und am brauchbarsten

barsten ist. Ich werde hier eine nähere Beurtheilung ihres sehr grossen Vermögens anstellen, und die Gründe zur Berechnung desselben angeben.

Es kömmt auch hier alles auf die Berechnung der Geschwindigkeiten aus dem Verhältniß derer Circul, mit denen sich Kraft und Last bewegen, und der Zahl der Umläufe an. Daß es bey beyden Maschinen, der Schraube sowol, als dem Rade, auf das Verhältniß der Geschwindigkeiten ankomme, ist an seinem Orte gewiesen worden, und in der Zusammensetzung ist es nicht anders bewandt. Gesetzt also, die Kurbel VD (Fig. 65.) sey viermal so weit, als die halbe Dicke der Axe CE, so bewegt sich die Kraft V in einem viermal grössern Circul, als derjenige ist, mit welchem sich die Last P aufwärts bewegt, indem sich das Seil aufwindet. Allein, ehe sich diese Axe einmal wendet, muß sich die Schraube so viel mal wenden, als viele Zähne das Rad AB hat. Diese Zahl ist in der Figur 25. Es muß sich also die Kraft in dem 4mal grössern Circul 25mal herum bewegen, ehe sich das Seil einmal aufwindet. Ihre Geschwindigkeit ist also hundertmal grösser, als die Geschwindigkeit der Last, und die Kraft kann daher, im Gleichgewicht zu der Last, wie 100 zu 1 seyn.

Man sieht hiebey genugsam ein, wie viel grösser das Vermögen einer so einfachen Maschine sey, als andrer, die eine eben so einfache Zusammensetzung haben, und wie geschwinde man durch Zusammensetzung mehrerer dergleichen Schrauben bis zu den größten Zahlen steigen könne, die man zum Verhältniß der Kraft und der Last wählt. Gesetzt, man wollte es bis auf das Verhältniß 3000 zu 1 treiben, so dürfte man nur statt der Kurbel VD ein Rad anbringen, demselben 30 Zähne geben, und dieses in eine zweyte Schraube ohne Ende mit ihrer Kurbel eingreifen lassen. Alsdann muß die Kurbel 30 $\times$ 25mal herum, ehe die Axe einmal herum kömmt. Die Kurbel sey wie vorhin, viermal so groß, als die halbe Dicke der Axe, so ist die ganze

Geschwindigkeit der Kraft 30 × 25 × 4mal grösser, als die von der Last, und so verhält sich auch ihr Vermögen.

Man braucht die Schraube ohne Ende da am liebsten, wo man eine sanfte Bewegung nöthig hat, welche man bey andern Maschinen nicht so leicht mäßigen würde. Denn die Bewegung dieses Werkzeuges hat, wenn es wohl ausgearbeitet ist, unter allen die größte Gleichförmigkeit, und erlaubt der an ihr wirkenden Kraft nicht stoßweise, wie wol bey andern Maschinen geschicht, fort zu arbeiten. Zugleich aber ist sie einem so starken Reiben unterworfen, daß dieses allein hinlänglich ist, die Maschine im Stillstande zu erhalten, auch wenn die Kraft auf sie zu wirken aufhört. Man braucht also die Schraube am Ende so wol, als die Schrauben überhaupt, vorzüglich, um andere Werkzeuge oder deren Theile so genau zu stellen, und zu ihrer Wirkung einzurichten, als es die Absichten derselben erfodern.

§. 45.

Die Zusammensetzung der Maschinen aus mehrern einfachen Werkzeugen ist einer solchen Mannigfaltigkeit fähig, daß sich dieselbe unmöglich erschöpfen läßt. Wenn wir mit der Schraube ohne Ende einen Flaschenzug verbinden, von welchem ein Kloben an der Last bevestigt ist, welche an einer schrägen Fläche sich herauf bewegt, so haben wir die größte Zahl verschiedener einfacher Werkzeuge vereint, um in einer Verbindung auf eine Last zu wirken, den Hebel, die Radwinde, die Rolle, die schräge Fläche und die Schraube. Fig. 87. Der Keil ist in der Zusammensetzung mit andern Maschinen zu unbrauchbar, um mit ihnen zu einem Zweck zu wirken. Er wird aber sehr oft bey einzelen Theilen derselben angewandt, um dieselben gehörig zu bevestigen, oder aus einander zu treiben, oder er giebt bey vielen Maschinen den Vorwurf ab, auf welchen dieselbe wirkt. Der zugespitzte Pfahl, den die Ramme in die Erde treibt, ist ein Keil. In den Oelmühlen werden Keile zum Auspressen des Oels

an

an die gestampften Oelkuchen geklemmt und durch die Mühle selbst eingepreßt.

§. 46.

Es ist nicht genug, wenn man Maschinen zu berechnen weiß, welche wir von andern schon in einem gewissen Verhältniß der Kraft zu der Last ausgeführt und fertig finden. Es wird nöthig seyn, durch einige Exempel zu zeigen, wie man unter der Voraussetzung einer gewissen Kraft und einer gewissen Last oder Widerstandes, der nicht durch ein einfaches Werkzeug gehoben werden kann, die Maschine aus mehrern einfachen Werkzeugen zusammen setzen könne, um den gesuchten Endzweck zu erhalten. Wir wollen zur Aufgabe eine Maschine setzen, durch welche ein Mensch in den Stand gesetzt werden soll, mit seiner Kraft eine Last von 2000 Pfunden aufzuwinden, und ihr eine etwas lange fortdaurende Bewegung zu geben. Wir wollen dabey zur Bedingung setzen, daß die Maschine aus nicht mehr als zwey, höchstens drey einfachen Werkzeugen bestehen solle.

Es kömmt hiebey sehr in Ueberlegung, auf welche Art der Mensch seine Kraft anwenden solle. Wir werden mehr von derselben erwarten können, wenn derselbe an einem Seil niederwärts zieht und mit seinem Gewichte, als wenn er mit Anstrengung seiner Muskeln wirkt. In dem letzten Fall werden 25 Pfund das höchste seyn, was man von ihm bey etwas lange fortgesetzter Arbeit erwarten kann. In dem ersten kann man ihm dreymal so viel zumuthen. Man würde ihm mehr anmuthen können, wenn nicht auch bey dem Anziehen des Seils die Muskeln mitwirken müßten. Allein wir wollen wegen des unvermeidlichen Reibens der Maschine, auf dessen Berechnung wir uns noch nicht einlassen können, für den ersten Fall nur 40, für den zweyten nur 16 Pfund Kraft dem Menschen beylegen, damit wir so viel gewisser die Maschine in Bewegung gesetzt sehen. In dem ersten Fall ist also das Verhältniß der Kraft zu der Last wie 1 zu 50, in dem zweyten wie 1 zu 125.

Wir

Wir wollen 1) mit zwey Rädern (Fig. 81.) die Maschine in dem ersten Verhältnisse einzurichten suchen. Der leichteste Weg dazu ist dieser. Man bestimmt zuförderst die Zahl der Zähne in dem ersten Rade und dem Getriebe des zweyten Rades. Jene sey 31, diese 5. Nun ist die Zahl der Umläufe des zweyten Rades $6\frac{1}{5}$, da mittlerweile das erste mit der Welle sich einmal wendet. Jetzt suche man den Quotienten der Zahl 50 durch $\frac{31}{5}$; er ist $\frac{250}{31}$. In diesem Verhältniß richte man die Durchmesser der Welle und des zweyten Rades ein; so ist die Geschwindigkeit der Kraft $\frac{31}{5} \times \frac{250}{31}$, das ist 50mal grösser, als die von der Last. Wer mit Zahlen und Maassen umzugehen weiß, wird bey dieser Einrichtung keine Schwierigkeit finden. Gesetzt, der Durchmesser der Welle sey ein Fuß, so ist der Durchmesser des zweyten Rades in dem Verhältnisse, 31 zu 150, 8 Fuß und beynahe $\frac{1}{2}$ Zoll. Wir würden diese Brüche vermeiden, wenn wir die Zahlen der Zähne so wählten, daß sie einander ohne Bruch dividirten. Allein die Ursache, warum wir es lieber so einrichten, ist schon oben §. 39. angeführt.

2) Soll der Mensch die Last durch eine Kurbel heben, in welchem Fall wir ihm nur 16 Pfund Kraft beygelegt haben, so werden wir dieses auf folgende Art sehr leicht erhalten: Durch diese beyden Räder wird das Verhältniß der Geschwindigkeiten, wie 1 zu 50. Hier muß es wie 1 zu 125, daß ist, die Geschwindigkeit muß $2\frac{1}{2}$mal grösser werden, wenn die Kraft 16 ist. Wir erhalten dieses, wenn wir dem zweyten Rade Zähne geben, und ein Getriebe mit einer Kurbel an dasselbe anbringen, von welchem sich die Halbmesser, wie 2 zu 5 verhalten.

3) Mit einer Kurbel, Rade und Flaschenzug (Fig. 82.) Man nehme einen Flaschenzug, der oben 3 und unten 2 Rollen, folglich 5 Seile hat. Die Kraft darf nur noch 400 Pfund seyn. Die Kraft, die man anwenden will, nämlich 16 Pfund, verhält sich hiegegen wie 1 : 25. Man gebe dem Getriebe 5 und dem Rade 26 Zähne, so ist die

Zahl

Zahl der Umläufe des Getriebes und der Kurbel gegen einen Umlauf des Rades $\frac{26}{5}$. Damit nun das Verhältniß 1 : 25 heraus komme, so dividire man 25 durch $\frac{26}{5}$. Der Quotient ist $\frac{125}{26}$ oder $4\frac{21}{26}$. Man gebe der Welle die halbe Dicke, welche sie haben muß, um 400 Pfund halten zu können, und rechne, um genauer zu verfahren, die halbe Dicke des Seils dazu, mache alsdenn die Kurbel $4\frac{21}{26}$mal weiter, so ist die Maschine auf den erfoderten Fall eingerichtet.

4) An einer schrägen Fläche mit einer Erdwinde. Hier können wir der Kraft 40 Pfund wegen des vortheilhaften Drucks (§. 28.) beylegen. Die Höhe der schrägen Fläche sey gegen deren Länge, wie 1 zu 10. Nun sind durch die Erdwinde noch 200 Pfund zu heben. Man gebe der Erdwinde einen Hebel, dessen Länge sich zu der halben Dicke der Welle, wie 5 zu 1 verhält, so ist die Geschwindigkeit der Kraft zu der Geschwindigkeit der Last wie 5 zu 1, und 40 Pfund Kraft halten 200 Pfund Last anhängend, und auf der schrägen Fläche, deren Höhe ein Zehntheil ihrer Länge ist, 2000 Pfunde.

5) Mit einer blossen Schraube. Hier wirkt die Kraft an dem Hebel auf eine vortheilhafte Art. Wir können sie also auf 40 Pfund rechnen, oder wegen des grossen Reibens sie auf 32 Pfund herunter setzen. Ihr Verhältniß ist also zum Gewicht, wie 1 zu $62\frac{1}{2}$. Man gebe also dem Schraubengang eine Höhe, die sich zu dem Umkreise wie 1 zu 12 verhält, und gebe dem Hebel eine Länge, an welchem die Kraft in einer Entfernung angreifen kann, die $5\frac{5}{24}$mal so groß, als die halbe Dicke der Schraube ist.

6) Mit einer Schraube ohne Ende. Man gebe dem Rade 40 Zähne und mache den Durchmesser der Kurbel $3\frac{1}{8}$ mal grösser, als die halbe Dicke der Welle; so ist die Geschwindigkeit der Kraft 125mal grösser als die von der Last, und folglich stehen 16 Pfund mit 2000 im Gleichgewicht. Allein, da die Dicke der Welle groß seyn muß, um 2000 Pfund tragen zu können, so muß auch das Rad sehr weit

werden,

werden, wenn die 40 Zähne nicht zu schwach werden sollen, und die Maschine wird sich nicht leicht zur Ausführung bringen lassen.

Man wird hieraus viele Gründe, die in der Einrichtung der Maschinen zu beobachten sind, einsehen. Sie sind aber unzulänglich ohne Zuziehung desjenigen, was der folgende Abschnitt näher lehren wird.

Fünfter Abschnitt.

Von denen Hindernissen, welche die Wirkung der Maschinen stören, und die Berechnung derselben schweerer machen.

§. 47.

Alle bisherige Berechnungen des Vermögens der Maschinen treffen nur in der Voraussetzung ein, daß die Maschinen sich in keinem ihrer Theile reiben, und die Versuche, welche man mit Modellen von dergleichen Werkzeugen anstellt, weichen alle von der Berechnung ab, treffen aber um so viel mehr mit derselben ein, je einfacher die Werkzeuge sind. Bey Waagen und Hebeln wird alles sehr genau mit den erläuterten Lehrsätzen übereinstimmen. Wenn man aber eine Radwinde zum Versuch braucht, deren Welle auf der Unterlage schweerer und mit einer grössern Fläche aufliegt, so wird, wenn gleich die Weite des Rades zu der Dicke der Axe in einem gewissen Verhältnisse steht, dennoch die Last und die Kraft in einem etwas geänderten Verhältnisse das Gleichgewicht einander halten. Jenes sey z. E. wie 9 zu 1, so muß das Reiben sehr schwach seyn, wenn nicht das Gleichgewicht noch zwischen einem Pfund Kraft und acht oder zehn Pfunden Last bestehen sollte.

Es würde zu voreilig seyn, auf diese Schwierigkeit zu achten, wenn man gleich Anfangs die mechanischen Gesetze

sich bekannt macht, da man sich lieber die Maschinen in einer grössern Vollkommenheit, als welche ihnen die Kunst geben kann, vorstellt, und untersucht, wie ohne Absicht auf diese Hindernisse das Verhältniß der Kräfte sey. Allein, man kann sich dieselbe nicht länger verbergen, wenn es zur Ausübung kömmt, und man würde die erwartete Wirkung nicht bey den Maschinen wahrnehmen, wenn man sie nach der Berechnung, welche die Theorie angiebt, genau schätzen wollte. Wenn wir z. E. eine Maschine so einrichten, daß die Kräfte genau hinlänglich sind, um eine gewisse Last zu heben, so wird es doch dem Menschen, wo nicht ganz an Kräften fehlen, dieselbe wirklich in Bewegung zu setzen, doch zu schweer werden, die Bewegung lange fort zu setzen. Denn wenn er gleich die Kräfte hat, welche die Berechnung der Maschine erfodert, so hat er doch nicht die, welche das beständige Reiben derselben zu heben nöthig sind. Es würde also die Mechanik alsdenn recht vollkommen werden, wenn man bey jeder Maschine genau angeben könnte, wie groß der Widerstand des Reibens an ihr sey, und wie viel Kraft folglich noch zu derjenigen hinzukommen müsse, welche die Theorie der Maschine erfodert, um die gesuchte Bewegung hervor zu bringen. Gesetzt z. E. eine Radwinde wäre so eingerichtet, daß mit 25 Pfund Kraft eine Last von 300 Pfunden gehalten werden könne, man wüßte aber zugleich, daß die mit diesem Gewicht beschweerte Maschine 15 Pfund Reibung habe, so wüßte man nun, daß, um die Last wirklich in Bewegung zu setzen, etwas mehr als 40 Pfund Kraft erfodert werden. Allein, so weit sind die Naturforscher noch nicht in ihren Untersuchungen gelangt, daß man hinlängliche Reguln herausgebracht hätte, nach welchen diese Sache in allen Fällen geschätzt werden könnte. Ich werde indessen das vornehmste und gewisseste, was die Erfahrungen der Neuern herausgebracht haben, hier anführen.

Anmerkung.

So unzufrieden der Mechanicus über die Hindernisse zu seyn Ursache hat, durch welche das Reiben die Berechnung der Maschinen stört, so nützlich ist doch dasselbe in andrer Absicht. Wir finden es eben so oft nöthig, Bewegungen zu stören und aufzuhalten, als dieselben hervor zu bringen. Wären die Oberflächen der Körper nicht rauh, so würden manche Bewegungen länger dauern, als wir es nach unsern Absichten wünschen, da der Widerstand der Luft nicht groß genug ist, um dieses, wenigstens nicht sehr geschwinde, zu thun. Manche Bewegung würde grösser werden, als wir es wollen, oder ihre Richtung nicht so leicht ändern lassen, wenn sie doch von Zeit zu Zeit geändert werden muß. Welche Beschwerde macht es uns nicht, und wie vieler Gefahr sind wir nicht ausgesetzt, wenn wir auf einem glatten Boden, auf dem Eise oder sonst gehen. Der Fuß eilt immer zu sehr dem Körper voraus, nicht als wenn in dem Eise etwas wäre, das ihn vorwärts triebe, sondern weil die Hinderniß zu sehr geschwächt ist, welche die Bewegung sonst aufzuhalten pflegt, in welcher er nach dem oben erläuterten Naturgesetze von selbst fortgeht, nachdem sie ihm einmal eingedruckt ist. Wir würden die Schrauben zu vielen Absichten nicht gebrauchen können, in welchen wir sie mit Nutzen anwenden, wenn das Reiben bey ihnen nicht so stark wäre, daß alle Kraft des durch die Schraube gepreßten Körpers sie nicht aus dem Stande zurück treiben kann, in welchen man sie einmal gesetzt hat. Eben durch das Reiben schleifen wir die Körper zu allerley Figuren ab, und geben ihnen eine Schneide, Schärfe und Politur nach unsern verschiedenen Absichten. Bloß das Reiben des Mühlsteins ist die Kraft, die wir anwenden, um das Korn durch denselben zu zermalmen.

§. 48.

Es ist durch die Erfahrung ausgemacht, daß das Reiben hauptsächlich von der Schweere des Körpers abhänge, welcher über die Fläche eines andern bewegt werden soll. Es ist zu viel gesagt, wenn man behauptet, es hänge einzig und allein von der Schweere ab, die Flächen, welche sich an einander reiben, mögen so groß oder so klein seyn, wie sie wollen. Amontons, ein Franzose, glaubte dieses in

seinen

seinen Untersuchungen zu finden, die er zuerst über diese Sache anstellte. Desaguliers suchte es durch ein ziemlich kostbares Werkzeug zu bestätigen, das er in der vierten Anmerkung zur vierten Lection seiner Experimental-Physik beschreibt, welches aber in denen Versuchen, die man damit anstellen kann, und die ich selbst häufig damit gemacht habe, seiner Angabe sich nicht gemäß beweiset.

Man kann ohne weitläuftige Zurüstung das Reiben eines einzelen Körpers auf dieser oder jener Fläche erfahren, wenn man die Fläche AB (Fig. 84.) horizontal stellt, den Körper C darauf legt, an denselben einen Faden hängt, der über eine Rolle geschlagen die Waagschale E von bekanntem Gewichte trägt, welche man allmählig mit kleinen Gewichten so lange beschweert, bis der Körper C dem Zuge nachgiebt. Nun vergleiche man das Gewicht des Körpers C mit dem in E anhängendem Gewichte. Es wird, wenn die Fläche und der Körper von einerley Materie sind, von einem Drittheil des Gewichts des Körpers nicht sehr abweichen. Es betrage aber mehr oder weniger, so entdeckt es den ganzen durch das Reiben verursachten Widerstand. Denn man kann nicht sagen, daß die Schweere des Körpers C an sich die horizontale Bewegung desselben hindre, da es für sie gleichgeltend ist, welchen Ort der Körper C auf der horizontalen Fläche einnehme; auch nicht, daß es die Kraft der Trägheit thue, vermöge welcher der Körper C der Bewegung zwar eine Weile, aber nicht lange, widerstehen kann, wie er denn wirklich bey sehr glatter Fläche einem sehr schwachen Zuge bald nachgeben würde. Allein, bey diesen Versuchen kömmt das Reiben der Rolle mit ins Spiel, welches von dem Reiben des Körpers unterschieden ist, aber in dem Versuche nicht unterschieden werden kann.

Folgender Versuch ist daher weit richtiger und genauer. Man lasse sich eine oder mehrere glatte Flächen von Holz oder Metall ausarbeiten, welche man in jeden Winkel gegen den Horizont allgemach stellen kann, welchen Winkel

man genau erforschen muß. Man lege, indem sie noch horizontal liegt, den Körper, dessen Reibung man untersuchen will, auf die Fläche, und wende nun dieselbe allgemach in die Höhe. Wenn kein Reiben wäre, so müßte derselbe, so bald die Fläche nur etwas schräge zu liegen kömmt, schon an derselben herabgleiten, weil sein Schweerpunct nun der Erde schon näher kommen kann, s. §. 22. S. 57. und Fig. 25. Allein, dieß wird nicht geschehen, bevor die Fläche einen merklich grossen Winkel mit dem Horizont macht. Bis dahin wird also der Körper bloß durch das Reiben zurück gehalten, als wenn ihn eine andre Kraft, so wie oben §. 33. erklärt worden, zurück hielte. Weiß man, wie groß diese Kraft seyn müßte, so weiß man auch, wie stark das Reiben sey. Man erfährt dieses auf folgende Weise: Sobald der Körper zu gleiten anfängt, so bevestige man die Fläche auf eine oder die andre Art in ihrer Lage und untersuche den Winkel, den sie mit dem Horizont macht, oder unmittelbar das Verhältniß von dem Sinus dieses Winkels gegen den Radius auf folgende Art. Man beschreibe (Fig. 85.) einen halben Circul auf einem dünnen Brettgen, mit einem Durchmesser AB, dem man 100 oder 1000 Theile von einem beliebigen Maaßstabe giebt. An das eine Ende bevestige man einen zarten Faden mit einem Bleyloth C. Den Durchmesser dieses Circuls lege man an die schräge Fläche. Wo nun dieser Faden den Circul schneidet, da hat man allemal einen rechten Winkel ADB in dem halben Circul und eine alsdenn horizontale Linie DB. AD wird nunmehr der Sinus des Winkels der Schräge ABD und AB der Radius. Nun messe man AD nach eben dem Maaßstabe, von welchem AB 1000 Theile hat, so hat man das Verhältniß der Kraft des Reibens, welche den Körper bisher auf der schrägen Fläche erhalten hat, zu dessen Gewichte sehr genau. §. 33.

Man kann überhaupt bey schon ganz verfertigten Maschinen den Widerstand des Reibens dadurch erforschen,

wenn man auf beyden Seiten die zum Gleichgewicht nöthige Kraft und Last anhängt, und wenn die Maschine so steht, allgemach Gewichte zu der Kraft anhängt, bis sie in Bewegung gesetzt zu werden anfängt. Allein, man erfährt dadurch nur das Reiben derselben bey einem bestimmten Gewicht, welches sie beschweert, und in anfangender Bewegung; bey einer grössern oder kleinern Last und bey veränderter und gemehrter Geschwindigkeit wird es sich anders verhalten. Will man das Reiben der Maschine in sich selbst wissen, so muß man gar keine Last anhängen, sondern nur an dem Punct, auf welchen die Kraft wirkt, Gewichte anhängen, so lange bis sie endlich die Maschine in Bewegung setzen.

Die fleißigsten und sorgfältigsten Versuche über diese Sache sind von dem berühmten Mußchenbrock angestellt. Er bediente sich dazu eines Werkzeugs, dem er die Benennung Tribometer oder Reibemaaß gab, welches die 86ste Figur darstellt. Es besteht in einem Cylinder, der im Verhältniß der stählernen Zapfen, die ihn tragen, sehr dick ist. Die Zapfen haben Absätze, daß man sie bald mit dem kleinern bald mit dem dickern Theile auf Pfannen, die man gleichfalls verändern kann, auflegen könne. Ueber die grosse Welle werden Gewichte A und B gehängt, die sie gegen die Axe drücken, und ein andres C wird allmählig so lange verstärkt, bis es den Cylinder in Bewegung setzt. Seine Einrichtung dient also hauptsächlich, das Verhältniß der Kraft des Reibens bey einem gewissen Gewicht, das die Axen beschweert, und bey einer gewissen Entfernung der Kraft von dem Mittelpunct zu erforschen, und daraus die zusammen gesetzten Maschinen zu beurtheilen.

§. 49.

So wenig alle diese Versuche hinlänglich sind, uns zu der Berechnung des Reibens, welche doch zur genauen Berechnung des wahren Vermögens der Maschinen so nütz-

lich seyn würde, zu leiten, so bestätigen sie doch überhaupt folgende Wahrheiten, welche für die practische Mechanik überaus wichtig sind.

1) Das Reiben richtet sich am meisten nach der Grösse des Drucks, mit welchem die Theile der Maschinen gegen einander, oder gegen ihre Unterlagen drücken. Daraus folgt, daß das Reiben bey denen Maschinen, die der Kraft einen grossen Vortheil geben, immer schwächer an denen Theilen sey, die der Kraft am nächsten liegen, und von der Last am wenigsten gedruckt werden. Bey der zusammengesetzten Maschine, (Fig. 87.) die ich §. 45. beschrieben habe, ist das Reiben nothwendig am stärksten auf der schrägen Fläche, welche die Last mit ihrem vollen Gewicht drückt. Allein diese drückt nun schon ein jedes der Seile weit schwächer auf die Rollen des Flaschenzuges, wieder schwächer auf die Axe des Rades, und endlich vollends schwach auf die Gänge der Schraube ohne Ende. Allein, die Summe aller dieser Reibungen, welche der Zug der Last an allen den verschiedenen Theilen der Maschine verursacht, mit derjenigen, die diese Theile an sich selbst durch ihr eignes Gewicht haben, wird überhaupt grösser, als sie seyn würde, wenn die Maschine weniger Theile hätte, und die Kraft, so geringe sie auch in Vergleichung der Last seyn mag, muß in einem grössern Verhältniß verstärkt werden, um die Last in Bewegung zu setzen, als es nöthig seyn würde, wenn eben diese Kraft an einer minder zusammengesetzten Maschine gegen eben die Last wirkte. Man wird daher immer dahin zu sehen haben, daß man die Wirkung, die man von einer Kraft erhalten will, durch die einfachste Maschine zu wege bringe, die man in Betracht der übrigen Umstände einrichten kann. Was man daher durch ein Rad ausrichten kann, thue man nicht durch zwey Räder. Man häufe nicht die Zahl der Rollen, die bey einer zu oft veränderten Richtung des Zuges nöthig wird, und man verändere daher diese nicht ohne Noth, sondern lasse das Seil, das man an die Last

bevesti-

bevestigen muß, in dem geradesten Zuge, der nur möglich ist, auf dieselbe wirken.

2) Die Körper reiben sich am stärksten an einander, welche von einer Materie sind. Es ist leicht, die Ursache davon einzusehen. Die Erhebungen und Vertiefungen derselben sind sich ähnlicher, als bey Körpern von verschiedener Materie und Zusammensetzung, sie dringen daher tiefer in einander ein, und müssen näher an ihrem Grunde, wo sie stärker sind, gebogen oder abgebrochen werden, wenn die vorgesetzte Bewegung erfolgen soll. Wir werden dieses durch die schon oben §. 16. angewandte Vergleichung mit zwo Sägen, die mit ihren Zacken in einander gepaßt und alsdenn einander entgegen bewegt werden, erläutern können. Man nehme zwo Sägen oder Feilen, deren Zähne oder Zacken ungleich groß sind; so wird es schweerer seyn, dieselben in einander zu fügen, und viel leichter, die eine der andern entgegen zu bewegen, als wenn dieselben von einer Figur und Grösse sind. Je mehr sie einander unähnlich sind, desto weniger dringen sie in einander, und eben so wird es sich bey den auf einander reibenden Flächen verhalten. Dieß muß nun freylich die Erfahrung ausmachen, da die erwähnten Rauhigkeiten der Körper viel zu klein sind, als daß man sie durch das Gesicht wahrnehmen und beurtheilen könnte. Musschenbrock fand durch die Erfahrung an seiner Maschine, daß der Stahl sich auf dem Meßing am wenigsten riebe, und, wenn die Axe mit Oel geschmiert war, betrug das Reiben nur $\frac{1}{7}$ des aufliegenden Gewichts. Bey dem Stahl in Stahl und so gar auch im Zinn und Pockholz betrug es $\frac{1}{4}$, im Kupfer aber nur $\frac{1}{5}$ desselben. Da man dieses überhaupt bey den Maschinen lange bemerkt hat, so wird ein verständiger Arbeiter niemals die Axen derselben in Pfannen von einerley Materie mit den Axen legen. Diese Versuche aber zeigen, daß das Meßing das vorzüglichste bey stählernen Axen sey.

3) Das Reiben wird grösser, je geschwinder die Bewegung des einen Körpers unter oder über dem andern ist. Man weiß dieses aus der Erfahrung, wenn man Körper an einander schleift. Man wird auch bey starkem Drucke wenig ausrichten, wenn man den zu schleifenden Körper sehr langsam über den Schleifstein fortstreift, oder diesen sehr langsam unter jenem dreht. Je geschwinder sich also die Maschine bewegen soll, desto mehr Kraft wird wegen des Reibens erfodert, und muß von der Kraft, welche die Bewegung hervorbringt, abgerechnet werden. Allein, die Erfahrungen, welche Mußchenbrock darüber angestellt hat, haben ihm, wie er selbst gesteht, zu wenig Gewißheit gegeben, um einigermassen das Verhältniß des Reibens gegen die Geschwindigkeit vestsetzen zu können. Er ermahnt vielmehr §. 523. seiner Physik nach der neuesten lateinischen Ausgabe, dieser Sache besser nachzuforschen, da er bey seinem hohen Alter nicht hoffen könne, dieselbe so weit auszuführen, als er wol wünsche.

4) Allein die Kraft vermag um so viel mehr gegen das Reiben, je mehr sie überhaupt zur Bewegung der Maschine durch ihre Entfernung von dem Bewegungspunct vermag. Man setze, die Welle A (Fig. 88.) des Rades liege mit einem grossen Theil ihrer Fläche in einer holen Pfanne C, so ist die Reibung an allen Puncten ihrer Fläche als ein Widerstand anzusehen, den die Kraft überwinden muß, und gegen den sie um so viel mehr vermag, je grösser ihre Entfernung von dem Mittelpunct des Rades in Vergleichung der Entfernung der geriebenen Puncte ist. Dieses Verhältniß der Entfernungen wird desto grösser, je weiter das Rad ist, oder da dieses nicht seyn kann, ohne daß das Rad schweerer und dadurch das Reiben stärker würde, so ist es besser, die Axe so dünne zu machen, als es die Umstände erlauben. Hätte z. E. die Welle A einen Zapfen, der nur den vierten Theil von der Dicke der Welle hätte, wie es der innere Circul anzeigt, so wäre die Kraft viermal so

mächtig

mächtig gegen das Reiben, als sie es nun ist. Es ist also eine Hauptregul für die practische Mechanik, daß man die Axen oder Zapfen der Instrumente so dünne, als es nur möglich ist, und sie dagegen von der härtesten Materie mache, welche man dazu finden kann. Aus diesem Grunde sind an Fuhrwerken grosse Räder vortheilhafter als kleine, bey einerley Dicke der Achsen. Denn die Kraft, mit welcher das auf dem Erdboden aufliegende Rad herum geführt wird, vermag mehr bey jenem im Verhältniß des Reibens, als bey diesem, weil sie in einer grössern Entfernung wirkt. Eben daher sind grössere Rollen besser als kleine, wobey es am besten ist, den Zapfen in der Scheibe der Rolle zu bevestigen, daß er sich mit derselben herum bewegen könne.

5) Das Reiben wird gemindert, wenn ein flüßiger und insonderheit fetter Körper zwischen die sich reibenden Flächen gebracht wird. Die tägliche Erfahrung beweiset dieses hinlänglich, und die Ursache ist leicht einzusehen. Denn die Feuchtigkeit füllt die Vertiefungen guten Theils aus, und hindert, weil doch eine jede Feuchtigkeit sich zwar wegpressen, aber da, wo sie liegt, nicht zusammendrucken läßt, das zu tiefe Eindringen der Körper in einander. Eine zweyte wenigstens wahrscheinliche Ursache ist diese: Die fetten Körper bestehen muthmaßlich aus runden Theilchen, welche bey der Bewegung der Körper über einander unter denselben weggleiten, und hier in gewissem Maasse die Dienste thun, welche bey Fortwälzung schweerer und grosser Körper die Walzen leisten. Allein, die Erfahrung zeigt auch hier einen merklichen Unterschied, und man wählt am besten zwischen dem Holze zähere und minder flüßige Arten von Fett, als Seife und Fett von Thieren, zwischen Metallen aber Oel, und zwar bey dünnen Axen sehr flüßige, bey dickern zähere Arten. Leinöl hat einen merklichen Vorzug, weil es nicht leicht zähe und steif wird. Ueberhaupt aber vermischen sich diese Dinge bey lange fortdauerndem Reiben nach und nach mit den abgetriebnen Theilchen, und machen

mit ihnen einen Teig oder Art von Leim, welcher die Körper in ihrer Bewegung mehr aufhält, als daß er dieselbe erleichterte. Sonst hat dieses Schmieren der sich auf einander reibenden Körper auch den Nutzen, daß es die aus dem zu heftigen Reiben hölzerner Körper oft entstehende Entzündung verhütet.

6) Was wir von dem Weggleiten der Körper über den rufiden Theilchen des dazwischen geschmierten Fettes angemerkt haben, läßt sich auch ohne dasselbe gewissermassen dadurch nachahmen, wenn man die Zapfen der zu bewegenden Maschine auf eine bewegliche Unterlage legt. Man erhält dieses am besten, wenn man sie in den Winckel legt, den die Umkreise zweyer Räder von gleicher Grösse mit einander machen, deren Mittelpuncte in einer horizontalen Linie etwan um $\frac{2}{3}$ ihres Durchmessers von einander entfernt liegen, und sich, so wie die Zapfen der Maschine sich über ihnen wälzen, unter denselben herum bewegen. Diese ihre Bewegung wird um so viel leichter, je grösser diese Räder im Verhältniß ihrer Axen sind. Es kann dieses so gar ein Mittel werden, das Reiben bis ins unendlich kleine zu vermindern. Denn man stelle sich die Axe A (Fig. 88.) vor, welche auf den Rädern CC liegt, deren Durchmesser 10mal grösser ist, als der von den Axen EE, so läßt sich berechnen, daß das Reiben an den Axen EE dieser Räder nur noch $\frac{1}{10}$ von dem Reiben der ersten Axe sey. Man lege diese Axen EE zwischen vier andern Rädern DDDD, deren Durchmesser ebenfalls 10mal grösser als die von ihren Axen sind, so wird das Reiben an diesen Axen noch 10mal kleiner und folglich nur $\frac{1}{100}$ von dem, was es bey der Axe A betrug. Allein, die Durchmesser der Axen so zu proportioniren, müssen die letzten Axen sehr zart gemacht werden, da sie doch vereint das halbe Gewicht der Maschine, die an der Axe A haftet, tragen sollen. Es läßt sich also dieser Vorschlag nicht bey grossen und schweeren Maschinen anwenden. Ich erinnere mich eines in Obersachsen gemachten Versuches, die

Zapfen

Zapfen der Mühlenräder zwischen solchen zwo Scheiben zu legen, wodurch Anfangs die Mühlräder eine sehr leichte Bewegung bekamen. Allein nach wenig Tagen waren die Axen dieser kleinen Scheiben so verbogen, und alles so verdorben, daß man bald alles wieder auf die alte Art einrichten mußte.

7) Wenn Körper sich nicht über die Fläche eines andern Körpers beständig in einer Richtung fortwälzen, sondern nur hin und wieder wälzen sollen, so vermindert man das Reiben derselben fast gänzlich, wenn man sie in eine Schärfe bildet, mit welcher die Axe auf ihrer Unterlage sich hin und wieder wendet. Denn dieses kann sie ohne Hinderung von den unterliegenden Erhebungen der Grundlage thun. Man bildet auf diese Art die Zapfen der Waagen sowol, auf welchen der Waagebalken ruht, als die, an welchen die Waageschalen eingehangen werden. Allein man kann diesen Vortheil nicht nutzen, wenn die Axe sich um mehr als ein Viertheil eines Circuls oder gar ganz herum wenden muß. In diesem Fall vermindert man wenigstens das, was die grössere Fläche zum Reiben beyträgt, dadurch sehr, wenn man dieselbe auf die Schärfe eines doppelten Kegels von harter Materie legt, oder dem Loch, in welchen sie sich herum bewegt, unten und an den Seiten eine solche Schärfe giebt.

§. 50.

Das Reiben wird dadurch sehr vermehrt, wo ein so genanntes Klemmen zugleich Statt hat, da entweder die Maschine nicht Raum genug hat sich zu wenden, und also von ihrer Unterlage oder Einfassung viele Theile zerstören muß, um Raum zur Bewegung zu gewinnen, oder wo sie gegen zween Körper in solcher verschiedenen Richtung gedrängt wird, daß der Bewegung, welche einer derselben ihr erlaubt, die andre entgegen druckt. Dieß findet sich unter andern bey den Stampfern vieler Mühlen, welche, indem sie von der Mühlenwelle gehoben werden, zugleich oben und

unten gegen die Widerlagen, welche sie in der perpendicularen Stellung zu halten dienen sollen, gedruckt werden. Diese Klemmung kann so groß werden, daß eine ungeheuer grosse Kraft nicht anders als mit Zerstörung des ganzen Werks dieselbe bewegen kann.

Ein sehr schädliches Reiben ist auch dasjenige, welches sich findet, wenn die Theile der Maschinen bey der ihnen eignen Wendung sich einander wenigstens für eine Weile entgegen bewegen. Dieser Umstand zeigt sich bey den Zähnen fast aller Räder und Getriebe oder Trillinge. Allein, hier kömmt auch die schiefe Richtung in Betrachtung, von welcher ich bald besonders handeln werde.

Ueberhaupt hat das Reiben bey den Maschinen nicht bloß in dem Fall statt, wo dieselben von aufliegenden Gewichten gedruckt werden, und in so fern ihr eignes Gewicht sie gegen ihre Unterlagen druckt, da man überhaupt bey rohe ausgearbeiteten Theilen der Maschinen ein Drittheil des aufliegenden Gewichtes rechnen kann. Es findet sich überhaupt, wo die Theile der Maschinen gegen einander mit einer gewissen Kraft drucken oder stossen, auch selbst da, wo ein beynahe frey hängender oder sich bewegender Körper die Fläche eines andern Körpers berührt. Selbst die flüßigen Körper reiben sich auf diese Art an den innern Wänden derer Röhren, durch welche sie in den Wasserkünsten getrieben werden.

Wenn eine Kraft gegen ein Gewicht zieht, so vermehrt der Druck dieser Kraft eben so sehr das Reiben, als der Druck des Gewichts selbst. Man hänge z. E. ein Gewicht von 50 Pfunden an einem Seil über eine Rolle, so gehört eben so viel Kraft dazu, dieses Gewicht zu halten, und die Rolle wird mit 100 Pfund gedrückt. Nimmt man das Reiben zu einem Drittheil des aufliegenden Gewichts an, so müßte die Kraft noch $33\frac{1}{3}$ Pfund stärker werden. Allein, die Rolle sey achtmal so weit, als ihr Zapfen dick ist, so darf man nur $\frac{1}{8}$ von $33\frac{1}{3}$, das $4\frac{1}{6}$ Pfund Kraft für das Reiben

Reiben rechnen. Mit so viel stärkerm Druck wird die Rolle gepreßt, wovon man abermals $\frac{1}{8}$ würde berechnen und zu der Kraft hinzu thun müssen. Man sieht wol, daß dieses in eine geometrische Reihe hinein führen würde, wenn man das Reiben ganz genau berechnen wollte. Allein, wir dürfen hier nicht in diese Kleinigkeiten gehen.

Anmerkung.

Man hat aus allen diesen Wahrnehmungen Regeln gezogen, wie bey den Maschinen das Reiben sich berechnen lasse, die nur in so fern zuverläßig sind, als die Erfahrungen, auf welche sie sich gründen, es sind. Allein, da ich hier wenig anders thun können, als bessre Schriftsteller ausschreiben, so will ich, um nicht mein Buch ohne Noth zu vergrössern, hauptsächlich auf Belidors Architecture Hydraulique B. 1 Cap. 2. verweisen, als ein Buch, das durch die Uebersetzung in unserm Deutschland gemein genug geworden ist. Hiezu läßt sich eine practische Abhandlung des Herrn Polhems in den Abhandlungen der schwedischen Akademie im IIten Bande S. 183. ff. der deutschen Uebersetzung fügen.

§. 51.

Eine andere sehr nachtheilige Hinderniß setzt der Bewegung der Maschinen die Steifigkeit der Seile entgegen, welche sich mit denselben bewegen müssen. Wir sehen hier nicht auf das Reiben derselben an denen Theilen der Maschinen, welche sich mit denselben herum bewegen. Dieses ist hier sehr unerheblich, beträgt aber ungemein viel, wenn dieselben sich nicht mit dem Seile herum bewegen können. Es ist bekannt, daß man bloß durch ein etliche mal um einen Pfahl geschlagenes Seil ein Schiff gegen den stärksten Strom aufhalten kann. Das wenige mal um die Spille geschlagene Ankerseil klemmt sich stark genug an derselben an, daß das einige tausend Pfunde schweere Anker bloß dadurch gehalten werden kann. Bey der Aufwindung grosser Lasten beugt man den Unfällen, die daraus entstehen könnten, wenn die Arbeiter das Seil entwischen liessen, dadurch glücklich

vor,

vor, wenn man das abgewundene Seil sich einige mal um einen vesten Körper, welcher der Maschine nahe ist, schlingen läßt. Um sich diese Wirkung bey dem Seil deutlich zu machen, die von seiner Steifigkeit herrührt, so stelle man sich einen Haken vor, dessen Krümmung mit dem Circul einer Rolle überein käme, welche derselbe umfaßt. (Fig. 89.) So beweglich diese Rolle ist, so wird doch dieser Haken dieselbe nicht herum bringen können, man ziehe daran, so stark man wolle. Denn er druckt mit allen Puncten seiner unbiegsamen Krümmung die Rolle bloß in einer Richtung nach unten zu. Allein, er sey biegsam, so wird zwar der Punct C dem Zuge nachgeben können, der ihn niederwärts zieht, allein, es wird doch einige Kraft darauf verwandt werden müssen, diesen Haken zu biegen, daß jeder seiner Puncte dem Zuge der Hand folgen könne. Es wird um so viel mehr Kraft angewandt werden müssen, je vester die Theile des Hakens zusammen halten, und je krümmer derselbe ist. Denn um so viel mehr gehört dazu, ihn aus seiner krummen Figur in die geradelinichte zu bringen. Wenn wir als einen solchen biegsamen Haken das Seil ansehen, welches mit der Rolle bewegt werden soll, so ist es klar, daß die Kraft ausser dem Widerstand, den die Last und das Reiben der Bewegung entgegen setzen, auch noch denjenigen zu überwinden habe, den das Seil der beständigen Veränderung seiner Figur entgegen setzt. Hiezu wird um so viel mehr gehören, je vester das Seil theils überhaupt ist, theils je grösser die Gewalt ist, mit welcher es in dieser krummen Figur erhalten wird. Daher ist

1) der Widerstand um so viel stärker, je dicker, je neuer oder je vester das Seil gewunden, oder durch eine gewisse Zubereitung unbiegsam gemacht ist. Man muß also bey Maschinen, die starke Seile erfodern, mehr auf diesen Widerstand rechnen, als bey den übrigen.

2) Es ist stärker, wenn die Rundung der Maschine kleiner, als wenn sie grösser ist. Denn es gehört mehr dazu,

es aus der engen Krümmung, die es hat, in eine gerade Linie zu bringen, in welche es sich doch legen muß, wenn eine Bewegung der Maschine erfolgen soll, als aus einer weitern, die sich der geraden Linie schon mehr nähert. Dieses ist ein Grund, warum die gar zu dünnen Wellen bey Maschinen, die schweere Lasten zu heben dienen sollen, endlich unnütz werden, und man oft genöthigt ist, lieber sie nicht so dünne zu machen, ungeachtet die Kraft dabey zu gewinnen scheint, als man es bey der Vestigkeit, die die Materie derselben hat, sonst wagen dürfte. Die Seile brechen auch überdem um so viel eher, je enger sie um solche dünne Wellen gewunden sind. Bey einer hiesigen Bauunternehmung, wo den ganzen Tag gerammt werden mußte, verbrannten dem Uebernehmer dieses Baues seine neuen Seile, an denen der Rammkloß gehoben wurde, jedesmal in wenig Tagen so, daß sie ganz unbrauchbar wurden. Aber die Rolle, worüber das Seil ging, war von Pockholz, und hatte deswegen nicht über einen Fuß im Diameter. Ich rieth ihm, eine andre Rolle von 2 Fuß Diameter anzubringen, die deswegen von ausgesuchtem Eichenholz gemacht ward. Als dieses geschehen war, hielten seine Seile mehrere Monate bey gleich starker Arbeit aus.

3) Es gehört mehr Gewalt dazu, das Seil zu biegen, wenn es von grösserem, als wenn es von geringerem Gewicht gezogen wird. Die Welle kann sich nicht biegen, ohne daß auf der einen Seite das Seil in dem Maasse an die Rolle gedruckt und gekrümmt werde, wie auf der andern Seite die Kraft V dasselbe gerade zieht. Jene Kraft strebt also das Seil in seiner Krümmung zu erhalten, und die Bewegung der Maschine zu hindern, und dieses mit so viel mehrerer Gewalt, je schweerer sie zieht.

Alle diese Dinge sind in Betrachtung zu ziehen, wenn man den Widerstand von der Krümmung der Seile einigermassen schätzen will. Doch würde es zu viel behauptet seyn, wenn man annähme, daß sie sich nach diesen Umständen in

ganz

ganz genauem Verhältnisse richtete. Die Versuche und Untersuchungen des Amontons und Desaguliers, die sich in dieser Sache grosse Mühe gegeben, haben hierinn keine gewisse Reguln an den Tag gebracht. Uns ist es genug, diesen nachtheiligen Widerstand so weit zu kennen, als es nöthig ist, um denselben überhaupt in dem Gebrauch der Maschinen in Betrachtung zu ziehen, und auf denselben um so viel mehr zu rechnen, je stärkere Seile wir anwenden müssen, und je schweerere Lasten wir durch dieselben bewegen wollen. Denn wir können diese Seile nicht so genau beurtheilen, wie stark sie gewunden seyn, wie sorgfältig der Hanf gehechelt sey, (ein Umstand, der die Seile ungleich biegsamer macht) und wie sehr sie bey einer grössern oder kleinern Krümmung widerstehen.

4) Es kömmt noch ein Umstand hinzu, der bey den Seilen die Steifigkeit oft sehr vermehrt, und den wir weniger, als alles andre, einer genauen Schätzung unterwerfen können. Eine jede Feuchtigkeit, insonderheit die von der Luft, macht die Fasern der Seile mit einer Gewalt aufschwellend, und windet sie aus, preßt sie aber zugleich so viel stärker an einander, daß sie der Biegung noch in weit grösserm Maasse, als ohne dieses, widerstehen. Man kann dieses oft mit Vortheil anwenden, um eine Bewegung grosser Lasten zu befördern, wenn die Seile etwa nicht mehr dem Zuge nachgeben wollen. Eine Erzählung, die ich nur aus dem Gedächtnisse anführen kann, wird dieses erklären. Als auf Befehl des Pabstes Sixtus V. der Obeliskus in Rom gehoben werden sollte, waren die Seile an den Maschinen so weit angezogen, daß man nichts weiter damit zur Bewegung der Last gewinnen konnte. Es fehlten noch wenige Zolle, um welche die Last gehoben werden sollte, und da man dieses nicht konnte, war jedermann äusserst verlegen. Eine alte Frau, die an dem Gehäge stand, welches man, um die Arbeiter von aller Störung frey zu halten, um den Platz gemacht hatte, konnte ungeachtet des scharfen Verbots, daß

kein

kein Mensch ein Wort während der Arbeit reden sollte, mit dem guten Rath, der ihr einfiel, nicht zurück halten. Sie rief überlaut, man solle die Seile naß machen. Man that es, und sie zogen sich so viel an, als nöthig war, um die ungeheure Last bis zu dem Punct zu heben, auf welchen man sie bringen wollte.

§. 52.

Man kann indessen folgende Reguln, welche Amontons durch seine Erfahrnngen heraus gebracht zu haben glaubte, als hinlänglich zu einer ungefähren Berechnung des Widerstandes der Seile annehmen.

1) Dieser Widerstand, in so ferne er durch den Zug des Gewichts verursacht wird, nimmt zu, wie die Gewichte, die das Seil ziehen.

2) In so fern ihn die Dicke des Seils verursacht, nimmt er zu, wie diese Dicke.

3) So weit es auf die Grösse der Rolle ankömmt, wird er kleiner, je weiter der Halbmesser der Rolle ist, und nimmt zu, je kleiner derselbe ist.

Weil man aber doch für einen gegebenen Fall den Belauf dieses Widerstandes wissen muß, um ihn daraus für andre Fälle zu berechnen, so kann man eine Erfahrung zum Grunde legen, welche eben diesen Mann zum Urheber hat: Wenn ein Seil eine Linie dick über einen Cylinder, einen Zoll dick, hängt und ein Gewicht von einem Pfunde trägt, so ist der Widerstand von dem Seil ein Loth oder $\frac{1}{32}$ des Gewichts

Gesetzt also, man hätte ein Gewicht von 128 Pfunden, das an einem Seile 6 Linien dick über einer Rolle von 8 Zoll im Durchmesser hinge, so würde man die Berechnung auf folgende Art machen können: 128 Pfund verursachen einen Widerstand von so vielen Lothen oder 4 Pfunden. Weil das Seil 6 Linien dick ist, so multiplicire man dieses durch 6, und es beträgt 24 Pfund. Allein, die Rolle ist 8 Zoll weit. Man hat also nur $\frac{1}{8}$ zu rechnen, und dieses giebt 3 Pfunde.

Ausser diesem aber sind folgende Reguln als sehr nützlich in der Ausübung zu beobachten.

1) Je geschwinder sich das Seil bey der Bewegung der Maschine biegen muß, desto mehr widersteht dasselbe. Wenn daher in zusammengesetzten Maschinen sich eine Rolle mit dem Seil geschwinder bewegt, als eine andre thut, so ist der Widerstand, der von den Seilen herrührt, bey jener stärker, als bey dieser, wenn die Seile gleich dick, auch die Kraft, mit welcher sie gezogen werden, und die Rollen gleich sind. In dem Gebrauch der Flaschenzüge mit Anwendung starker Seile, entsteht ein Nachtheil auf umgekehrte Weise, welchem nicht abzuhelfen ist. Das Seil, welches über die erste der der Kraft nächste Rolle geht, wird zwar am geschwindesten gespannt, und widersteht der Kraft am meisten. Aber dagegen ist es der Kraft am nächsten, und folgt derselben zuerst, die folgenden Seile später und später. Wenn nun bey einem Flaschenzuge von vier oder fünf Rollen in jedem Kloben das Seil durch die Kraft schon verschiedene Fusse fortgewunden ist, so liegt das Seil an und mit der letzten Rolle noch unverrückt und der Kloben mit der Last noch unbewegt. Wenn endlich die Wirkung der Kraft auch auf diesen letzten Theil des Seils wirkt, so zieht zuletzt ein Kloben sich gewaltsam gegen den andern, bis der Grad der Spannung durch das ganze Seil ungefähr gleich wird, und die Last rückt mit einem Satze fort, steht denn aber wieder stille, bis dasselbe Spiel wiederholt ist. Ich habe dieß bey dem Aufwinden grosser Schiffe auf den Zimmerwerft vermittelst der Erdwinden und Flaschenzüge bemerkt, die deswegen nicht schleifend, wie sie doch sollten, durch gleichförmige Arbeit der Kraft, sondern sprungweise an der schrägen Fläche, über den sogenannten Hillen heraufrücken.

2) Wenn man gewiß ist, daß ein Seil die daran ziehende Last halten kann, so thut man sehr wohl, wenn man dasselbe nicht zum Ueberfluß stärker nimmt, weil sich mit der Dicke des Seils der Widerstand desselben vermehrt.

3) Neue

3) Neue Seile widerstehen viel mehr, als alte, und tragen dadurch viel zur Vergrösserung des Widerstandes bey, daß sie, ehe sie sich krümmen, vor der Rolle oder Welle sich hinauswärts biegen, und die Last weiter von dem Mittelpunct entfernen, als sie entfernt seyn würde, wenn sich das Seil sogleich scharf an die Rolle anlegt. Sie brechen auch leichter, wenn man sie gleich Anfangs mit aller Last, die sie tragen können, beschweert, und man muß sie daher lieber allgemach mit wenigerm Gewichte geschlank zu machen suchen, und sie deswegen an andern Maschinen Anfangs brauchen, wo sie nicht viel auszuhalten haben.

§. 53.

Bey der Wirkung der Maschinen muß auch der Widerstand der Luft in Betrachtung gezogen werden. Man bemerkt denselben bey jeder Bewegung und zwar um so viel mehr, je schneller dieselben sind, oder je grösser die Fläche ist, welcher die Luft ihren Widerstand entgegen setzen kann. Der Grund davon läßt sich sehr deutlich einsehen. Man stelle sich den Körper A (Fig. 90.) vor, welcher durch den Raum BCDE, der mit Lufttheilchen angefüllt ist, in einer gewissen Zeit sich fortbewegt. Alle diese Theilchen müssen von ihm aus der Stelle gebracht werden, und so leicht sie weichen, so thun sie dieses nicht ohne einigen Widerstand, weil ein jeder wenn gleich noch so leichter Körper, der in Ruhe ist, der Bewegung widersteht. Man sieht dabey leicht ein, daß, wenn dieser Körper A gleich noch viel länger wäre, er doch nicht mehr Lufttheilchen aus ihrer Stelle treiben würde, sondern daß dieses auf die Grösse der Fläche ankomme, mit welcher dieser viereckte Körper der Luft entgegen sich fortbewegt. Doch wenn man auch diese Seite desselben in eine Spitze CBF ausbildete, und ihm nun dieselbe Dicke liesse, so würde es den Widerstand der Luft nicht vergrössern, weil doch der Raum CFBEGD nicht grösser als das Viereck CBED ist, und in dem einen nicht mehr

Lufttheilchen, als in dem andern, befindlich sind. Es kömmt also hauptsächlich auf den Durchmesser des Theils an, welcher sich der Luft entgegen bewegt. Allein man lasse eben diesen Körper in eben der Zeit sich durch den doppelt so grossen Raum CBHI bewegen; so muß er nicht nur zweymal so viel Lufttheilchen, sondern auch jeden derselben zweymal so geschwinde aus der Stelle bewegen. Hieraus läßt sich schliessen, daß der Widerstand der Luft bey doppelter Geschwindigkeit viermal, bey dreyfacher Geschwindigkeit neunmal grösser u. s. f. werden müsse.

Es kömmt ein zweyter Umstand hinzu. Die Theile der Luft hängen theils mit sich selbst, wiewol schwach, zusammen, theils haften sie an der Fläche des durch sie hin bewegten Körpers ein wenig, und dieser Zusammenhang muß, so wie die Bewegung fortgeht, aufgehoben werden. Man kann sich die Sache so vorstellen, als wenn der Körper an einer Menge zarter Bänder hinge, welche durch den ihm beygebrachten Stoß zerrissen werden müssen. Dieses kömmt mit dem Reiben derer Körper, die man über einen solchen Körper bewegt, überein. Weil man aber die Stärke des Zusammenhangs der Theile der Luft nicht genau bestimmen kann, so läßt sich die Grösse dieses Widerstandes noch weniger, als desjenigen, welcher aus dem Reiben entsteht, genau schätzen.

Auch dieses kömmt in Betrachtung, daß die Theile der Luft, welche vor dem Körper her aus ihrem Orte verdrängt werden, in dem sie umgebenden Raum, der überall von Luft voll ist, nicht so leicht ausweichen können, als wenn derselbe an den Seiten her leer wäre. Freylich wird hinter dem Körper ein Raum leer, in welchen sich die Luft, durch ihre eigne Federkraft getrieben, so gleich ergießt. Allein, es vergeht doch eine wenn gleich noch so kleine Zeit, ehe dieses geschehen kann, und mitlerweile widerstehen die nächsten Lufttheilchen den aus ihrer Stelle getriebenen mit einer gewissen Kraft, die die Bewegung des Körpers ein wenig mehr aufhält.

Anmer-

Anmerkung.

Alle diese Umstände kommen auch bey der Bewegung eines Körpers durch die dichtern flüßigen Körper, das Wasser, u. a. m. vor. Der Widerstand derselben rührt aus eben diesen Gründen her, und ist aus denselben zu beurtheilen. Hier haben wir nicht darauf zu sehen, da wir noch nicht von denen Maschinen reden, welche in dem Wasser und durch das Wasser, sondern nur bloß von denen, die in beschlossener oder freyer Luft bewegt werden.

Ich habe in diesen Erläuterungen die Luft in dem Zustande der Ruhe angenommen, wie sie in einem beschlossenen Raum, wo die meisten Maschinen bewegt werden, sich immer annehmen läßt. Allein, wenn dieselbe für sich eine Bewegung hat, ohne welche die freye Luft fast nimmer ist, so kann diese, je nachdem die Richtung derselben beschaffen ist, der Bewegung des Körpers entweder noch mehr hinderlich, oder auch beförderlich seyn.

Man wird durch diese Erläuterungen bestättigt finden, was oben §. 3. angemerkt ist, daß der Druck der Luft keinesweges, wie die Alten glaubten, die Ursache von der Fortsetzung derjenigen Bewegung seyn könne, in welche die Körper durch irgend eine äussere Ursache gesetzt sind. Denn man räume ein, daß der Strom der Luft, mit welchem sie sich hinter dem bewegten Körper zusammen schließt, etwas zur Bewegung desselben mit beytragen könne, so sieht man doch dabey deutlich ein, daß die übrigen Ursachen mehr zur Störung der Bewegung, als diese zur Beförderung derselben, beytragen. Dieses erhellt um so viel mehr daraus: da jene Ursachen sowol, als diese, im Verhältniß der Fläche wirken müßten, so zeigt sich doch, daß eben, je grösser die Fläche der Körper ist, desto mehr die Hinderniß, welche die Luft der Bewegung derselben entgegen setzt, zunehme.

§. 54.

Wir haben schon oben §. 41. der Ungleichheit in der Kraft erwähnt, mit welcher die Kurbeln und andre ähnliche Theile der Maschinen wirken, durch welche man andern damit verbundenen Theilen eine wiederkehrende Bewegung giebt. Da wir hier umständlicher von der Sache, als von einer grossen Hinderniß an der Regelmäßigkeit der Maschine reden

müssen, so stelle man sich (Fig. 91.) ein Rad mit dem Circul ABD vor, welches sich mit der Kurbel CE um den Mittelpunct C bewegt, auf deren Endpunct E eine Stange EG drückt, deren Ende E mit der Kurbel herum geführt werden soll. Das Gewicht dieser Stange und des damit verbundenen Theils der Maschine, welcher zum Exempel der Sägerahm einer Sägemühle seyn mag, und den Widerstand, den dieselben der Bewegung entgegen setzen, wollen wir uns als ein Gewicht P vorstellen, welches beständig den Punct E in perpendicularer Richtung niederwärts zieht. Die Kraft, welche auf das Rad in der Richtung DV wirkt, muß in der Lage der Kurbel CE zu diesem Gewicht das bestimmte Verhältniß CE zu CD haben. Man setze, sie sey grösser, als in diesem Verhältniß, und also stark genug, um das Gewicht P zu heben, und die Kurbel in die Lage Ce zu bringen, so ist klar, daß der Widerstand nun seine wahre Entfernung von dem Mittelpunct C verändert habe. Sie ist jetzo nur CF. Die Kraft in D könnte also nun in dem Verhältnisse kleiner seyn, als vorhin, in welchem CF kleiner ist, als CE. Sie wird endlich, wenn die Kurbel in die Lage C*e* kömmt, gar keinen Widerstand von dem Druck des Gewichts zu überwinden haben, weil dasselbe nun gerade auf den Mittelpunct C, aber nicht mehr der Kraft entgegen, drückt. Indessen bleibe diese Kraft eben dieselbe; so ist es klar, daß dieselbe immer mehr zur Bewegung der ganzen Maschine vermögen, und ihre Geschwindigkeit fort und fort beschleunigen werde, bis die Kurbel über den Punct C hinaus geführt wird. Hier müssen wir die Vorstellung eines den Punct E ziehenden Gewichts verlassen, welches nun der Kraft zum Vortheil ziehen würde. So ist es nicht mit denen Maschinen bewandt, bey welchen auch die widerkehrende Bewegung der Stange eG einen gewissen Widerstand der bewegenden Kraft entgegen setzt, welcher in dem Verhältniß zunimmt, in welchem die perpendiculare Entfernung von dem Mittelpunct C anwächst. Auf diese

Art nimmt der Widerstand der Maschine, die durch die Kurbel in Bewegung gesetzt werden soll, in jedem Circul, den sie beschreibt, zweymal ab und zu, und da man keine Kraft in der Natur finden kann, welche in gleichem Maasse ihre Wirkung änderte, so haben die Maschinen von dieser Art notwendig eine sehr ungleiche bald schlotternde bald stockende Bewegung. Ich werde hier einige Erfindungen erläutern, durch welche man ihnen diesen Mangel zu benehmen, und die Wirkung oder Bewegung gleichförmig zu machen gesucht hat.

Eines der bekanntesten sind die Schwungräder, das ist Scheiben oder Schwengel, welche man an eben derselben Welle, die das Rad und die Kurbel herumführt, bevestigt, und sie in eben die Bewegung setzen läßt, welche jene haben. Man weiß, daß ein jeder in die Runde bewegter Körper, wenn er beständig auf eben die Art gegen den Mittelpunct gehalten wird, die angenommene Bewegung vermöge der oben §. 12. erklärten Centralkräfte eine lange Zeit fortsetze, und daß allemal eine gewisse Kraft dazu gehöre, um ihm diese zu nehmen. Räder, die in einander eingreifen, verhalten sich zwar eben so, allein der Widerstand, den sie gegen einander ausüben, macht die angenommene Bewegung bald stocken. Dieses Schwungrad aber, von welchem die 92ste Figur die gewöhnlichsten beyden Arten, wie sie ausgebildet werden, zeigt, muß so angebracht werden, daß es keinen andern Widerstand gegen sich hat, als den Widerstand der Luft, welcher doch fast ganz aus der Acht gelassen werden kann. Alsdenn nimmt es durch das Herumdrehen eine gewisse Bewegung an, und setzt dieselbe, auch wenn die Maschine stocken will, mit solcher Gewalt fort, daß die übrigen Theile der Maschine ihr folgen müssen. Dieses ist leicht einzusehen, und daher findet man die Schwungräder bey sehr vielen Maschinen ohne weitere Beurtheilung, ob sie nützlich oder schädlich seyn, und wie sie eingerichtet werden müssen, um recht nützlich zu seyn, angebracht.

gebracht. Ich muß aber meinen Lesern, welche hierin mit mehrerer Gewißheit und Gründlichkeit verfahren wollen, folgendes zu bedenken geben:

1) Die Schwungräder beschweeren durch sich selbst eine jede Maschine, bey welcher sie angebracht werden. Wenn das Mühlenrad und Welle ohne Schweere seyn könnten, so würde die bewegende Kraft des Wassers, oder des Windes, weit mehr auf sie vermögen. Beschweert man nun aber noch die Welle, oder welcher Theil der Maschine es auch sey, mit einem schweeren Schwungrade, so wird die Kraft so viel mehr dadurch gestört und aufgehalten. Auf der andern Seite aber muß das Schwungrad recht schweer gemacht werden, wenn man Dienste von ihm haben will, und die Kraft von dessen eigenthümlicher Bewegung vermag nur alsdann etwas auf die Maschine, wenn es eine verhältnißmäßig grosse Schweere hat.

2) Das Schwungrad leistet um so viel mehr, je geschwinder es geht. Ist die Bewegung langsam, so wird der anfangende Schwung des Rades von Zeit zu Zeit durch das Reiben der Maschine wieder aufgehalten, und das Schwungrad dient zu nichts, als die Maschine zu beschweeren.

3) Wenn die Maschine einen gleichförmigen Gang hat, so ist kein Schwungrad nöthig. Keine Maschine also, bey welcher das Hauptwerk eine Schraube ist, die einen gleichförmigen und dabey sehr langsamen Gang hat, läßt sich durch ein Schwungrad bessern.

4) Bey den mehresten Maschinen dient das schweere Wasserrad, oder der Mühlenflügel, schon selbst als ein Schwungrad, so daß diesem durch Hinzusetzung eines solchen, wenn es nicht ungemein schweer ist, kein Vortheil in der Bewegung geschafft werden würde.

5) Das Schwungrad kann eben so sehr zur Aufhaltung des Ganges der Maschine, als zur Beförderung desselben dienen. Denn ein jeder Körper, der in die Runde herum geschwungen wird, nimmt eine gewisse Bewegung an, eben

wie

wie ein Körper, der an einem Faden aufgehangen ist, eine gewisse Zeit braucht, um sich hin und her zu schwingen. Diese Zeit ist länger, und folglich die Bewegung langsamer, wenn die Entfernung von dem Mittelpunct der Bewegung grösser ist, und kürzer, wenn diese kleiner ist. Macht man das Schwungrad oder die Stangen, welche die schweeren Kolben in demselben tragen, zu groß, so kann die Bewegung desselben langsamer, als die von der Maschine, werden, und diese wird nur dadurch aufgehalten. Man hat dieses in der That zur Absicht bey einigen Maschinen. Unsere bekannten Bratenwender haben oben ein Schwungrad. Nimmt man dieses ab, so wird die Maschine mit grossem Rasseln, durch den zu starken Zug des Gewichts oder der Feder, ablaufen. Das Schwungrad aber, welches hier ausdrücklich zu groß im Durchmesser gemacht ist, leidet nur eine Bewegung von gewisser Geschwindigkeit. Der Zug des Gewichtes an der Maschine kann zwar derselben etwas hinzusetzen, und es bewegt sich in der That so geschwinde, daß man diese Bewegung nicht mit blossem Auge verfolgen kann. Allein es kann sie nimmer so stark machen, daß es so oft herumkäme, als die Spindel, an welcher es steckt, ohne eben dieses Schwungrad sich bewegen würde. Es wird also nicht nur die Maschine, sondern auch das Gewicht oder die Feder in ihrer Bewegung aufgehalten. Allein bey den meisten Maschinen ist dies nicht die Absicht, sondern man will ein Schwungrad haben, daß sich eben so bewege, wie die Maschine für sich sich bewegen würde, wenn kein Stocken und keine ungleiche Kraft oder Widerstand bey ihr Statt hätte. Um hierinn gewiß zu gehen, muß man freylich die Theorie von den schwingenden Körpern überhaupt zu Rathe ziehen, wie in Polhems Abhandlung von den Schwungrädern, (Abhandlungen der Schwed. Academie Th. 4. S. 150 ff.) wiewol etwas zu unvollständig, geschehen ist. Allein, da diese zu viel voraussetzt, so wird es genug seyn, nachstehende aus derselben herge-

hergeleitete Regul ohne Beweis herzusetzen: Man untersuche, wie geschwinde die Welle, an welcher das Schwungrad angebracht werden soll, sich herumwende. Wenn man dieses weiß, so untersuche man (oder lasse sich von einem, der die Sache versteht, belehren) wie groß die Länge eines Penduls sey, welches in eben dieser Zeit, in welcher sich die Welle wendet, einmal hin und wieder schlägt. Diese Länge nehme man zur Entfernung des Mittelpuncts der Axe und der Kolben des Schwungrades an, wenn die Stangen, welche dieselben tragen, nicht gar zu dick und für sich sehr schweer sind. Sind die Stangen aber sehr stark, so müssen sie noch etwas weiter von einander abstehen. Man fände z. E., daß die Welle in einer Secunde einmal herum käme, alsdenn müßte der Halbmesser des Schwungrades 9 Zoll 2 Linien seyn. Denn ein Pendul, welches 9 Zoll 2 Linien lang ist, schwingt sich in einer Secunde Zeit natürlich in einem Cirkel herum. Wird dieses beobachtet, so kann man gewiß seyn, daß des Schwungrades Bewegung mit der Bewegung der Maschine genau genug übereinstimmt. Ist es weiter, als es nach dieser Regul seyn sollte, so hält es gewiß die Maschine auf. Ist es kleiner, so würde es, um seine volle Schwungkraft zu bekommen, geschwinder gehen müssen, als die Maschine dasselbe herum führt. Allein man müßte, um davon einigen Vortheil zu ziehen, demselben eine ungeheure Schweere bey grossen Maschinen geben, und auf der andern Seite das Reiben nur so viel ärger machen. Ich werde unten im neunten Abschnitte noch Gelegenheit nehmen, einige für die practische Mechanik nützliche Anmerkungen und Folgerungen aus der Theorie der Penduln und der Schwingungen beyzufügen.

§. 55.

Man hat indessen viele Mittel ersonnen, selbst diese Ungleichheit der Wirkung, insonderheit wenn sie aus dem wiederkehrenden Gange entsteht, wo nicht ganz aufzuheben, doch

doch der Gleichheit so nahe, als möglich, zu bringen. Eines von diesen hat Sturm in seiner Mühlenbaukunst angegeben, wiewol man schon in älteren Büchern ähnliche Erfindungen antrifft. Die 93ste Figur bildet diese Einrichtung ab. A ist ein Getriebe oder Trilling, welches, wenn es vollständig wäre, 12 Zähne oder Stöcke haben müßte, hier aber nur deren fünfe hat. Die Stange BC ist an einem Rahmen bevestigt, der auf beyden Seiten sechs Zähne hat, welche auf folgende Art wechselsweise in die Stöcke des Getriebes A eingreifen. Der Zahn D liegt an dem Zahn E, und treibt bey circulairer Bewegung des Getriebes denselben herunterwärts. Wenn sich dieser auslöset, greifen die folgenden in einander ein, bis der letzte Zahn des Getriebes zwischen dem fünften und sechsten Zahn des Rahmens an dieser Seite eingreift. Alsdann aber ist dieses Getriebs in eine solche Lage, wie unten in der Figur punctirt ausgedruckt ist, gebracht, daß nun der Zahn D schon den obersten Zahn an der rechten Seite angreift, denselben aufwärts treibt, und so fortan die folgenden vier Zähne mit dem ganzen Rahmen und der Stange aufwärts bewegt werden.

Es ist gewiß, daß diese Einrichtung grosse Vortheile verspricht, weil hier die Kraft einen beynahe immer gleichen Widerstand gegen sich hat, sowol, wenn das Getriebe die Stange aufwärts, als wenn es sie niederwärts bewegt. Indessen finden sich doch in der Ausführung Hindernisse, wodurch sie weniger, als man denken mögte, nützlich wird. Denn bey der Kurbel wird die Stange unmerklich aus einer Bewegung in die andere wiederkehrend gesetzt. Hier aber muß sie auf einmal, wenn sie die Bewegung nach oben angenommen hat, wieder herunter gedruckt werden, und ehe sie diesem neuen Druck nachgiebt, stockt die Maschine jedesmal eine Weile. Man kann sich auch von einem Schwungrade nicht viel Hülfe zur Hebung dieses Ungemachs versprechen.

Besser ist die bey den Hamburgischen Wasserkünsten beobachtete Einrichtung. (Fig. 94.) Hier trägt die Welle des Wasserrades in der einen, und in einer andern die Welle eines vorgelegten Werks zween halbe Trillinge, deren jeder in die Zähne einer Pumpstange eingreift, da mittlerweile die andere von ihrem Trillinge frey ist. Beyde Pumpstangen aber sind durch eine starke Kette mit einander verbunden, welche oben über eine Rolle geschlagen ist. Wenn daher die eine von ihrem Trillinge niedergedruckt wird, so zieht sie bey ihrer Bewegung die andere durch die Kette in die Höhe. Ist jene tief genug gedrückt, so kömmt mittlerweile der zweyte Trilling so weit herum, daß er in die Zähne der andern Pumpstange eingreift, und diese nieder, die erste aber, welche nun wieder von ihrem Trilling frey geworden ist, wieder in die Höhe zieht. Man hat hier, um das Reiben und Schleifen der Stöcke des Getriebes und der Zähne der Stangen zu mindern, die Stöcke aus hohlen Cylindern von Metall gemacht, welche sich um das eingeschlossene Holz wälzen. Allein der Vortheil davon ist nicht so groß, als man wol glauben mögte, indem sich diese Cylinder dennoch an den Zähnen abstossen, und bald auf einer Seite platt schleifen, so daß sie sich nicht mehr mit dem Umgange der Maschine wälzen. Will man hievon rechten Vortheil haben, so müssen die inwendig versteckten Stöcke oft durch neue ersetzt werden, ehe sie sich weit abgeschliffen haben, und die metallenen Cylinder zu willig und mit einem gewissen Schlottern sich um sie wenden.

Indessen ist diese Einrichtung derjenigen weit vorzuziehen, welche Belidor (Archit. Hydraul. Liv. 3. Chap. 4. §. 980.) angiebt, und die 95ste Figur darstellet, da die eine Stange durch ein besonderes Gewichte in die Höhe gezogen wird, so bald sie von ihrem Getriebe frey wird, die andere aber von einem schweeren Gewicht, das oben an derselben bevestigt ist, niedergedruckt wird. Wie natürlich hätte es dem Erfinder einfallen müssen, lieber die Pumpstangen selbst in

Ver-

Verbindung mit einander zu setzen. Allein es ist ein merkwürdiges Exempel, wie die vorzüglichsten Erfindungen von einem Lande zum andern oft unbekannt bleiben, und man sich aus Mangel der Kenntniß noch lange mit überflüßigen Künsteleyen behilft.

Man hat bey andern Werken statt des Getriebes eine ovale Scheibe anzubringen versucht, welche bey ihrer Wendung den darauf drückenden Körper, wenn ihr längerer Durchmesser unter denselben kömmt, in die Höhe hebt, und wenn der kürzere sich dahin wendet, ihn wieder sinken läßt. Allein diese haben ebenfalls die Unbequemlichkeit, daß sie der Kraft eine sehr ungleiche Wirkung geben, und dienen in keinem andern Fall, als wenn der Körper schweer genug ist, um sein eigenes Gewicht wieder hinab zu senken. Denn die Maschine selbst kann nichts beytragen, ihn, wenn irgend ein Widerstand ihn zurück hält, wieder herunter zu ziehen. Man sehe die 96ste Figur.

Wenn mit einem Rade und Kurbel zwey Werke in Bewegung zu setzen sind, so biegt man die Kurbel in einen gedoppelten Winkel, (Fig. 97.) und nennt sie einen gekröpften Haken. Man kann, wenn die Maschine Kraft genug hat, eine dritte Krümme auf eben die Art anbringen, und drey Maschinen zugleich in Bewegung setzen. Wollte man hier die Haken oder Kurbeln in einer Fläche einander entgegen setzen, so würden beyde zugleich mit dem größten und mit dem kleinsten Widerstande arbeiten. Sind also zween Haken da, so müssen diese einen rechten Winkel, sind drey da, so müssen sie einen Winkel von 120 Graden mit einander machen. Auf diese Art vertheilt sich der Widerstand so auf den ganzen gekröpften Haken, daß die Bewegung der Maschine ziemlich gleichförmig wird, und dieselbe für jeden Augenblick mit einer nicht gar grossen Ungleichheit arbeitet.

Wenn

Wenn die Maschine vermittelst der Kurbel durch Menschen-Kräfte in Bewegung gesetzt werden soll, so giebt es ähnliche Schwierigkeiten, derselben eine gleichförmige Wirkung und Bewegung zu geben, welche ich schon oben § 20. und 28. erwähnt habe, weil ich diesen Umstand als ein Exempel von der ungleichen Wirkung der Kraft nutzen mußte. Um dem Mangel einigermaassen abzuhelfen, muß man auf die Art verfahren, welche ich jetzt eben bey dem gekröpften Haken bemerkt habe. Wenn nemlich der Widerstand der Maschine groß genug ist, daß man zween Menschen dabey arbeiten lassen muß, so bevestigt man an jedem Ende der Welle eine Kurbel, doch in solcher Lage, daß die Flächen, in welcher sich die zween Arme der Kurbel befinden, wenn man sie durch die Axe der Welle in Gelenken fortsetzt, einen stumpfen Winkel mit einander machen; (Fig. 98.) so daß, indem der eine Arbeiter seine Kurbel von sich stößt, der andre die seinige schon um etwas gehoben hat, und wenn der erste niederdrückt, dieser schon von sich stößt. Auf diese Art wird die vereinte Wirkung von den Kräften beyder Arbeiter beynahe in einer Gleichheit erhalten. Desagüliers führt aus der Erfahrung an, daß auf diese Art zween Menschen leichter 70 Pfund, als ein Mensch 30 Pfund aufwinden. Dieses erhält man nicht, wenn man beyde Kurbeln nach einer Linie einander entgegen stellt, wie dieses bey manchen Maschinen aus Unverstand also eingerichtet ist. Denn nun kommen beyde Kurbeln zugleich in die Lage, da der eine Arbeiter auf die vortheilhafteste Art an sich zieht, und der andre von sich drückt, und die Kraft ist die stärkste, da die eine Kurbel zu oberst, die andre zu unterst ist. Wenn aber beyde Kurbeln in horizontaler Lage zugleich sind, so müssen beyde Arbeiter zugleich die Lage der Hand verwandeln, einer, um den Zug in einen Druck zu verändern, und die Maschine müßte, wenn sie nicht schon in einen gewissen Schwung gebracht wäre, für eine Weile ganz stocken.

§. 56.

§. 56.

Ein schädlicher Umstand, der die Gleichförmigkeit der Wirkung aller Maschinen, bey denen Zähne und Getriebe in einander eingreifen, stört, ist dieser: daß sie nicht auf einerley Art gegen einander wirken, sondern anfangs in einer schrägen Richtung gegen einander stossen, wie die 99ste Figur zeigt, bald senkrecht und nach der Linie, die beyder ihre Circul berührt, dann aber wieder, ehe sie sich verlassen, schräge auf einander drucken. Die Maschine muß daher, wenn die Zähne zuerst gegen einander stossen, schweerer, dann leichter, und bald wieder schweerer gehen. Man fühlt auch, wenn eine solche Maschine sich mit Händen bewegen läßt, diese Ungleichheit in der Bewegung so merklich, und das Ohr hört es zugleich an dem beständigen Knattern und Rasseln der Maschine, indem die Zähne gegen einander schlagen, daß ich nichts weiter zum Beweise dieser mechanischen Schwierigkeit anführen darf.

Dieses Hinderniß der Gleichförmigkeit der Maschinen zu vermeiden ist unmöglich. Sie zu vermindern ist nicht so schweer, und läßt sich durch folgende Wege erhalten:

1) Man sieht leicht ein, daß es auf die Figur der Zähne, der Räder und der Getriebe sehr ankömmt. Wenn alle Zähne und Stäbe eckicht wären, so müßten sie sich weit ärger gegen einander stossen und drängen, als nun, da man sie rund macht. Wenn man indessen der Sache ein Genüge gethan zu haben glaubt, da man sie cirkelrund macht, so schließt man zu voreilig. Dieß kann man schon daraus abnehmen, da man wahrnimmt, daß die cirkelrunden metallenen Zähne und Stäbe der Maschinen sich bey fortwährendem Gebrauch derselben in eine andere Form ausschleifen, bey welcher die Maschine viel williger als zu Anfange geht, weil sich die Flächen der Zähne alsdenn in der Bewegung mehr über einander wegwälzen, als daß sie sich an einander wegschieben sollten. Ob man nun gleich von jeder Maschine es erwarten könnte, daß ihre Zähne in fortdaurendem Gebrauch

brauch etwas von dieser für sie schicklicheren Figur annehmen werden, so ist es doch besser gethan, ihnen diese von Anfang an zu geben, und sie ihnen vollkommner zu geben, als sie durch das Reiben und Schleifen jemals werden kann. Wie ist aber diese Figur mit Zuverläßigkeit auszumachen? Dieß ist schon am Ende des vorigen Jahrhunderts von den beyden Mathematikern Römer und Delahire geschehen. Sie haben erwiesen, daß man dazu diejenige Linie nehmen müsse, von welcher man sich ohne Schwierigkeit eine Vorstellung auf folgende Art machen kann: Man bevestige eine Circulscheibe von Pappe, Holz oder Metall auf einem Tisch oder Pappe. Nun lege man eine andre Circulscheibe an diese, bezeichne den Punct, mit welchem sie einander berühren, rolle alsdann diesen Circul um den vestgelegten, doch ohne ihn jemals vergleiten zu lassen, und bemerke hier und dort auf der untergelegten Pappe den Weg dieses Punctes, bis er wieder auf den vestliegenden Circul zurückkömmt. Man ziehe durch diese Puncte mechanisch eine krumme Linie, die sie alle verbindet, und man wird eine Linie sehen, die eine schärfere Ründung hat, als ein Circul. Wenn man beyden Scheiben feine Zähne, aber mit genau gleichen Weiten, giebt, durch welche das Vergleiten in dem Herumführen der äussern Scheibe verhindert wird; so ist es vollends leicht, mit hinlänglicher Genauigkeit diese Linie für den Gebrauch, den sie in der Mechanik hat, zu bezeichnen.

Diese Linie hat einen schrecklich langen Namen. Sie heißt die Epicykloide. Doch was thut der Name zur Sache? Billig sollten vorlängst alle Zähne und Stäbe der Maschinen nach dieser Figur ausgearbeitet worden seyn, und die Practiker sollten die Theoretiker nicht so gar alle ihre Mühe verlieren lassen, wenn sie so nützliche Dinge an den Tag bringen, als diese Erfindung ist. Indessen ist mir bis jetzo nur ein einziges Beyspiel aus Herrn Hofrath Kästners Mechanik §. 76. im 2ten Theil der Anfangsgründe bekannt, daß diese Erfindung practisch angewandt worden sey.

2) Die-

2) Dieser Nachtheil äussert sich am meisten, wenn die Räder und Getriebe wenige und grosse Zähne haben. Man meidet ihn, wenn man beyden so viel Zähne giebt, als sie nach Beschaffenheit des Drucks, den sie auszustehen haben, und nach der Grösse derer Circul, in denen sie stehen, bekommen können. Dieß läßt sich freylich nicht so, wie man wollte, zwingen, am wenigsten bey denen Getrieben, deren Circul oft sehr klein ist, und deren Zähnen man dennoch eine grosse Stärke theils wegen des Widerstandes geben muß, den sie aushalten sollen, theils weil sie denen Zähnen des Rades, in welche sie eingreifen, gleich seyn müssen, die man doch bey einer sehr schweeren Gewalt, die sie auszustehen haben, nicht zu klein und schwach machen kann. Daher wird es nicht immer möglich, einem Getriebe mehr als sieben Zähne zu geben. Man kann es indessen als eine Hauptregul in der practischen Mechanik vestsetzen, daß kein Getriebe weniger als fünf Zähne, und kein Trilling weniger als sechs Stäbe haben müsse. Ein Getriebe mit vier, ja gar drey Zähnen ist ganz unbrauchbar, und ist man ja dazu genöthigt, so ist es besser, wo irgends andre Umstände und die Lage der Theile der Maschine es erlauben, eine Schraube ohne Ende statt des Getriebes anzubringen. Man wird in diese Verlegenheit am meisten bey denen Theilen der Maschinen gesetzt, welche der Last am nächsten sind, und eine grosse Gewalt von derselben auszuhalten haben. Bey deren entferntern Theilen ist es leichter, die Getriebe von einem grossen Umfange zu machen, und ihnen so viel Zähne, als man will, zu geben, oder die Zähne des Rades schwach zu machen, damit man desto mehr Zähne in das eingreifende kleine Getriebe bringen könne. Man wird sich hier auch oft dadurch helfen können, wenn man das erste Getriebe grösser macht, und ihm viele Zähne giebt. Man verliehrt dadurch freylich an der Geschwindigkeit der Umläufe, und folglich an der Kraft des damit verbundenen Rades. Allein man kann den Vortheil, den man hier auf-

aufgiebt, bey dem zweyten oder dritten Rade wieder gewinnen.

3) Wenn die Maschine bey ihrer übrigen Einrichtung ein Schwungrad leidet, so ist dieses auch hier zuweilen vortheilhaft, und hilft dem Stocken der Maschine, das sonst hieraus in mehrerem oder wenigerm Maasse erfolgen muß, sehr ab, wenn es verständig zugerichtet ist.

Siebender Abschnitt.

Beurtheilung derer Kräfte, die zur Bewegung der Maschinen angewandt werden.

§. 57.

Wir haben bisher keiner andern Kräfte, die zur Bewegung der Maschinen dienlich wären, erwähnt, als der Gewichte und der menschlichen Kräfte. In der Erläuterung der ersten Gründe der Mechanik sind diese die brauchbarsten. Jene, weil sie sich so sehr genau bestimmen lassen; diese, weil sie auf so mancherley Art nach unserm Willkühr und Absichten sich verändern lassen. Allein, wenn es zur Ausübung kömmt, so sind jene nur für wenig Fälle brauchbar, und diese sind theils zu lange fortwährender Arbeit untauglich, oder durch den Lohn, den sie erfodern, zu kostbar. Man wendet daher die Kräfte so vieler theils belebter, theils lebloser Körper bey den Maschinen an, und es gehört viel Einsicht dazu, sie theils gehörig zu wählen, theils auf eine solche Art anzuwenden, daß sie die Absichten der Maschine gehörig erfüllen können. Ich werde hier in möglichster Kürze die Gründe der für diese Fälle nöthigen Ueberlegungen auszuführen suchen, welche nur einigermaassen zur Bewegung der Maschinen angewandt werden können. Ich werde dabey die Art, wie sie wirken und ihre Wirkung ändern, erläutern. Dieß wird mich auf viele Dinge führen, die man sonst nur in der Naturlehre abzuhandeln pflegt. Allein

man

man wird schon wissen, wie sehr auch dergleichen Wahrheiten in meinen Entwurf gehören. Ich werde zuerst von den Kräften belebter und hernach von den Kräften lebloser Körper handeln.

Jene sind Kräfte der Menschen oder der Thiere. Diese sind überaus mannigfaltig, und je mehr man die mechanischen Erfindungen erweitert, desto mehrerley Körper wendet man zur Hervorbringung der Bewegungen an. Die bekanntesten sind das Wasser, die Luft, das Feuer, die Dünste, die federhaften Körper, und überhaupt alle Körper, in so ferne sie mit einem schweeren Gewichte, oder mit einer beträchtlich geschwinden Bewegung wirken. Ich werde diese Gelegenheit wahrnehmen, um Anhangsweise auch von einigen Kräften der Körper zu reden, die zwar noch eben nicht in der Mechanik zur Bewegung der Maschinen angewandt werden, von denen aber doch die Natur genugsam zeigt, daß sie zur Hervorbringung gewisser Bewegungen fähig sind, und welche vielleicht unsre Nachkommen in der practischen Mechanik anwenden werden, so wie wir jetzo gewisse Kräfte, z. E. die Kraft der Dünste, in derselben anwenden, an welche die Alten gar nicht gedacht haben, daß sie in der Mechanik nützlich werden könnten.

§. 58.

Es ist hier genug für uns, daß wir sehr wirksame Kräfte bey den Körpern der Menschen voraussetzen können, welche sie durch die Wirkung ihrer Muskeln auf die Knochen äussern, und zur Hervorbringung von mancherley Bewegungen in andern Körpern geschickt anwenden können. Es gehört nicht für uns, die Ursachen dieser Wirkung genau zu untersuchen. Wir würden hier an ein bisher noch unauflösliches Geheimniß der Natur gerathen. Doch hat Borelli, ein italiänischer Mathematiker, von der Art, wie die Muskeln die Knochen als Hebel in Bewegung setzen, und von der Gewalt, welche sie auf dieselben ausüben, sie komme nun,

woher sie wolle, viel Belehrendes in einem lateinischen Werke von der Bewegung der Thiere gesagt.

Genug diese Wirkung ist sehr groß. Die Muskeln, welche den Fuß und die Beine starr halten und bewegen, haben Stärke genug, das ganze Gewicht eines erwachsenen Menschen, welches wir auf 140 Pfund ansetzen wollen, zu halten, und in die Höhe zu bewegen, wenn derselbe auf die Zähen sich aufrichtet. Es ist aber nichts seltenes, einen Menschen in dieser Stellung 150 bis 160 Pfund auf den Schultern tragen zu sehen. Diese Muskeln sind also stark genug, 300 Pfund zu halten. Die Muskeln des Arms halten, wenn derselbe ausgereckt ist, etwa 25 Pfund, aber mehr in andern Lagen des Arms. Die Kräfte des Menschen im Tragen und Halten schweerer Lasten bey aufgerichtetem Körper, wo die Knochen von oben her gedruckt, oder durch ein Gewicht gezogen werden, haben keine bestimmte Gränzen. Man sieht Menschen, die in dieser Stellung viele Centner tragen. Aber sie werden es auch mit etwas eingebogenem Leibe und Knien thun können. Und für diesen Fall führt Borelli am a. O. Prop. 61. den Beweis, daß die Knorpel und Muskeln des Rückgrades bey einer Last von 120 Pfunden eine Gewalt von 25585 Pfunden ausüben müssen. So oft der Mensch bloß mit seinem Gewichte wirkt, kömmt es auf die Grösse seines Körpers an, und hier kömmt ihm auch das Gewicht seiner Kleider mit zu Hülfe. Allein wenn er mit aufrechtstehendem Körper horizontal zieht, so wird seine Kraft sehr geringe. Denn die Last, die er bewegen will, darf nicht gar groß seyn, um den Schweerpunct seines Körpers über den Grund desselben zu sich hin zu ziehen, und ihn fallen zu machen. Man erinnere sich hier an das, was oben §. 23. von der Vestigkeit des Standes langer Körper auf einer ungleich schmäleren Grundfläche gesaget ist. Er würde hier fast nichts mit seinem Ziehen ausrichten können, wenn er sich nicht mit Vorsetzung des Fusses gegen die Last zu einen breiten Grund

ver=

verschaffte, oder durch Zurück- oder Vorüberlehnung des Körpers dessen Schweerpunct über den Grund hinaus brächte. Die Stärke der Muskeln hilft hier wenig, und das Gewicht nur in geringem Verhältniß. Die Erfahrung beweiset, daß ein starker Mensch in dieser Stellung, und bey solcher horizontalen Richtung des Zuges, etwa 24 bis 25, nimmermehr aber 30 Pfund heben könne. Noch weniger kann er in dieser Stellung mit Drücken ausrichten, weil er hier nicht einmal den Vortheil durch die Stellung seines Körpers sich geben kann, welchen er doch bey dem Ziehen hat. Daher ist bey der Umdrehung der Kurbeln seine Kraft so ungleich. Wenn er die Kurbel von unten her gegen sich zieht, so kann er über 100 Pfund Kraft anwenden, und wenn er sie von sich stößt, hat er fast gar keine, es sey dann daß der Handgriff der Kurbel niedriger als seine Schultern liege, da er nicht bloß gerade von sich stossen, sondern auch mit einem Theil seines Gewichtes auf dieselbe drucken kann. Die Erfahrung hat hier bewiesen, daß, wenn seine Arme einen Winkel von 60 Graden mit dem Horizont machen, er einen Druck von 27 Pfunden ausüben könne.

Man hat den Versuch angestellet, da man starke Männer ein Gewicht von 25 Pfund aus einem Brunnen an einem horizontalen Seile ziehen und sie alsdann mit möglichster Geschwindigkeit fortgehen lassen. Man hat ihre Geschwindigkeit so gefunden, daß sie mit derselben 6000 Fuß in einer Stunde hätten fortgehen können. Diß kann man also als das äusserste annehmen, was von den Kräften eines Menschen zu erwarten ist, daß er nemlich ein Gewicht von 25 Pfunden in einer Stunde 6000 Fuß fortbewege. Mit diesem Belauf seiner Kräfte kann man nun auf eine gewisse Art haushalten. Muthet man ihm mehr Gewicht an, so muß man es ihm an der Geschwindigkeit schenken. Giebt man ihm ein geringeres Gewicht zu bewegen, so kann man ihm freylich mehr Geschwindigkeit anmuthen. Doch geht dieses nicht ins unendliche, und

man wird, wenn man ihm ein ungemein kleines Gewicht aufgiebt, keine ungeheuer grosse Geschwindigkeit von ihm erwarten können, weil er doch immer das Gewicht seines Körpers zu tragen hat, und seine Muskeln zur Fortbewegung desselben allein viel Kraft brauchen.

Man kann hieraus die Berechnung von der Wirkung ziehen, welche sich von denen Maschinen erwarten läßt, an welchen ein einzelner Mensch wirkt. Wenn wir eine Kraft in ein Gewicht verwandeln, und dieses durch die Geschwindigkeit für eine gegebene Zeit multipliciren, so haben wir das Moment der Kraft (§. 17. S. 44.) Das Moment der menschlichen Kraft ist also hier 25 mal 6000, oder 150000. Man weiß, daß die Momente der Kraft und der Last bey allen Maschinen einander gleich seyn müssen. Man nehme also an, daß der Mensch mit diesem Moment in einer Stunde 150 Pfund zu einer gewissen Höhe bringen solle. Diese Höhe wird 1000 Fuß betragen. Denn 150 × 1000 ist = 150000, oder dem Moment der Kraft des Menschen. Hat er durch eine Maschine 1500 Pfund zu heben, so wird er sie in einer Stunde nur 100 Fuß heben können. Ist die Last 15000, so hebt er sie nur 10 Fuß, ist sie 150000, nur 1 Fuß weit in einer Stunde, mit Anwendung aller Kräfte und aller Geschwindigkeit. Ueberhaupt wird, wenn eine Last aufgegeben wird, die durch eines Menschen Kraft gehoben werden soll, die Geschwindigkeit derselben für eine Stunde gefunden werden, wenn man das erwehnte Moment 150000 durch die Last dividirt. Ist z. E. die Last 500 Pfund, so hebt sie der Mensch in einer Stunde 300 Fuß. Denn 150000 dividirt durch 500 ist 300. Ist die Last 1200 Pfund, so hebt sie der Mensch 125 Fuß hoch.

Es ist wahr, daß ein Mensch mehr als dieses vermag, wenn er mit seinem ganzen Gewicht auf eine Maschine druckt, z. E. auf das Rad eines Krahns, oder wenn er an einem Seil niederwärts zieht, z. E. an den Radwinden.

Bey jenen Maschinen aber muß er einen Gang annehmen, als wenn er auf eine Treppe stiege, und dabey nicht nur das Gewicht seines Körpers heben, sondern auch die schweere Maschine selbst, ungeachtet ihres grossen Reibens, in Bewegung setzen und darin unterhalten. Dies aber mindert seine Geschwindigkeit, und mit derselben das Moment seiner Kräfte um ein grosses. Zudem kann er auch nicht seine Schritte so geschwinde thun, als er will, sondern muß warten, bis die Maschine seinem Druck nachgegeben hat, ehe er den folgenden Schritt thun kann. Da nun diese Bewegung der Maschine von der Schweere und dem Reiben derselben abhängt, so können wir hier keine gewisse Regeln zur Schätzung der ganzen Wirkung der auf diese Art wirkenden menschlichen Kraft angeben. Bey den Winden muß er jede Hand den Weg zurückführen, um welchen er das Seil niedergezogen hat, um es in einem höhern Punct anzugreifen. Gesetzt, er könnte jede Hand 10000 Fuß weit in einer Stunde bewegen, so wirkt er doch auf die Last nur mit einer Geschwindigkeit von etwas mehr als der Hälfte hievon. Ich sage: mit etwas mehr, als der Hälfte. Denn man muß rechnen, daß er die eine Hand schon hebt, wenn er mit der andern noch zieht, im Fall nicht der Widerstand der Last sehr schweer ist. Zudem arbeitet er auch niemals mit seinem ganzen Gewichte gegen die Last, sondern er streckt den Arm aus, biegt ihn ein und wieder aus, wobey alles auf die Muskeln ankömmt, welche bey der stärksten Anstrengung einem gesunden Mann von gemeiner Stärke höchstens Kraft geben, 25 Pfund mit ausgestrecktem Arme zu halten. Wenn man alle diese Umstände in Betrachtung zieht, so möchte die mittlere Kraft, mit welcher der Mensch an einer Winde auf etwas lange Zeit zieht, nicht über 30 Pfund, und die Geschwindigkeit für eine Stunde nicht viel über 6000 Fuß betragen.

§. 59.

Die Thiere, deren Kräfte man in der Mechanik vorzüglich anzuwenden pflegt, sind die Pferde. Die Art, wie man sie zur Bewegung der Maschinen anwendet, ist gewöhnlich durch einen horizontalen Zug. Le Sauveur, ein französischer Mathematicus, stellte, um sich von dem Belauf der Kräfte eines Pferdes in diesem Zuge zu versichern, folgenden Versuch an: An einem Seil, das in einen tiefen Brunnen hinab ging, hing er ein Gewicht auf, und ließ einzele Pferde dieses Seil, das über eine Rolle geschlagen war, über einen horizontalen Boden fortziehen. Er fand, daß sie auf diese Art 175 Pfund, das ist 7 mal so viel, als ein Mensch, fortziehen konnten, und zwar mit einer Geschwindigkeit, die auf eine Stunde 1800 Klaftern, oder 10800 Fuß würde betragen haben. Wir haben in diesen Zahlen, wenn wir sie durch einander multipliciren, das Moment von der Kraft eines Pferdes, nemlich 1890000, welches beynahe 13 mal so groß, als das Moment von den Kräften eines Menschen ist. Man kann hieraus auf ähnliche Art, wie bey den Menschen, berechnen, was man sich für eine Geschwindigkeit von der Wirkung der Kraft eines Pferdes zu versprechen habe, wenn man dasselbe an einer Maschine arbeiten läßt, deren Widerstand zusammt dem von der Last bekannt sind. Dieser betrage z. E. 1800 Pfund, so wird das Pferd in einer Stunde die Last 1050 Fuß weit bewegen können. Oder er belaufe sich auf 9000 Pfund, so giebt ihr das Pferd mit Anwendung aller seiner Kräfte eine Geschwindigkeit von 210 Fuß.

Man pflegt die Pferde zur Herumtreibung solcher Maschinen an einen langen Hebel, der in der Welle der Maschine bevestigt ist, zu spannen. Hier kömmt vieles auf die Weite des Circuls an, in dem die Pferde herum gehen können. Wenn der Circul sehr enge ist, so wird es dem Pferde sehr schweer, seinen langen Körper unabläßig so zu wenden, wie es die Bewegung der Maschine erfodert. Das Pferd kann

kann nur in der Tangente des Circuls seine vollen Kräfte auf den Hebel äussern. Hier aber muß diese Richtung sich unaufhörlich in eine schiefe verändern. Desaguliers fand, daß 5 Männer einen Hebel kaum herum wenden konnten, den ein Pferd in einem Circul von 40 Fuß im Durchmesser zog. Dagegen waren 3 Männer genug, den Hebel einer andern Maschine zu bewegen, deren Circul 19 Fuß im Durchmesser hatte, und zu welchem ein Pferd nicht Kräfte genug hatte. Ein Pferd verliert also mehr als zwey Fünftheile von seiner Kraft, wenn es statt einer runden Bahn von 40 Fuß im Durchmesser in einer halb so engen herumziehen muß. Diese Anmerkung ist sehr wichtig in der Anlage aller Pferdemühlen, wiewol sie wenig beobachtet wird, und man sollte billig keine dergleichen anlegen, wo nicht das Gebäude Raum genug zu einem Circul von wenigstens 36 Fuß im Durchmesser giebt. Zwar erfodert dieß viel Ueberlegung im Bau des Gebäudes, in welchem die Maschine angebracht wird, und in der übrigen Anlage der Maschine. Denn wenn die Maschine in demselben Stockwerke, wo die Pferde gehen, ihre Wirkung thun soll, so wird es schweer, die äussersten Theile derselben, welche die Arbeit thun sollen, so weit zu verlegen, daß die Pferde den Raum zu einem so weiten Gange behalten. Bringt man das Werk, welches getrieben werden soll, in dem Stockwerke oben über den Pferden an, so wird es schweer, die 36 biß 40 Fuß langen Balken gehörig zu unterstützen, weil die Pferde einen freyen Gang behalten sollen, und man daher von unten nicht stützen kann. Man wird daher zu kostbaren Hängwerken, und eben deswegen zu einem so viel vestern und kostbarern Unterbau genöthigt. Das Beste ist, das Werk, welches getrieben werden soll, unten anzubringen, und die Pferde oben gehen zu lassen. Denn unten wird man nun stützen können, und die Balken über den Pferden, die nun nichts weiter zu tragen haben, bringt man dem Dach durch ein Hängwerk zur Last. Doch was auch für Schwierigkeiten entstehen,

hen, so muß man jene Regul nicht aufgeben, und den Circul nie zu klein machen. Man kann sonst blos durch diesen Umstand genöthigt werden, zwey Pferde zu brauchen, wo man sonst nur eins nöthig hätte, oder wenigstens die Pferde weit öfterer abzulösen, als man sonst nöthig haben würde.

Man findet in mechanischen Büchern Mühlwerke angegeben, in denen ein Pferd oder ein Ochse ein schräg gelegtes grosses Rad durch Treten in Bewegung setzt, oder mit den Hinterfüssen auf die Schaufeln eines perpendicularen Rades tritt. Hier wirkt das Thier mit eben der Bewegung, als wenn es bergan ginge. Man kann aber von allen dergleichen Maschinen behaupten, daß sie nicht sonderlich vortheilhaft sind. Denn die vierfüßigen Thiere sind nach ihrem Bau und der Lage ihrer Muskeln nicht so tüchtig zu einem steigenden Gange. Ein starkes mit 300 Pfunden belastetes Pferd wird nicht so leicht eine schräge Fläche hinansteigen, als ein Mensch mit einer Last von 100 Pfunden. Das Pferd hat also in diesem Fall nicht vollends dreymal so viel Kräfte, als der Mensch, da es in dem horizontalen Zuge siebenmal so viel vermag. Ich glaube nicht, daß ein Fall in der Mechanik sich angeben lasse, wo man unumgänglich genöthiget wäre, die Kräfte des Thieres in dieser Stellung anzuwenden, und wo man es ja nicht ändern kann, so wird es doch immer besser seyn, die Kräfte eines oder mehrerer Menschen dazu anzuwenden.

Da ich die Kräfte des Pferdes im horizontalen Zuge nur auf 175 Pfund setze, so wird man vielleicht sich den Zweifel einfallen lassen, wie denn Pferde Lasten fortziehen können, deren Gewicht so ungleich mehr beträgt. Die Erfahrung beweiset, daß in einem ebenen Wege und auf einem mit Einsicht gebaueten Fuhrwerke 1000 Pfund nicht zu viel für ein Pferd sind. Ueber dem glatten Eise zieht dasselbe weit mehr als dieses fort. Es ist genug, hier anzumerken, daß das Pferd im horizontalen Zuge gar nichts mit Hebung

der

der Last, die es zieht, zu schaffen habe, sondern blos seine Kräfte verwende, das Reiben an den Theilen des Fuhrwerks zu überwinden, und die Last über die kleinen ohn Unterlaß in den Weg kommenden Erhöhungen und Rauhigkeiten der Bahn zu heben.

Die Vergleichung der Kräfte der Menschen und der Pferde, die beyde im Tragen äussern, läßt sich nicht mit Gewißheit machen. Der Mensch ist seinem Bau nach geschickter zum Tragen, als das Pferd und die meisten vierfüßigen Thiere, aber nicht so geschickt zu einem geschwinden Gange, wenn seine Schultern mit einer grossen Last beschweert sind, weil sich sein Schweerpunct leichter verrückt. Nach Desaguliers Anmerkung geht indessen ein englischer Sänftenträger, der zu seinem Theile 150 Pfund schleppt, vier englische Meilen in einer Stunde, da ein Pferd mit einer Last von 224, höchstens 270 Pfunden, die ihm auf den Rücken gelegt ist, nur deren zwo bey gutem Wege macht. Multiplicirt man die Gewicht durch die Geschwindigkeiten, so bekömmt man für beyde Kräfte Momente, die sich beynahe gleich sind. Wenn man aber nicht auf die Geschwindigkeit sieht, so ist es gewiß, daß Menschen Lasten tragen können, die man einem Pferde nicht gerne aufladen würde. Desaguliers führt von den Kohlenträgern in England an, daß sie bis auf 250 Pfund, und sogar Treppen hinan, schleppen, und von denen Lastträgern, welche die Käsehändler in London brauchen, daß sie bey jedem Gange, den sie thun, sich mit 300 Pfund belasten.

Man kann aus allem diesen den Schluß ziehen, daß die vortheilhafteste Art, die Kräfte der Pferde zur Bewegung von Lasten oder Maschinen anzuwenden, der horizontale Zug sey, und daß in allen andern Fällen die Kraft derselben nicht den grossen Vorzug vor der Kraft des Menschen habe, welchen man ihr nach einem gemeinen Vorurtheile gewöhnlich zuschreibt. Indessen sind die angeführten Erfahrungen nur von Pferden von mittler Stärke anzunehmen.

Desaguliers nimmt beydes die Kräfte der Menschen und der Pferde grösser an, und will vielleicht mit einiger Nationalliebe, fünf Engländer gegen sieben Franzosen oder Holländer gerechnet wissen, giebt auch den Pferden 200 Pfund Kraft im Ziehen. Doch dürfen wir uns dies in unserer Berechnung nicht irre machen lassen, bey welcher es sich von selbst versteht, daß ein mehrers oder minders sich mit ein- oder abrechnen lasse, oder daß es eigentlich nur auf eine mittlere Rechnung ankomme.

§. 60.

Die Kräfte lebloser Körper lassen sich zur Bewegung grosser Maschinen mit einem grössern Vortheil anwenden, weil, wie bekannt, die Kräfte der thierischen Körper nur für eine bestimmte Zeit Dienste thun können, und alsdenn durch Nahrung und Ruhe wieder ersetzt werden müssen. Diese aber haben darin den Vorzug vor jenen, weil man sie leichter nach seinen Absichten lenken und mäßigen kann. Daß sie schwächer sind, würden wir nicht als einen Nachtheil anzusehen haben, da wir alle Maschinen so einzurichten wissen, daß keine Kraft zu klein ist, um den größten Widerstand zu überwinden, wenn nicht auf der andern Seite die Bewegung mancher Maschinen einen gewissen Grad der Geschwindigkeit erfoderte, welchen ihnen zu geben die thierischen Kräfte theils zu schwach sind, theils, wie gesehen, nicht Geschwindigkeit genug haben.

Die Mechanik der Neuern hat eben darin einen grossen Vorzug vor der Mechanik der Alten, daß wir die Kräfte lebloser Körper zur Bewegung grosser Maschinen anzuwenden wissen, woran diese gar nicht gedachten. Alle ihre Werkzeuge wurden von Menschen und Thieren in Bewegung gesetzt; allein von Werkzeugen, die durch Wasser und Wind in Bewegung gesetzt wurden, finden wir, ungeachtet es so leicht scheint, daß man auf die Anwendung derselben hätte verfallen müssen, wenige oder gar keine Spuren. Dies

nöthigte

nöthigte sie, eine solche Menge Sclaven zum Betrieb ihrer Haushaltungs- und anderer Geschäfte zu gebrauchen. Dies machte ihre practische Mechanik so unvollständig, und eben dieser Umstand hat die Erfindungen der Neuern in dieser Wissenschaft so weitläuftig und mannigfaltig gemacht, indem weit mehr Ueberlegungen zu machen sind, wenn man die Kräfte lebloser Körper zur Bewegung der Maschinen anwenden will, als bey den Kräften belebter oder gar vernünftiger Geschöpfe, die man auf allerley Art nach seinen Absichten verändern und bestimmen kann.

Die leblosen Körper, deren Kräfte wir in der Mechanik anwenden, sind 1) daß Wasser, 2) die Luft, 3) das Feuer, 4) Gewichte, 5) die federartigen Körper. Ich werde über alle diese allgemeine Betrachtungen anstellen, und Anmerkungen beybringen, welche uns in der Anwendung derselben im mechanischen Gebrauch leiten können. Ich werde zuletzt von einigen Kräften reden, durch welche die Natur allerley Bewegungen hervorbringt, die zum Mechanismus der Welt mit gehören, wiewol sie in der practischen Mechanik bisher noch nicht haben nutzbar gemacht werden können.

§. 61.

Das Wasser, und überhaupt alle flüßige Körper, sind ein wichtiger Vorwurf mechanischer Betrachtungen, in so ferne sie theils selbst einer Bewegung fähig, theils ein Mittel zur Bewegung vester Körper sind, daß sie Inhalt genug für drey mathematische Wissenschaften, die Hydrostatik, die Aerometrie und die Hydraulik abgeben, von denen ich die nützlichsten Wahrheiten in der Folge abhandeln werde. Ich werde also hier nur das allgemeinste von der Anwendung der Kraft des Wassers zur Bewegung solider Maschinen beybringen können.

Das Wasser wird bey den Rädern grosser Mühlwerke als ein Gewicht gebraucht, welches, wenn es mit einem Fall von einer gewissen Höhe auf die Schaufeln derselben

trifft,

trifft, dieselben in Bewegung setzt. Es kömmt hiebey auf zwey Dinge an, nemlich auf die Menge des auffallenden Wassers, indem ein so viel grösseres Gewicht auf das Rad stößt, und auf den Fall, durch welchen dessen Geschwindigkeit bestimmt wird. Der Vortheil, den man in Ansehung des einen hat, kann den Mangel in Ansehung des andern ersetzen. Ein wasserreicher Strom darf keinen grossen Fall haben, um einen oder mehrere Mühlengänge zu treiben. Die breiten Räder der Schiffsmühlen werden durch den Strom eines mit unmerklichem Fall abfliessenden Flusses in Gang gesetzt. Dagegen aber läßt sich ein nicht reiches aber stark abschiessendes Gewässer in andern Fällen eben so sehr nützen. Es ist indessen bekannt, daß es Schwierigkeiten gebe, da man weder so viel Wasser noch so viel Fall desselben erhalten kann, als nöthig ist, um den Widerstand so grosser Maschinen zu überwinden, oder ihnen die nöthige Geschwindigkeit zu geben. Wenn es blos darauf ankäme, eine Mühle in Bewegung zu setzen, so würde es in den meisten Fällen durch ein grosses und so wenig als möglich schweeres Rad sich zuwege bringen lassen. Allein dadurch wird die Bewegung um so viel langsamer. Gewisse Maschinen aber erfodern eine Geschwindigkeit, unter welcher sie unbrauchbar werden. Wenn eine Kornmühle gutes Mehl schaffen soll, muß der Stein sich in 20 Secunden etwa 12 mal, das ist einmal in $1\frac{2}{3}$ Secunden, wenden. Ist das Rad sehr groß, und die Geschwindigkeit des Stroms, welchem dasselbe folgt, sehr klein, so wird man bey allen Einrichtungen, die man der Mühle geben könnte, doch nicht eine solche Geschwindigkeit des Mühlsteins zuwege bringen können. Leidet indessen die Maschine eine kleinere Geschwindigkeit, wie es z. E. bey Stampfmühlen gleichgültig ist, wie oft der Stampfer in einer Minute gehoben wird, wenn er nur immer hoch genug fällt, so ist es immer leicher, ein Mühlenwerk von der Art bey einem schwachen Strom zu Stande zu bringen. Hat man Höhe genug, so setzt man der Kraft des Wassers sehr

sehr vieles dadurch zu, daß man die Schaufeln des Wasserrades so ausbildet, daß sie mit den Felgen des Rades eine Art von Kasten ausmachen, in welchen das Wasser von oben einstürzt, und so lange in ihm hängen bleibt, bis es nach halber Wendung des Rades sich unten wieder ausgießt. Auf diese Art wirkt es nicht blos durch seinen Fall, sondern auch durch sein Gewicht, zur Herumdrehung des Rades, indem die Schaufeln an der einen Hälfte fast alle vom Wasser beschweert, an der andern aber ledig sind. Man nennt ein solches Rad ein oberschlächtiges, hingegen das, an welches der Strom von unten stößt, ein unterschlächtiges Rad.

Der Hauptvorzug, den das Wasser vor andern Körpern hat, die man als Kräfte zur Bewegung der Maschinen anwenden kann, ist die Gleichförmigkeit von dessen Wirkung, so lange man es in dem Zustande erhält, daß es in gleicher Menge und von gleicher Höhe herab auf die Wasserräder fällt. Bey den meisten Gewässern ist man im Stande dieses zu thun, indem man den durch Regen und Nässe der Erde entstehenden Ueberfluß des Wassers neben den Mühlen fortschiessen läßt, und bey entstehendem Mangel die Oeffnungen, die es auf die Mühle führen, verschließt, und das Wasser sich aus seinen Quellen wieder sammlen läßt, bis es aufs neue mit reicherem Strome auf die Mühlenräder abschiessen kann. Allein viele Ströme sind dem Nachtheil unterworfen, daß sie auch unterhalb der Mühlenräder zu hoch anlaufen, wenn das sogenannte wilde Wasser wegen zu schwachen Falles unter der Mühle nicht geschwinde genug ablaufen kann, oder durch den Einfluß anderer Bäche und kleiner Flüsse vor den Mühlen zu sehr sich häuft, und so hoch steigt, daß der Gang der Mühlen zu sehr gehindert, ja ganz gehemmet wird. Dieses hat eine Erfindung nothwendig gemacht, da man die ganze Welle des Mühlenrades mit dem Kammrade in die Höhe windet, und so wei-

aus dem davor stehenden Strome hebt, daß das Rad einen freyen Gang bekömmt. Man nennt Mühlen, die auf diese Art eingerichtet sind, Panstermühlen. Ihre genauere Beschreibung ist in Beyers Mühlentheater Cap. 7. S. 44. nachzusehen. Diese Einrichtung läßt sich indessen da nicht nachahmen, wo etwa die aufsteigende Fluth auf eine oder mehrere Stunden von Zeit zu Zeit den Gang der Mühlenräder hemmt, und es nicht der Mühe wehrt ist, um einer Hinderniß willen, die zwar oft kömmt, aber in einer gesetzten Zeit wieder sich verliert, so weitläuftige Anstalten zu machen. Zudem ist es ein anders mit Strömen, die keine Fluht haben, und welche oberhalb der Mühle so stärk als unterhalb anschwellen; wogegen die Fluht nur unterhalb Wasser an die Räder bringt, oberhalb aber das Wasser nicht mehrt.

§. 62.

Die Luft, oder der in eine bald schnellere bald langsamere Bewegung gesetzte Strom derselben, welchen wir den Wind nennen, ist zu sehr als eine Kraft bekannt, die sich zur Bewegung mechanischer Werkzeuge anwenden läßt, daß ich nicht weitläuftig erläutern darf, welch eine Wirkung sich von der Kraft desselben erwarten lasse. Man versteht die Art, wie dieselbe wirkt, am besten in dem Falle, wenn der Körper gerade in eben der Linie weichen kann, in welcher der Strom des Windes fortgeht, z. E. in der Bewegung eines mit vollem Winde segelnden Schiffes. Allein man kann nur selten den Wind in dieser Richtung seine Kraft anwenden lassen, sondern man nützt ihn öfter auf eine solche Art, daß man seinen Stoß auf den Körper, den er bewegen soll, in schräger Richtung wirken läßt. So ist es bey den Segeln eines Schiffes bey halbem oder gar entgegen gesetztem Winde, und bey den Windmühlen bewandt, von deren Bewegung ich hier einige Erläuterung beyfügen will.

Man erinnere sich hier an das, was ich oben §. 34. von der Bewegung einer schrägen Fläche erwähnt habe, auf welche

welche ein Gewicht in der ihm natürlichen Richtung perpendicular gegen den Horizont, aber schief gegen die Fläche zu drückt. Bey den schräg gegen den Wind gestellten Segeln eines Schiffes ist nur dieser Umstand verändert, daß der Druck des Windes sowohl, als die Bewegung des Schiffes, horizontal ist, da wir das gegen den Wind schräg in der Lage AB (Fig. 100.) ausgespannte Segel als eine perpendiculär gegen die Erdfläche gestellte Fläche ansehen, von welcher wir die Grundlinie in der Linie AG finden, welche auf die Richtung des Windes CD perpendicular ist. Die Wirkung des Steuerruders, welche aus dem schiefen Stoß seiner Fläche gegen das Wasser zu erklären ist, und der Widerstand des Wassers, welcher gegen die grosse Seitenfläche des Schiffes und seines Kieles mit ungleich grösserer Gewalt, als gegen die Fläche des Vordertheils, druckt, erlauben dem Schiffe nur die vorwärts gehende Bewegung in der Linie DF, eben als wenn die schräge Fläche AB an der Seite unter dem Winde von einem vesten Körper unterstützt würde, der ihr bloß erlaubte, sich längst demselben zu bewegen. Nun stelle man sich die Kraft des Windes als ein auf die schräge Fläche AB in der Richtung CD druckendes Gewicht, den Widerstand des Wassers aber als eine Kraft vor, welche die Fläche in der horizontalen Richtung DF zurück hält, so sind alle Umstände, wie oben §. 34, und das Gleichgewicht ist da, wenn die Kraft des Windes sich zu dem Widerstande wie BG zu GA verhält. Ist dieselbe stärker, als in diesem Verhältniß, so weicht das Schiff vorwärts. Ist der Widerstand des stillen Wassers aber so groß, als in dem Verhältniß GA zu BG, so wird das Schiff stehen bleiben. Hat der Strom eine dem Schiffe entgegengesetzte Richtung, und ist die Kraft desselben stärker, als in dem Verhältniß AG zu BG, so wird das Schiff zurück getrieben werden. Indessen ist es nicht ganz überflüßig, anzumerken, daß das Schiff die gerade Direction, die mit dem Wege seiner Bestimmung übereinkömmt, deswegen nicht halten könne, weil

das

das Wasser dem seitwärts her wirkenden Druck des Windes nachgiebt, und zwar in dem Verhältniß, in welchem der Durchschnitt der Vorderfläche des Schiffes zu dem Durchschnitt der Seitenfläche steht. Wenn es z. E. 200 Quadratfuß in jenem, 1200 Quadratfuß in diesem hält, so wird der Widerstand seitwärts zwar sechsmal grösser, als von vorne her seyn. Aber das Schiff wird doch noch immer den sechsten Theil der Bewegung seitwärts nehmen, die es nach vorne zu macht. Aus diesem Grunde muß die Axe oder der Kiel des Schiffes noch einen Winkel mit dem zur Absicht gesetzten Wege des Schiffes windwärts machen, den man im Französischen L'angle de la derive, im Holländischen de Wraking nennt. Auf diese Art geht denn der Schweerpunct des Schiffes, aber nicht der Kiel in dem zur Absicht gesetzten Wege.

Bey einer dem Winde noch schräger entgegen gesetzten Richtung (Fig. 101.) verändert sich das Verhältniß der Linie BG zu AG. Die Kraft des Windes kann zwar noch stark genug gegen den Widerstand des Wassers bleiben, so daß sie ihn noch fortdaurend überwinden könnte. Aber es kömmt dazu, daß die Segel keine ebene, sondern gekrümmte Fläche AHB ausmachen, von welcher der größre Theil BH sich dem Stoß des Windes entzieht, und der übrige Theil AH demselben ganz entgegen liegt.

Auf eine ähnliche Art ist es mit den Flügeln der Windmühlen bewandt. Auch diese sind schräge Flächen, auf welche die Kraft des Windes wirkt, die sich aber nicht anders als um einen gemeinen Mittelpunct wenden können. Hier würde aber die Wirkung wegen des so verschiedenen Abstandes von dem Mittelpunct sehr verschieden seyn, und die entferntern Puncte des Flügels mit viel grösserer Gewalt herum getrieben werden, wenn die Fläche des Flügels durchaus einerley Schräge hätte. Man krümmt sie daher, und giebt denen Theilen, die dem Mittelpunct am nächsten sind, eine grössre Schräge, damit der Wind, dem die

Welle

Welle der Mühle gerade entgegen gestellt wird, so viel mehr auf sie vermöge. Den äussersten sollte man eine sehr geringe Schräge geben. Allein man giebt ihnen gewöhnlich aus dem irrigen Vorurtheile, daß der Wind sich an dem Ende der Flügel wieder fangen müsse, eine Schräge in entgegengesetzter Lage, so daß des Windes Wirkung hier derjenigen entgegen ist, welche die übrigen Theile des Flügels herumtreibt, und also sich selbst wieder schwächt, daß daher dieser Theil des Flügels nicht blos ein unnützer, sondern ein schädlicher Theil wird. Denn man stelle sich (Fig. 102.) zwo gleich schräge Flächen AB und CD vor, auf welche der Wind in der Richtung HG wirkt. Die Fläche AB wird, nach vorhin erklärten Gründen in der Richtung DE, die Fläche CD in der Richtung BF weichen müssen. Sind aber beyde Flächen mit einander verbunden, so wird die eine Bewegung die andre aufheben. Nehmen wir statt der Fläche CD eine andre weniger inclinirte ID an, so wird freylich die Wirkung des Windes auf diese Fläche schwächer, aber der Wirkung auf die andre Fläche entgegen gesetzt seyn, und dieselbe zum Theil aufheben. Diese Sache in allen Stücken genau zu bestimmen, erfodert eine höhere Theorie. Allein das angemerkte wird für meine Absicht genug seyn, und wenigstens die Ueberzeugung von dem Nachtheil dieser aus alten Mühlenbüchern genommenen Einrichtung der Mühlenflügel geben.

Von dem gewöhnlichen Verfahren in der Zurichtung der Mühlenflügel nach diesen theils falschen theils wahren Grundsätzen, giebt ein jedes Werk, das vom Mühlenbau handelt, zulängliche Nachricht.

Auch das so bekannte Werkzeug eines Kinderspiels, der papierne Drache, giebt ein Exempel eines durch die Wirkung des Windes auf eine schräge Fläche bewegten, und endlich mit derselben ins Gleichgewicht gestellten Körpers ab. Es ist überaus vieler mechanischer Erläuterungen aus der Lehre von der zusammengesetzten Bewegung, von dem

Schweerpuncte und der schrägen Fläche fähig, welche in weitläuftigern Werken von der Naturlehre, unter andern in Muschenbrocks Physik, umständlicher gegeben sind, als es hier unser Zweck, der hauptsächlich auf das nützliche geht, erlaubt.

Der Wind ist unter allen leblosen Kräften die wolfeilste, da wir zu ihrer Unterhaltung nichts beytragen dürfen, und, um sie anzuwenden, nur einen etwas erhabenen oder freyen Ort zur Anlegung unsrer Maschinen wählen dürfen, der sich in den meisten Gegenden ohne Mühe finden läßt. Sie würde unter allen Kräften den Vorzug haben, wenn sie nicht in ihrer Stärke und Richtung so sehr verschieden wäre. In Ansehung der Richtung weiß man freylich die Maschinen so einzurichten, daß sie bey jeder Veränderung des Windes demselben entgegen gestellt werden können. Allein die öftere Veränderung der Stärke giebt den vom Winde getriebenen Maschinen einen Nachtheil, welcher sich durch keine Einrichtung ganz heben läßt. Eine gar zu grosse Stärke des Windes ist ihnen gefährlich, und nöthigt, wiewol nur selten, sie aus dem Gebrauch zu setzen. Eine zu grosse Schwäche läßt sie noch öfter unbrauchbar, und unter den mittlern Stuffen der Stärke hat man nur selten den Vortheil einer solchen, welche der Maschine eine für ihre Absichten recht vortheilhafte Bewegung gäbe, und so viel förderte, daß die Kosten, welche zum Unterhalt derer Leute, die bey denselben zur Aufsicht und Handreichung bestellt sind, zu allen Zeiten sicher ersetzt würden. Es sind wenigstens gewisse Geschäffte, z. B. das Mahlen des Korns, zu welchen man, wenn es die Umstände nur irgends erlauben, lieber das Wasser, als den Wind, wählen wird.

§. 63.

Das Feuer ist freylich eine Substanz, die ihre Kräfte am wirksamsten in Auflösung der Körper beweiset. Wo man diese Absicht hat, wie z. E. in der Chymie, da bedient

man

man sich des Feuers unmittelbar mit grossem Vortheil. Allein in der Mechanik ist man sehr spät auf den Gebrauch des Feuers, als einer für dieselbe brauchbaren Kraft, gerathen, und man kann sich hier nicht desselben unmittelbar, sondern nur einer andern von dem Feuer in grosse Wirksamkeit gesetzten Kraft als eines Mittels bedienen, die Körper in Bewegung zu setzen. Man hat nemlich bemerket, daß die Dünste der von dem Feuer aufgelöseten Körper, insonderheit des Wassers, eine grosse Gewalt auf die Körper ausüben, die ihrer Ausdehnung im Wege stehen. Die Kraft der Dünste des entzündeten Pulvers treibt nicht nur das Geschütz, in welchem dasselbe bey seiner Entzündung beschlossen ist, mit Heftigkeit zurück, sondern äussert auch auf die Geschütz-Kugel eine Gewalt, mit welcher diese in eine solche Bewegung gesetzt wird, daß ihr die vestesten Körper nicht widerstehen können. Man hat diese Gewalt lange angewandt, ohne ihre Ursache zu kennen, da man sie lieber in der Kraft der durch die schnelle Hitze sich ausdehnenden Luft suchte, welche hier zwar etwas, aber nur das wenigste, thut. Gegen das Ende des vorigen Jahrhunderts wurde die Kraft der blossen Dünste des siedenden Wassers, ohne Zuthun der Luft, durch die Versuche eines deutschen Naturkündigers, Namens Papin, untrüglich dargethan. Das von ihm in einem Luft- und Wasser-dichten starken metallenen Gefässe beschlossene Wasser durchdringt, wenn es zum Sieden gebracht wird, die in demselben durchkochten Körper so, daß von ihnen nichts, als die vestesten Theile ihrer Substanz, beysammen bleiben. Holz, das in diesem Gefässe durchkocht worden, läßt sich nachher wie Zunder zerreiben. Knochen werden in demselben weich, und fast eßbar. Man schreibt dieses mit Grunde dem starken Drange der Dünste des kochenden Wassers zu, welche, da sie nun keinen Ausgang aus dem Gefässe finden, mit solcher Gewalt auf die Fläche des Wassers drücken, daß dasselbe in die kleinsten Zwischenräume der darinn gekochten

Körper dringt, und alle Theilchen, die nicht mit der Substanz derselben sehr vest verbunden sind, heraus treibt. Aus diesem Werkzeuge ist verschiedenen neuern Mechanik-Verständigen der Gedanke entstanden, die Kraft der Dünste des siedenden Wassers zur Bewegung schweerer und durch grosse Gewichte gedruckter Lasten anzuwenden. Dieser Gedanke ist am besten in der sogenannten Potterischen Feuer-Maschine ausgeführt worden, für deren ersten Angeber der Marquis von Worcester angesehen werden muß, wiewol sich nachher ein Capitain Savery diese Ehre angemaaßt hat. Sie ist aber zuerst von Thomas Newcomen, einem Eisenhändler, und John Calley, einem Glaser, im Jahre 1712 auf dem Guthe eines Edelmanns Back, nahe bey Birmingham, ausgeführt worden, der sich dazu hauptsächlich von einem andern Edelmann Potter bereden ließ, welcher auch die Aufsicht dabey geführt haben mag, und die Ehre davon getragen hat, daß sie am gewöhnlichsten unter seinem Namen bekannt ist. Sie ist seitdem wiederholt in England, Frankreich, und nun auch in Deutschland und Ungarn, zur Bewegung schweerer Pumpwerke, die das Wasser aus Steinkohlen- und andern Minen heben, angewandt, in Kleinigkeiten verbessert, und ohne Streit eine der merkwürdigsten Maschinen, welche der menschliche Verstand bisher erdacht hat, um so viel mehr, da sie von dem innern Mechanismus thierischer Körper vieles nachahmt. Es wird mir erlaubt seyn, Leser, welche sie in ihrer ganzen Einrichtung kennen wollen, auf Desaguliers Naturlehre in dem zweyten Theile gegen das Ende, und auf Belidors hydraulische Baukunst (B. 4. Cap. 3.) zu verweisen, da eine umständliche Beschreibung viele Seiten einnehmen würde. Wer aus einem minder kostbaren Buche sich unterrichten will, wird in des Jesuiten Poda Beschreibung der bey dem Bergbau zu Schemnitz in Nieder-Ungarn errichteten Maschinen, Prag 1771. 8.

sie

sie ebenfalls, wiewol mit minderer Vollständigkeit, beschrieben finden. Belidor und Desaguliers beschreiben noch mehrere Maschinen, in welchen das Feuer Dünste zur Hervorbringung grosser Bewegungen wirksam macht. Allein die Potterische ist bey weitem die vorzüglichste. Vor einigen Jahren machte ein Engländer andre Feuer-Maschinen, als eine Verbesserung der Potterischen, bekannt, mit welchen er aber schlecht bestanden ist, wie ich schon damals urtheilte, als ich von seiner Angabe etwas erfuhr.

§. 64.

Die Gewichte geben eine zur Untersuchung des Vermögens der Maschinen im kleinen überaus brauchbare Kraft ab, da man sie so genau durch vorhergängige Abwägung bestimmen kann, wenn dagegen die Kräfte belebter Körper nicht so genau bestimmt, der unbelebten ihre aber nur durch die Theorie berechnet werden können, doch so, daß man eine Menge kleiner Umstände unbestimmt lassen muß, welche die Rechnung oft merklich verändern. Allein sie sind bey weitem nicht so nutzbar in der practischen Mechanik, als man sich aus diesen Versuchen im kleinen vorstellen möchte. Die Absicht der mehresten Maschinen ist, einer kleinen Kraft ein Vermögen zur Ueberwindung eines grossen Widerstandes zu geben. Dieses erhalten sie durch die so viel geschwindere Bewegung, welche man ihnen giebt, und sie müssen einen so viel grössern Weg durchlaufen, je geringer ihr Verhältniß an sich selbst gegen den Widerstand ist. Wollte man nun Gewichte an den bisher beschriebenen Maschinen anwenden, an welchen durch eine kleine Kraft grosse Lasten in Bewegung gesetzt werden sollen, so müßte man diesen Gewichten einen Raum verschaffen, in welchem sie ihre Bewegung lange fortsetzen könnten, und da sie nur in der perpendicular niederwärts gehenden Bewegung ihre volle Macht ausüben, und so bald man sie an einer schrägen Fläche herabsinken läßt, an derselben verlieren, so läßt sich nur

selten ein Raum finden, wo die Anlage solcher Werkzeuge Statt haben mögte. Und wo sich auch dieser finden läßt, da wird man, um die Maschine aufs neue in Gang zu setzen, das Gewichte wieder oben zu der Maschine herauf an seinen vorigen Ort bringen müssen, und hiebey theils viele Zeit verlieren, theils neue Werkzeuge zum Aufwinden der Gewichte nöthig haben. Hiezu kömmt noch eine andere Schwierigkeit. Wenn diese Gewichte sich geschwinde niederwärts bewegten, so würden sie nach Art der freyfallenden Körper in der Geschwindigkeit zunehmen, je längere Zeit sie gefallen sind, und der Maschine zuletzt eine Geschwindigkeit geben, welche theils sich nicht zu ihren Absichten schickt, indem man bey den meisten Maschinen eine gleichförmige Bewegung braucht, theils der Maschine selbst schädlich werden und sie bald verderben würde.

Aus diesen Gründen sind die Gewichte bey keinen Werkzeugen brauchbar, als bey solchen, durch welche man eine geschwinde Bewegung bey schwachem Widerstande hervorbringen will, wobey sich die bewegende Kraft, die aber viel grösser, als der Widerstand ist, nur langsam bewegt. Ein solches Werkzeug sind die Uhren, deren Absicht die reguläre Bewegung eines oder mehrerer Zeiger ist, die der bewegenden Kraft keinen beträchtlichen Widerstand entgegen setzen, und nur durch die widerkehrende Bewegung eines Penduls, oder der sogenannten Unruhe, aufgehalten werden. Die angehängten Gewichte bewegen sich viel langsamer durch einen kleinen Raum niederwärts, und können durch diesen, vermittelst eines andern Werkzeuges, mit einem Zeitverlust, der bey unsern Uhren zum täglichen Gebrauch nicht in Betrachtung kömmt, wieder in die Höhe gewunden werden.

Aus der Beurtheilung der Uhr können die meisten Fälle eingesehen werden, in welchen Gewichte zur Bewegung der Maschinen sich anwenden lassen. Sie werden überdem bey solchen Maschinen gebraucht, wo man durch langes Aufliegen schwerer Lasten ein langsames Pressen gewisser Körper

zur

zur Absicht hat, wiewol hier in den meisten Fällen die Schraube vortheilhafter befunden wird. Oder man bedient sich ihrer in Maschinen, um einzelen Theilen derselben eine Bewegung zu geben, aus welcher sie durch die aufs neue eingreifende Maschine wieder zurück gebracht werden. Oder sie werden zuweilen als ein Gegenwicht gebraucht, durch welches dieser oder jener Theil der Maschine in einer gewissen Lage erhalten wird. Man wird sich von allen diesen Arten, die Gewichte anzuwenden, belehren können, wenn man sich eine nähere Kenntniß einzeler Maschinen durch den Augenschein, oder aus den häufigen und weitläuftigen Werken, welche die Beschreibung der in allen Künsten und Gewerken nöthigen Maschinen zur Absicht haben, belehrt. Eine Absicht, die uns hier zu weit führen würde.

§. 65.

Mit besserm Vortheile, wiewol auch mit vielerley Unbequemlichkeit, wendet man die Kräfte der federartigen Körper zur Bewegung der Maschinen an. Wie es unter den Körpern, welche die Natur in so mancherley Zusammensetzung hervorbringt, viele giebt, welche bey jedem Druck und Stoß ihre Figur sehr leicht ändern, und so, wie sie geändert ist, behalten, welche man weich nennet, und andre, welche keine Veränderung ihrer Figur leiden, und wenn eine Kraft stark genug ist, um ihre Theile in eine andre Lage zu bringen, sich in mehrere Stücke absondern und zerspringen, welche den Namen der harten Körper haben, so giebt es Körper einer dritten von dieser verschiedenen Art, welche man die federhaften, oder mit einem aus dem Griechischen hergeleiteten Worte die elastischen, nennet. Diese geben zwar einem jedem Druck und Stoß durch eine Veränderung ihrer Figur nach, nehmen aber dieselbe sogleich wieder an, wenn dieser Druck oder Stoß nachgelassen hat, und zwar mit einer so viel grössern Gewalt, je grösser diejenige ist, welche sie aus ihrer Figur gebracht hat. Es ist

wahr, daß sich diese drey Eigenschaften bey keinem Körper auf eine so bestimmte Art zeigen, daß man einen derselben vollkommen weich, oder vollkommen hart, oder vollkommen elastisch nennen könnte. Gewöhnlich findet sich das Federhafte mit einer gewissen Härte vermischt, und kein Körper ist zu finden, der bey einem öftern Biegen und Veränderung seiner Figur diese immer vollkommen wieder annähme, und nicht etwan mit der Zeit brüchig würde, welches ein Zeichen der Härte ist. Man nennt indessen einen Körper elastisch, wenn sich mehr Federkraft, als Härte oder Weiche in ihm zeigt, und unter diesen sind der Stahl und das Elfenbein die vollkommensten. Man wird sich vielleicht wundern, wenn ich dem Elfenbein eine Federkraft, und folglich eine Veränderung der Figur bey jedem Druck und Stosse beylege. Man kan sich davon durch folgenden leichten Versuch überzeugen: Man nehme eine elfenbeinerne wohlabgedrehete Kugel, und eine wohlpolirte marmorne Platte, bestreiche die leztere sehr dünne mit Oel, und lege nun die Kugel ohne sonderliche Gewalt oder Druck darauf. Der Eindruck, den die Kugel in dem Oele macht, zeigt sich auf der Platte in einem kleinen runden Flecken. Nun lasse man die Kugel auf einen andern Ort der Platte einen oder mehr Fuß hoch herabfallen, und ergreife sie wieder, wenn sie mit einer grossen Gewalt wieder in die Höhe springt. Es wird sich alsdenn ein Flecken in dem Oele zeigen, welcher grösser als der vorige, und zwar um so viel grösser ist, je höher die Kugel herabgefallen ist. Ein gewisses Zeichen, daß die Kugel bey ihrem Fall auf den harten Stein platt geworden sey, wovon sich aber keine Spur an der Kugel selbst mehr zeigt, sondern sie wird zum zweytenmal, ohne Gewalt mit eben dieser Stelle aufgelegt, einen nicht grössern Flecken, als der erste war, in dem Oele hinterlassen. Man wird hieraus völlig deutlich die Natur der Federkraft verstehen, und sich dabey wundern, daß diese zwiefache Veränderung der Figur mit einer so ungemeinen Geschwindigkeit vorgehe.

Diese Geschwindigkeit ist in der That unglaublich groß, wie folgender Versuch beweiset. Man nehme eine Menge elfenbeinerner Biliard-Kugeln, so viele man will, die aber von einer Grösse, und nicht etwan durch langen Gebrauch brüchig sind, lege sie auf dem Biliard in einer Reihe dichte an einander, schlage nun die erste derselben mit einem harten Körper an, so wird der Stoß sich in demselben Augenblick, da man an die erste Kugel anschlägt, an der letzten Kugel äussern, die nun mit eben der Gewalt, als wäre sie unmittelbar angeschlagen worden, von den übrigen abfliegt, welche völlig ruhig bleiben. In diesem unmerklichen Augenblick sind alle diese Kugeln einzeln nach einander durch den Schlag zusammengepreßt worden, und haben sich wieder ausgedehnt, und einander mit gleicher Kraft gestossen, und bleiben daher liegen; die letztere aber, welche keine andre Kugel mehr vor sich hat, bewegt sich nach der Seite fort, wo sie keinen Widerstand mehr gegen sich hat. Man bemerkt dabey nicht, daß dieses im geringsten länger dauere, wenn drey, vier oder zwölfe, ja mehrere Kugeln zusammengelegt sind.

Die Theorie der Naturlehre beschäfftigt sich mit vielen Wahrheiten in Ansehung der Wirkungen der elastischen sowol, als der harten und weichen Körper auf einander, welche sich durch die Erfahrung so weit bestätigen, als es sich erwarten läßt, da, wie gesagt worden, die Natur uns keine vollkommen harte, oder weiche, oder elastische Körper giebt. Wir werden aber diese übergehen dürfen, und nur die Wirkung und den Gebrauch der Federkräfte zur Bewegung kleinerer oder grösserer Maschinen auf eine allgemeine Art erläutern.

Man wendet, wie bekannt, bey den Maschinen gewöhnlich die Federkräfte der gehärteten Metalle, und unter diesen vorzüglich des Stahls, an. Gewisse Arten von Holz, z. E. lange Stangen von Tannen, lassen sich auch dazu anwenden; doch leiden sie nicht ein so starkes Biegen, als die

Metalle. In vielen Fällen werden sie nicht so wol zu einer fortgesetzten Bewegung, als nur zum Andrücken eines Theils der Maschinen an den andern angewandt. Wenn man aber eine etwas lange fortdaurende Bewegung durch sie hervorbringen will, so muß die Feder ein langer und sehr biegsamer Körper seyn, der aus seiner natürlichen Figur in eine von derselben weit abweichende gebracht werden kann, aus welcher er sich nicht anders, als mit Verlauf einer geraumen Zeit, in seine vorige Figur wieder herstellet, da er mittlerweile auf einen ihm in etwas widerstehenden Theil der Maschine druckt oder zieht, und diesen in eine Bewegung setzt, welche sich wie die Kraft verhält, mit welcher die Feder sich wieder in ihre natürliche Figur zu setzen sucht. Von dieser Einrichtung sind die bekannten Uhrfedern. Allein es läßt sich leicht einsehen, daß diese Federn im Anfange ihrer Wirkung, da der Grad der Spannung der stärkste ist, mehr vermögen, als in der Folge, wenn sie sich ihrer natürlichen Figur schon mehr genähert haben. Wenn daher die Maschine einen immer gleichen Widerstand gegen dieselbe äussert, so wird ihr die Feder anfangs eine stärkere, und allgemach eine schwächere Bewegung mittheilen. Aus diesem Grunde müßten die von Federn getriebenen Uhren immer langsamer gehen, je mehr Zeit nach dem Aufspannen der Feder verläuft. Man bessert aber diesen Mangel durch die schneckenförmige Figur, welche man der Walze giebt, um welche die Kette oder Darmsaite gewunden ist, und auf welche die Feder als auf ein Rad an der Axe zieht. Wäre diese Walze cylindrisch rund, so würde sich auch die Kraft nicht verändern müssen, welche erfodert wird, um diese Walze, und zugleich das ganze Uhrwerk in Bewegung zu setzen, weil die Entfernung von dem Mittelpunct der Bewegung sich nicht ändert. Allein nun ist die Sache so bewandt, als wenn die Feder vermittelst der Kette immer auf ein andres und andres Rad zöge, und diese immer grösser im Halbmesser würden, und folglich dem Zuge mehr Kraft gäben,

gäben, je mehr die Kraft der Feder selbst abnimmt. Man sieht leicht ein, daß viele Kunst dazu gehöre, diese Schnecke so auszuarbeiten, daß sie nach dem Verhältniß, in welchem die Kraft der sich ausdehnenden Feder abnimmt, immer weiter werde. Die Uhrmacher haben ein hiezu dienliches Werkzeug, welches aber allein nicht dieselbe so genau, als nothwendig ist, ausarbeiten kann, zumal da keine Feder sich so genau gleichförmig zubereiten läßt, daß ihre ausdehnende Kraft gleichförmig abnähme. Es wird also ein zweytes Werkzeug erfodert, durch welches die Kraft einer jeden einzelnen Feder so abgewogen, und dem zufolge die Schnecke so zugerichtet werden kann, daß das ganze Uhrwerk mit einer immer gleichen Kraft in Bewegung gesetzt werde. Hierauf kömmt die Richtigkeit einer Uhr vornehmlich an, doch hilft die Bewegung der sogenannten Unruhe bey kleinern, und des Penduls bey grössern Uhren, kleinen Unrichtigkeiten in den übrigen Theilen der Uhr, welche ihren Gang ungleich machen würden, vornehmlich ab. Ich überlasse die Beschreibung der erwähnten Werkzeuge solchen Büchern, welche die Uhrmacherkunst ausdrücklich abhandeln, werde aber von der Bewegung des Penduls unten einige Erläuterungen anhängen.

Man wird hieraus das wichtigste, was bey dem Gebrauch der Federn bey Maschinen, die sich lange bewegen sollen, wahrzunehmen ist, einsehen. Sie führen, wie die Gewichte, die Unbequemlichkeit mit sich, daß sie nach einiger Zeit wieder, wie jene, aufgewunden, oder aufs neue gespannet werden müssen, und es giebt daher Uhren, die durch Gewichte oder Federn getrieben werden, einen grossen Vorzug, wenn diese Wiederherstellung ihrer Kraft in vielen Tagen nicht nothwendig wird, noch vortheilhafter aber, wenn, wie man nun auch erfunden hat, der Gang der Uhr auch währendem Aufziehen ungestört bleibt.

§. 66.

§. 66.

Ausser diesen Kräften, welche wir nun schon so lange als die bequemsten erkennen, die man zur Bewegung der Maschinen anwenden kann, zeigt die Natur Kräfte, welche zwar in vielen ihrer Wirkungen, die wir nicht völlig durchschauen, sehr wirksam sind, aber in der ausübenden Mechanik nur selten genützt werden. Vielleicht ist es einem künftigen Welt-Alter vorbehalten, auch diese mehr zu nutzen, als jetzo geschieht, und es ist gewiß nicht mehr Unwahrscheinlichkeit da, daß einmal die Kräfte der Electricität zur Hervorbringung gewaltiger Bewegungen werden angewandt werden, als diejenige, welche die Alten darinn würden gefunden haben, wenn man ihnen gesagt hätte, daß die Dünste des entzündeten Schwefels und Salpeters künftig die bewegende Kraft in den verderblichsten Werkzeugen des Krieges abgeben, oder daß die Kräfte der Dünste des siedenden Wassers künftig zur Bewegung einer grossen Wasser-Kunst würden angewandt werden. Es wird mir erlaubt seyn, von diesen Kräften das allgemeinste, was zur Beurtheilung ihrer Wirkungen leiten kann, hier beyzubringen.

Man kann diese Kräfte überhaupt unter dem Namen der anziehenden Kräfte begreifen. Die Natur äussert sie aber an verschiedenen Körpern und unter verschiedenen Umständen auf eine so verschiedene Art, daß wir, ungeachtet sie vielleicht alle aus einer Quelle entspringen, ausser der allgemeinen anziehenden Kraft, die electrische und magnetische Kraft noch einer besondern Untersuchung unterwerfen können.

Alles, was körperlich ist, scheint von der Natur etwas in sich zu haben, das es treibt, sich gegen alles andere körperliche zu bewegen, und sich mit demselben so nahe, als möglich, zu vereinigen. Man kann hievon nicht bestimmter und deutlicher reden, ohne in den Fehler zu verfallen, daß man die Art, wie? und die nähere Ursache, warum dieses geschiehet? bestimmen zu wollen scheint, welches uns doch die Natur bisher als ein in diesem Leben unauflösliches Geheim-

Geheimniß verheelt. Unterdessen enthält dieser Ausdruck das beste, was man zur Erklärung so vieler Bewegungen, durch welche die Welt besteht und sich erhält, sagen kann. Wir haben schon oben der Untersuchungen der Philosophen in Ansehung der Ursache der Schweere erwähnt. Newton hat dieselbe zuerst als eine allgemeine Eigenschaft aller Körper, die sie alle gegen einander in Bewegung setzt, erkannt, und es scheint ihm und seinen Nachfolgern eben so natürlich, der Erde, auf welche ein Stein zufällt, eine Bemühung, sich diesem Stein zu nähern, beyzulegen, als den Stein in Absicht auf die Erde schweer zu nennen. Hier zieht freylich die grössere Masse die so viel kleinere unendlich stärker an, allein es ist glaublich, daß die so viel grössere Erde sich gegen den Stein zu, wiewol äusserst langsam, bewegen würde, wenn dieser durch irgend eine Kraft zurückgehalten würde, daß nicht er sich zur Erde, wol aber die Erde sich zu ihm bewegen könnte. In der Schweere zeigt sich diese Kraft im Grossen, im Kleinen aber in ungemein vielen kleinen Bewegungen, welche die Natur selbst der Schweere entgegen hervorbringt, wenn Körper ungemein nahe gegen einander geführt werden. Die Naturforscher haben die deutlichsten Erfahrungen, die dieses entdecken, an engen gläsernen Röhrchen gemacht. Man nehme verschiedene derselben von ungleicher Weite, die aber auf beyden Enden offen sind, und setze sie aufgerichtet ins Wasser. Wenn sie inwendig gehörig rein sind, wird sich das Wasser nach einiger Weile in ihnen, seiner Schweere entgegen, in die Höhe gezogen haben, und in den engern Röhren höher, in den weitern niedriger stehen, und nicht wieder herabsinken. Wer indessen den cylindrischen Inhalt solcher Röhren nach geometrischen Gründen zu vergleichen weiß, wird finden, daß die höher stehende Menge Wassers in den kleinern Röhren weniger betrage, als in den weitern. Wenn die Röhren ungemein zart sind, steigt es zu einer ausserordentlichen Höhe. Wenn man zwo geschliffene Glasplatten mit einem Ende

dicht

dicht an einander, und gegen das andere Ende zu etwas von einander, und nun beyde in einem Gefäß mit Wasser aufrecht stellt, so wird das Wasser an der Oefnung des Winkels sich nur wenig in die Höhe ziehen, aber in dem Winkel selbst so hoch steigen, als nur immer die Glasplatten lang seyn mögen, weil es hier in dem Winkel auf eben die Art, als in einer unendlich zarten Röhre, steigen kann. Dieses alles ist lange wahrgenommen, aber von den ältern Naturkündigern lieber als eine Wirkung von dem Druck der Luft angesehen worden, welches sich aber widerlegt hat, da man unter der Klocke der Luftpumpe eben diese Versuche gemacht hat, und diese auf eben die Art ausgefallen sind. Man sieht leicht ein, daß mit dieser künstlichen Erfahrung die Wirkung der Natur sehr überein komme, welche man wahrnimmt, wenn man Körper, die in ihrer Zusammensetzung eine Menge Zwischenräume haben, die aber als Röhrchen in einander fortgehen, ins Wasser bringt, welches sich alsdenn in dieselben zieht, und, wie man es zu benennen pflegt, einsaugt, mit einer Gewalt, welcher nichts widerstehen kann. Man sieht täglich, daß ein ins Wasser gelegtes Stück Zucker bis oben aus vom Wasser durchdrungen wird. Man weiß von den meisten Arten Holz, daß sie das Wasser einsaugen, wenn sie von demselben umgeben sind, und von der Gewalt, womit es geschieht, giebt das einen augenscheinlichen Beweis, da man als ein Mittel, Steine zu spalten, in einen nicht gar tiefen Einschnitt derselben hölzerne Keile stößt, diese fleißig mit Wasser begießt, welches sich allgemach in die Keile zieht, und diese so gewaltsam ausdehnt, daß der Stein endlich nachgeben muß, und unter den Keilen aus einander berstet. Seile, wenn sie mit dem größten Gewichte beschweert sind, werden, wenn ihre Fasern einige Feuchtigkeit zwischen und in sich saugen, kürzer, und ziehen das schweere Gewicht merklich in die Höhe. Zween Beweise, daß diese Kraft im mechanischen Gebrauch nichts weniger als unnütz sey. Vermuthlich ist

eben

eben diese Kraft, mit welcher die Körper sich anziehen, die Ursache von dem Wachsen der thierischen Körper und Pflanzen. Vermuthlich bewirkt eben dieselbe den starken Zusammenhang der Theile aller Körper. Man sieht wenigstens keine andre Ursache von dem Zusammenhange sorgfältig polirter marmorner Platten, oder des Quecksilbers an den Spiegelplatten, von dem Anhängen kleiner Tropfen Wasser, oder selbst vom Quecksilber an dem Glase, und so vielen andern täglich vorkommenden Erscheinungen. Aber eben so wahrscheinlich ist auch die Ursache der Auflösung der Körper durch allerley flüßige mit starken Salzen angefüllte Dinge. Die Chymie, eine der nützlichsten Wissenschaften, beschäfftigt sich mit einer Menge Versuchen dieser Art, welche alle insgesammt sowol, als einzeln, beweisen, daß die scharfen Salze des Scheidewassers und anderer Auflösungsmittel von den Körpern mit einer grossen Gewalt angezogen werden, in die Zwischenräume der Körper dringen, und den Zusammenhang derselben aufheben, da sie denn die feinen Theile dieser Körper so an sich halten, daß sie nun sich ohne Sinken durch die ganze Masse des flüßigen vertheilt erhalten. So schwimmt das im Scheidewasser aufgelösete Silber in demselben, und das Gold in dem Königswasser. Zum deutlichern Beweise aber dienet die Erfahrung der Chymisten, daß, wenn ein Metall in ein solches Auflösungs-Mittel, welches dasselbe vorzüglich angreift, eingeworfen wird, nachdem schon vorher ein andres darinn aufgelöset worden, dieses die Farbe nicht nur verändert, sondern auch das erste Metall in einem Pulver zu Boden sinken läßt, indem es seine auflösende Kraft nun vorzüglich auf jenes ausübet. In andern Fällen machen dergleichen sonst auflösende Mittel einen dichten Körper aus einem flüßigen, wenn sie mit demselben gemischt werden. Der Salpetergeist, das Vitriolöl und ein sehr starker Weingeist verdicken sich mit dem Eyweiß. Wieder in andern Fällen reiben sich die scharfen Salze so heftig an den Theilen der mit ihnen

gemisch-

gemischten Körper, daß daraus ein Gähren und Aufbrausen, eine empfindliche Wärme, ja wol gar eine lebhafte Flamme entsteht. Wenn Vitriolöl und Salpetergeist gemischt, und dann zum Terpentinöl gegossen wird, entsteht sogleich ein Aufbrausen, und nach wenig Augenblicken eine lichte Flamme. Oft scheinen Körper eine entgegengesetzte Kraft, mit welcher sie sich vielmehr zurückstossen, als anziehen, zu äussern. Das Quecksilber haftet an allen Metallen, nur an dem Eisen nicht. Das Wasser hängt sich leicht an dem Glase an, und steigt von seiner horizontalen Oberfläche gegen den Rand des Glases in die Höhe. Aber das Quecksilber erhebt sich vielmehr von dem Rande eines Glases weg, und hebt sich nach der Mitte des Gefässes zu. Allein vermuthlich liegt dieses nur daran, daß die Theile solcher Körper sich unter einander stärker anziehen, als sie von denen, die sie berühren, angezogen werden. Eben das Quecksilber haftet dennoch immer etwas an dem Rande des Glases, wie man in den Röhren der Barometer deutlich siehet, und die Erfahrung zeigt, daß es an einigen Arten Glas stärker als an andern haftet. Wenn man ein wenig Quecksilber auf einer Glasplatte in kleine Tropfen zerreibt, so werden diese auch dann nicht von dem Glase fallen, wenn man dasselbe umkehrt, sondern eben so gut, als Wassertropfen, an demselben hängen bleiben. Ja man wird so gar, wenn man durch das Glas von obenher sieht, die Quecksilberkügelchen gegen das Glas ein wenig platt angedrückt oder vielmehr angezogen sehen.

§. 67.

Die electrische Kraft unterscheidet sich darinn von der allgemeinen Anziehung den äusserlichen Erscheinungen nach, daß sie sich eben so wirksam im Zurückstossen, als im Anziehen der Körper, beweiset. Man hat lange vor unsern Zeiten, ehe man die dahin gehörigen Versuche so sorgfältig und vielfach gemacht, bemerkt, daß, wenn harzigte Körper, und insonderheit der Bernstein, welcher bey den Griechen

Electron hieß, gerieben wurden, dieselben leichte in ihrer Nachbarschaft befindliche Körper anzogen. Man hat aber in diesem Jahrhundert diese Eigenschaft an mehrern Körpern, insonderheit an dem Glase, bemerkt, und dabey wahrgenommen, daß, wenn diesen Körpern durchs Reiben eine solche Kraft mitgetheilt wird, dieselbe sich durch andre ihnen nahe gelegte Körper so weit verbreite, daß man noch nicht sagen kann, wo diese Mittheilung aufhöre. Man hat aber ferner bemerkt, daß diejenigen Körper, in denen sich durch Reiben eine solche Kraft erregen läßt, dieselbe nicht durch sich in andre Körper fortgehen lassen. Man nennt diese für sich electrische Körper, unter welchen das Glas, die Harze, Schwefel, Seide und die Luft die bekanntesten sind. Hingegen verlieren diejenigen, welche sie durch Mittheilung von andern Körpern leicht annehmen, sie eben so leicht durch die Berührung mit andern Körpern, und daher geht, wenn sie mit dem grossen Erdkörper in einer Verbindung liegen, welche nicht etwan durch Körper der vorhin beschriebenen Art unterbrochen wird, alle ihnen mitgetheilte Kraft so geschwinde in denselben über, daß sie sich in diesen nicht anhäufen und merklich werden kann. Körper dieser Art heissen nicht für sich electrische, und unter ihnen zeigen die Metalle und das Wasser diese Eigenschaft am deutlichsten. Will man also die electrischen Erscheinungen deutlich wahrnehmen, so gehört folgende Einrichtung dazu: Eine gläserne Kugel oder Cylinder, welche an der Hand, oder irgend einem andern scharf anliegenden, aber vorher sorgfältig getrockneten Körper, durch Umdrehen gerieben wird; und eine metallene Röhre, Stange oder Kugel, welche, nahe an die Maschine gebracht, die electrische Kraft von ihr empfängt, aber deswegen von Seide, oder einem andern für sich electrischen Körper getragen werden muß, damit nicht die ihr mitgetheilte Kraft durchs Berühren in den Erdboden übergehe. An diese bevestigt man eine Kette oder Draht von Metall, welche die Kraft, wohin man will, leitet,

aber ebenfalls keinen Körper der zweyten Art berühren darf, wie denn auch der letzte Körper, auf welchen sie zugeleitet wird, aus eben der Ursache auf Glas oder Harz gestellt werden muß. Auf diese Art kann sich die electrische Kraft in denen Körpern, welche mit der Maschine in Verbindung stehen, in hohem Grade anhäufen. So bald nun einer derselben von einem andern Körper, der die Kraft noch nicht hat, berührt wird, fährt diese mit einem deutlichen Lichte und einer gewissen dem Brennen ähnlichen Empfindung in denselben über, und läßt sich durch wenige Berührungen bald erschöpfen. Sie dürfen sich aber nicht völlig berühren, sondern dieser Uebergang der Kraft erfolgt schon in einer kleinen Entfernung, die um so viel grösser seyn kann, je stärker die Kraft in den electrischen Körpern ist. Befinden sich zween Körper, deren einer electrisirt, der andre nicht electrisirt ist, in einer etwas grössern Entfernung, als in welcher sie einander die Kraft mittheilen können, und ein dritter dazwischen, welcher sich frey von dem einen zu dem andern bewegen kann, so wird er bald zu dem electrisirten, bald von demselben ab zu dem nicht electrisirten übergehen, und diesem die Kraft, die er von jenem erlangt hat, mittheilen. Dieses ist das Hauptwerk in denen electrischen Versuchen, mit welchen sich die Naturkündiger in den ersten Jahren unterhalten haben, nachdem man auf diese Sache eifriger, als die Alten, verfallen ist. Allein nach verschiedenen Jahren, da man überall die Versuche auf allerley Weise zu verändern sich bemühete, gerieth Musschenbroeck auf den Einfall, einer mit dünnem Blech eingefaßten Flasche voll Wasser, in welches durch den Stöpsel eine metallene Stange herab ging, die electrische Kraft mitzutheilen. Da er nun diese Flasche mit einer Hand angriff, und mit der andern die Kette berührte, folglich die electrische Kraft gleichsam im Circul von der Kette zur Kette herum kommen konnte, empfand er eine insonderheit in den Gelenken der Arme höchst empfindliche Erschütterung. Dieser Versuch ist seit-

dem

dem unzählige mal wiederholt, und kann bey starken Maschinen, welche die Kraft in eine sehr heftige Bewegung setzen, dem Leben gefährlich werden, wie denn in der That der Altdorfische berühmte Lehrer der Mathematik, Doppelmayr, durch einen solchen Versuch gelähmt, und in diesem Zustande drey Jahre nachher gestorben ist. Bey diesen Versuchen hat sich das Neue gezeigt, daß sich die electrische Kraft in dem Wasser sowohl, als zwischen dem Glase und der metallenen Platte, bis zu einem hohen Grade anhäuft, und da in den vorhin beschriebenen Versuchen die Maschine nur bis zu einem gewissen Grade die Kraft zu erregen scheint, so kann sie in diesen Umständen dieselbe bey jeder Umdrehung der Kugel noch beständig verstärken. Anstatt daß sie bey jenen durch die Berührung eines electrischen Körpers sogleich in denselben übergeht und sich verliert, wenn derselbe, ohne Seide oder Harz u. dgl. zwischen sich und dem Erdboden zu haben, denselben berührt, so bleibt sie hier ruhig, und die Person, welche die Flasche berührt, mag auf freyer Erde stehen, ohne daß sie deswegen aus der Maschine oder Flasche entwischt. So bald aber ihr durch den Körper der die Flasche berührenden Person, oder durch irgend andre Wege, ein Weg zur Wiederkehr gegen die Maschine, oder die Kette, oder die Flasche selbst, geöffnet wird, so bezeigt sie sich plötzlich wirksam; und wenn der Weg, durch welchen sie sich herum bewegen muß, auch noch so lang ist, da man unter andern Ketten von 2000 Fuß Länge angebracht hat, so geschieht doch alles in einem unmerklich kleinen Augenblick, und eine Person, welche in diesem sogenannten electrischen Circul die erste an der Flasche ist, wird mit der letzten, welche die Maschine berührt, die Empfindung zugleich, ohne daß der geringste Zwischenraum der Zeit verspürt würde, haben. Bey dem allen aber geht die Kraft den kürzesten Weg, und wenn man die Enden einer Kette zwischen den Fingern beyder Hände faßt, die Kette aber kürzer, als der Weg von einer Hand zur andern

durch den Körper ist, wird dieser nichts von dieser Erschütterung empfinden. Ich würde die Beschreibung dieser Versuche mit Figuren erläutern, wenn nicht die electrischen Maschinen so bekannt wären, und meine Absicht nur darauf ginge, meinen Lesern das allgemeinste dieser Versuche auf eine solche Art zu erläutern, daß sie, wenn ihre Neugierde sie zu dergleichen Versuchen führt, dieselben überhaupt beurtheilen können.

Es ist eine wichtige Frage, was für eine Substanz diejenige sey, welche in diesen Versuchen eine so mächtige Wirkung äussert. Es ist wol nicht daran zu zweifeln, daß es eine gewisse flüßige Materie sey, die in denselben in Bewegung gesetzt wird, und vielleicht durch die ganze Schöpfung, wenigstens durch alle Körper der Unterwelt, vertheilt ist, und durchs Reiben in eine stärkere Bewegung gesetzt wird. Diese Materie läßt sich von allen Sinnen empfinden. Man fühlt sie wie einen gelinden Hauch in der Nachbarschaft stark electrisirter Körper. Man riecht in denen Zimmern, wo die Versuche gemacht werden, einen Geruch wie vom Knoblauch oder von den Katzen, welche Thiere einen hohen Grad der Electricität bey sich zu führen scheinen, die sich sogleich zeigt, wenn man ihre Haare im Dunkeln aufwärts streicht. Man sieht die Flammen des electrischen Funkens und hört ihr Knattern. Sogar hat sie einen etwas herben Geschmack, wenn man den Mund nahe bey einem stark electrisirten Körper öffnet. Daß diese Materie nicht die Luft sey, zeigt sich aus den Versuchen im luftleeren Raum, in welchem sie sich viel wirksamer, als in freyer Luft, beweiset. Man hat aber viele Gründe, sie für einerley mit der Materie des Lichtes und des Feuers zu halten. Man sieht sie in hellen Funken bey jedem Versuche, und diese Versuche vermögen sogar ein wirkliches Feuer hervorzubringen, wenn eine stark electrisirte Person den Finger in nicht electrisirten Weingeist taucht.

Man ist nun auch seit verschiedenen Jahren auf Versuche gerathen, welche es deutlich beweisen, daß die Materie des Blitzes keine andre, als die electrische, sey. Franklin, den sein Aufenthalt in England und seine Theilnehmung an den öffentlichen Angelegenheiten auch den nicht gelehrten näher, als seine Schriften, bekannt gemacht haben, bemerkte, daß eiserne Stangen, welche in freyer Luft aufgestellt sind, wenn Gewitter-Wolken in derselben aufziehen, ohne einiges Reiben electrisch werden, wenn sie auf einem Grunde von Harz oder Glas stehen, daß sie diese Kraft aber nach jedem Blitz auf eine Weile verlieren. Es zeigt sich eben dieses sehr deutlich an einem papiernen Drachen, den man bey einer solchen Witterung in die Höhe steigen läßt, wenn der Faden, der ihn hält, sich an einem metallenen Draht endigt, der an einer gläsernen Handhabe bevestigt ist, welche die Communication der electrischen Materie mit dem Erdboden unterbricht. Die Naturkündiger haben eine Einrichtung erdacht, durch welche in einem Zimmer, ohne Zuthun einer electrischen Maschine, die Electricität der Luft bey annähernden Gewittern wirksam gemacht, und ihr Entstehen, Zu- und Abnehmen genau beobachtet werden kann. Eine Beobachtung, die dem Petersburgischen Professor Richmann das Leben kostete. Nollet hat sie in seinem siebenden Briefe über die Electricität, S. 171. der Pariser Ausgabe vom Jahre 1753, und auf dem 4ten Kupfer, deutlich und umständlich beschrieben.

Man kann hieraus viele Erscheinungen erklären, welche sich bey dem Einschlagen des Blitzes bemerken lassen. Dieser schlägt wahrscheinlich deswegen so oft in hohe Gebäude und in die Masten der Schiffe, weil diese den von der electrischen Materie angefüllten Wolken am nächsten sind, welche durch dieselben, als durch einen Leiter, in die nicht so sehr electrische Erde niederfahren. Hiezu tragen die auf deren Spitzen aufgerichtete Stangen der Windflügel und andre Zierrathen vermuthlich vieles bey. Denn die electrische

Materie dringt vorzüglich in die Metalle, und folgt der Leitung, welche ihr dieselben geben, am liebsten. Wenn daher der Donner in ein Gebäude einschlägt, welches unter der Vergypsung eine Menge eiserne Dräte hat, so folgt die Materie gewöhnlich diesen Dräten durch die ganze Decke. Eine Erfahrung, welche wir vor einigen Jahren bey dem Einschlagen des Blizes in die Altonaische Stadt-Kirche gesehen haben. Man hat aber eben auf diese Wahrnehmung eine Erfindung gegründet, durch welche man die Gebäude für dem Einschlagen des Blizes sicher zu stellen gehofft hat. Man läßt neimlich von einer Stange am Giebel der Gebäude einen dicken metallenen Draht oder etwas breite Platte herab gehen, durch welche die electrische Materie des Blizes, wenn sie ja auf diese Gebäude zutreffen sollte, längst dem Faden herab in die Erde geleitet wird, ohne den feuerfangenden Theilen des Gebäudes Schaden zu thun. Man muß aber nicht glauben, die unermeßliche Menge electrischer Materie aus den Wolken ganz damit abführen zu können, wie wol anfangs die Naturkündiger gehofft haben. Eben ein solcher Drat, der längst den Masten der Schiffe in das Wasser hinabhängt, würde den Schiffen eben den Dienst thun können. Man darf dieses nicht für eine leere Grille der Naturkündiger ansehen, seitdem gehäufte Erfahrungen gezeigt haben, daß, wenn der Bliz in grössere oder kleinere Gebäude fährt, die Wirkungen desselben unmerkbar bleiben, so lange das Eisenwerk des Gebäudes in einem Fortgange dem Bliz seinen Weg bestimmt, und daß sie nur da fürchterlich werden, wo das Eisenwerk aufhört, und der Bliz auf Körper anderer Art, welche die electrische Materie nicht so stark an sich halten, zufährt. Eine Zurüstung, welche ihn in diesem Wege erhält, bis er die Erde, oder noch besser ein unterirdisches Wasserbehältniß, erreicht, muß daher natürlich allen den Schaden abhalten, welchen dessen irrender Ausbruch, falls er sonst in dem Gebäude selbst erfolgt, diesem und seinen Bewohnern thun könnte. Man wird

sich

sich darüber umständlicher aus einer im Jahre 1768 hier abgedruckten Schrift des Herrn Dr. Reimarus unterrichten können, welche die gute Folge gehabt hat, daß seitdem an verschiedenen der Hamburgischen Thürme dergleichen Ableiter des Gewitters angebracht worden sind.

Diese häufigen Versuche, welche die starke Wirkung der electrischen Materie beweisen, haben freylich einige Hoffnung gegeben, daß man die electrische Kraft zur Hervorbringung schneller und starker Bewegungen würde brauchen, ja wol gar electrische Geschütze würde erfinden können. Allein bis jetzo ist kein Anschein dazu. Sollte unterdessen ein künftiges Welt-Alter weiter darinn kommen, so würde die Untersuchung der electrischen Kraft weit wichtiger für die Mechanik und überhaupt für das bürgerliche Leben seyn, als sie bisher dafür angesehen werden kann.

§. 68.

Wenn die Fabel von Mahomets eisernem Sarge, der zwischen zween grossen Magneten in freyer Luft schweben soll, wahr wäre, so würde freylich die magnetische Kraft als eine beträchtliche in der Mechanik nutzbare Kraft anzusehen seyn. Allein nun kann dieselbe keinesweges in die Reihe derselben gesetzt werden, und es würde vergebens seyn, einen andern Vorwand, warum ich hier von ihr zu handeln unternehme, zu suchen, als diesen, daß sie ihrer seltsamen Erscheinungen wegen unsrer Wißbegierde höchst würdig, und, in Absicht auf die Schiffahrt, eines der wichtigsten Geschäfte der Erdbewohner, höchst nützlich ist.

Der Magnet ist ein Stein, in dessen chymischen Auflösung Eisentheilchen, Erde, Oel, Salze, und zuweilen andre metallische Theile wahrgenommen werden. Er wird hauptsächlich in den nordischen Gebürgen angetroffen, und selten in grossen Stücken gebrochen. Diese Stücke aber zeigen in ihrem natürlichen Zustande eine Kraft, das Eisen an sich zu ziehen, welche hauptsächlich in zwo entgegengesetzten Seiten merklich wird, sich aber alsdenn viel stärker zeigt,

 wenn

wenn man an diese Seiten eiserne Platten, welche unten einen viereckigten Fuß haben, der vor dem Magnet hervor tritt, anlegt. Man nennet dieses eines Magnet armiren, und die Einfassung selbst die Armatur desselben. Wenn der Magnet in diesem Zustande an einem Faden frey aufgehangen wird, so wendet er sich mit der einen Seite gegen Norden, mit der andern gegen Süden, und bleibt in dieser Lage ohne äusserliche Störung hängen. Man nennet daher diese Seite, und insbesondre den Fuß der Armatur auf dieser Seite den Nordpol, die entgegenstehende Seite aber den Südpol des Magnets. Man hat lange geglaubt, daß diese Kraft nur in dem erwähnten Stein allein anzutreffen wäre. Allein neuere Erfahrungen haben gezeigt, daß wenig Mühe dazu gehört, dem Eisen überhaupt eine solche Kraft mitzutheilen. Man kann sie durch ein Bestreichen in gewisser Richtung länglichten, oder wie ein Hufeisen gekrümmten, ausdrücklich dazu verfertigten Stangen geben, ohne daß ein natürlicher Magnet sie berühren dürfte. Man nennt diese Stangen in einem solchen Zustande künstliche Magnete. Gerade Stangen, die auf eine gewisse Art gestossen oder geschlagen werden, bekommen diese Kraft ebenfalls. Ein jedes Stück Eisenfeile bekömmt sie sogar in dem Augenblick, da die Feile es ablöset, und hat seine beyden Pole. Selbst die Natur thut dieses ohne Zuthun menschlicher Hand, und man hat schon im vorigen Jahrhundert bemerkt, daß gerade Stangen, welche lange Jahre perpendicular gegen die Erde ruhig stehen, magnetisch werden, und an dem untern Theile einen Nordpol, an dem obern einen Südpol zeigen, und andre, wenn sie lange Zeit gerade von Süden in den Norden liegen, ebenfalls ihre verschiedenen Pole bekommen. Das Feuer scheint diese Wirkung der Natur zu befördern. Denn eiserne Geschirre, welche man im Feuer braucht, und neben dem Feuer hängt, wenden sich nach nicht gar langem Gebrauch, wenn sie wagrecht aufgehangen werden, mit dem untern Theile gegen Norden.

Man

Man hat zwar ausser dem Eisen noch verschiedene andre Körper, auf welche der Magnet wirkt. Allein es ist dieses wahrscheinlich denen Eisentheilchen beyzumessen, die sie in sich halten, und welche durch die ganze Natur vertheilt sind. Man braucht daher den Magnet, als ein Mittel, um zu untersuchen, welche Körper eisenhaltig sind oder nicht, und diese Versuche zeigen die Gegenwart des Eisens unter andern deutlich in der Asche der mehresten Pflanzen, und selbst in der Asche des Bluts von Menschen und Thieren.

Die leichteste und kürzeste Art, dem Eisen die magnetische Kraft mitzutheilen, ist, wenn man dasselbe auf seinen beyden Enden mit den verschiedenen Polen eines Magnets bestreicht. Hier zeigt sich etwas, das bey der Anziehung des nicht auf diese Art zubereiteten Eisens nicht wahrgenommen wird. Dergleichen Stangen bekommen ihre verschiedenen Pole, und wenn man sie nun aufs neue gegen den Magnet bringt, werden sie nicht, wie vorhin, an jedem Puncte angezogen, den man an den Magnet bringt, sondern nun wird der Nordpol des Magnets den Südpol der magnetisirten Stange anziehen, den Nordpol aber zurückstossen. Dieses Zurückstossen sowol als das Anziehen zeigt sich sehr deutlich, wenn man den Magnet mit dem einen oder dem andern Pole gegen die verschiedenen Enden oder Pole einer leicht beweglichen Magnet-Nadel hält. Man kann es auch deutlich an den Eisenfeilspänen bemerken, wenn man eine Menge derselben über ein Glas oder Papier streuet, unter welchem ein Magnet gehalten wird, und an dasselbe sanfte anschlägt. Alsdenn richten sich die über den Polen des Magnets befindlichen Stückchen in die Höhe, da die übrigen sich, eben als wenn sie von einem Strome flüßiger Materie, die von dem einen Pol zum andern gienge, in diese Lage gebracht wären, der Länge nach, aber in krummen Linien, legen. Kehrt man den Magnet unter dem Glase plötzlich um, so wird man wahrnehmen, daß die Feilspäne über den Polen desselben sich eben so geschwinde niederlegen,

und wieder auf das Ende richten, welches vorher nach oben gestellt gewesen war.

Von allen diesen Wahrnehmungen ist keine der menschlichen Gesellschaft so nützlich geworden, als diese, daß der Magnet, so oft er sich frey bewegen kann, eine gewisse Lage vom Süden in Norden annimmt. Man weiß den Vortheil, den die Schiffahrt davon hat, zu gut, als daß ich weitläuftig davon reden dürfte. Ich will nur die Geschichte dieser Erfindung mit kurzem erwähnen. So bekannt den Alten der Magnet, und seine Kraft das Eisen anzuziehen war, so scheint doch ein glücklicher Zufall den Morgenländern früher als den Abendländern die demselben natürliche Richtung gegen Norden bekannt gemacht zu haben. Sie haben wenigstens dieselbe viel früher in der Schiffahrt genützt, aber auf eine solche Art, daß sie die magnetisirte Nadel auf ein Stück Korck hefteten, und dieses in einem Gefäß mit Wasser schwimmen liessen, da es denn freylich, wenn es in der Mitte ruhig schwimmt, sich gegen Norden ungefähr wendet, aber durch das anhängende Wasser in seiner freyen Bewegung sehr gehindert wird. Es wird aber, wie alle in einem nicht gar grossen Gefässe schwimmende Körper, gegen den Rand zu treiben, und hier seine freye Wendung verlieren, bey starker Bewegung des Schiffs aber muß es vollends schweer fallen, es lange genug in der rechten Lage zu erhalten. Es ist zu verwundern, daß sie nicht sehr bald auf die weit bequemere Einrichtung, welche die Europäer nach der Zeit diesem Werkzeug der Schiffahrt gegeben haben, verfallen sind, und noch mehr muß man sich wundern, daß die Chineser, welche die Europäischen Compasse so gut kennen, noch jetzo sich immer mit der alten einfältigen Einrichtung behelfen. Aus den Morgenländern scheint diese Erfindung in unsre Gegenden zuerst durch die ältesten Reisenden, welche den Orient besucht haben, gekommen zu seyn. Man findet die ersten Spuren davon in einem alten französischen Gedichte, das man nicht später, als in die

Mitte

Mitte des 13ten Jahrhunderts, setzen kann. Dennoch wird ein Italiäner Flavio Gioia, oder Giri, mit grosser Gewißheit für den Erfinder des Compasses um das Jahr 1302 ausgegeben. Er muß in der That ein grosses Verdienst um den Compaß haben. Denn seine Vaterstadt Melphi, oder Amalfi, im Neapolitanischen hat noch jetzo zum Andenken dieser Erfindung einen Compaß zum Wapen, und genießt gewisse Freyheiten, die sich auf das Verdienst dieser Erfindung beziehen. Vielleicht hat er zuerst die Magnet-Nadel in ihrer Mitte beweglich aufgehangen. Vielleicht hat er auch schon die Rose daran bevestigt, welche die verschiedenen Winde so bequem zugleich mit dem Norden zeigt. Doch eignen sich die Franzosen die Erfindung der Rose aus dem Beweisgrunde zu, weil, so weit als man zurücksuchen kann, die französische Lilie den Nord angezeigt hat. Es scheint aber auch, als wenn die Teutschen oder wenigstens die Niederländer einigen Anspruch auf dieselbe machen könnten, da die Namen der Winde auf allen Compassen unstreitig teutschen Ursprunges sind. Allein die Erfindung, diese Magnet-Nadel in einer doppelt aufgehängten Büchse sich drehen zu lassen, welches dieselbe bey allen Bewegungen des Schiffes so ruhig erhält, massen sich die Engländer an. Europa hat von dieser Erfindung den Vortheil gehabt, daß sich seine Schiffahrt, die ohne den Compaß nur längst den Ufern her geführt werden konnte, seitdem in die entferntesten Länder erstreckt hat, und eine Hälfte der Erdfläche, von welcher unsre Vorfahren nichts wußten, seitdem uns eben so bekannt, als die nächstbelegenen Länder, geworden ist.

Allein dieser grosse Vortheil ist mit einer Unbequemlichkeit begleitet, die von der Natur selbst herrührt. Es ist wahr, daß die Magnet-Nadel sich mehr nach dem Norden, als nach irgend einer andern Gegend, richte, aber sie weicht doch von dem eigentlichen Norden fast in allen Gegenden der Erdfläche merklich ab. Sie zeigt jetzo in unserm Hamburg ungefähr 18 Grade gegen Westen. Sie weicht in

der

der Nordsee sowol als in der Ostsee merklich davon ab. Es giebt Gegenden der Erd- und Meeresfläche, in denen sie eben so weit auf die andre Seite gegen Osten zu hinauszeigt. Man sieht leicht ein, wie irrig die Fahrt eines Schiffes laufen würde, wenn er unwissend dieses Umstandes die Meere durchschiffen wollte. Er würde, wenn er die Gegend, wohin die Lilie seines Compasses zeigt, allemal für den wahren Nord halten wollte, nach einer ganz andern Gegend, als wohin er gedenkt, segeln, und sowol diese verfehlen, als auch zu seinem Unglück Land finden, wo er es nicht vermuthet. Er muß also in allen Meeren, die er durchsegelt, entweder seinen Compaß durch andre astronomische Wahrnehmungen, die ihm den wahren Nord zeigen, berichtigen, wozu aber nicht immer der Himmel heiter, und das Schiff ruhig genug ist, oder er muß zum voraus unterrichtet seyn, wie weit an dem Orte, wo er sich befindet, die Magnet-Nadel von dem wahren Nord abweiche. Dieß muß ihm durch die Erfahrungen anderer Seefahrenden bekannt werden, und man findet daher die See-Reisebeschreiber so aufmerksam auf diese Sache, daß sie an so vielen Orten die Abweichung der Magnet-Nadel nach ihren Bemerkungen anzeigen. Halley war schon in dem Anfange dieses Jahrhunderts durch die häufigen Bemerkungen der Reisenden in den Stand gesetzt, eine Charte zu verzeichnen, auf welcher er diese Abweichung für alle Länder und Meere der Welt, theils zufolge diesen Bemerkungen, theils nach gewissen Muthmassungen, welche ihm sehr zuverläßig schienen, anzeigte. Man wird auf dieser häufig abgestochenen und in viele Bücher eingetragenen Charte eine Linie, die den Erdboden rings umgiebt, bemerken, in welcher die Magnet-Nadel gar keine Abweichung hat. Eine solche Charte könnte freylich allem Nachtheil, der aus der Abweichung der Magnet-Nadel für die Schiffahrt entstehen kann, reichlich abhelfen, wenn diese Abweichungen sich immer genau so verhielten. Allein zum Unglücke verändern sich diese von

Zeit

Zeit zu Zeit, und, wie bey genauen Wahrnehmungen befunden ist, in einem Tage von Stunde zu Stunde. Doch ist eine Kleinigkeit, die auf der See nie sicher bemerkt werden kann, für die Schiffer nicht beträchtlich. Sie wird in unserm Hamburg nach einigen Jahrhunderten eben so weit gegen Osten abweichen, als sie nun gegen Westen zu abweicht. Mittlerweile wird eine Zeit seyn, da sie gar nicht abweicht. Doch wird sie immer gegen den Norden wieder zurückkehren. Es ist eben so mit andern Gegenden des Erdbodens bewandt. Könnte man eine gewisse Regul, nach welcher sich diese Abweichungen verändern, herausbringen, aus welcher sie sich auf jede gegebene Zeit für jeden Ort der Erde vorhersagen liessen, so würde auch diesem Mangel völlig abgeholfen seyn. Halley nahm, um eine solche Regul herauszubringen, an, daß die Erde inwendig hohl, und in ihr ein grosser beweglicher Magnet befindlich wäre, dessen Axe und Pole nicht vollends mit der Axe und den Polen der Erde einerley Lage hätten. Dieser Magnet wende sich langsam um und mit seiner Axe, und lenke alle Magnete und magnetisirte Körper, die eine freye Lage hätten, in eine Lage, die mit der Lage seiner Pole überein käme, aber die von Norden nach Süden gehende Linie bald unter diesem bald jenem Winkel schnitte. Es ist wahr, daß die Wahrnehmungen grossentheils mit dieser Voraussetzung übereinstimmen. Allein je mehr dieselben gehäuft sind, desto mehr Abweichungen finden sich, welche keine Hoffnung übrig lassen, daß man jemals hier eine allgemeine Regul finden werde. Diese Abweichung ist auch, wenn sie sorgfältig beobachtet wird, an jedem Tage kleinen Veränderungen unterworfen, wenn sie gleich im ganzen für längern Zeiten die von Halley angenommene Gleichförmigkeit beybehält. Indessen wird diese Schwierigkeit in den Meeren um Europa, welche so häufig befahren werden, minder erheblich, als man dem ersten Ansehen nach glauben mögte. Die Veränderung in der Abweichung geht im Ganzen so langsam fort, daß der Schiffer

ser keine Gefahr läuft, wenn er eine in einem Jahre bemerkte Abweichung noch in dem folgenden als richtig annimmt. Eine Veränderung von einem Grade kann ihm nicht sehr gefährlich werden, zumal da es unmöglich ist, das Schiff so genau in die rechte Linie zu richten, daß man für einen Fehler von einem Grade in der Richtung von dessen Wege sicher seyn könnte, oder es in derselben lange zu erhalten, da die Stürme des Meers, und ein schräge einfallender Wind, es ohn Unterlaß aus seiner Lage treiben.

Es ist bey den Magnet-Nadeln, wie man leicht erachten kann, durchaus nothwendig, daß sie auf der Spitze, die sie trägt, wagrecht aufliegen. Allein man hat bey denselben schon lange bemerkt, daß, wenn sie auch mit der größten Sorgfalt dazu ausgearbeitet werden, und vollkommen wagerecht liegen, ehe ihnen die magnetische Kraft mitgetheilt wird, sie nicht mehr die Wage halten, nachdem sie bestrichen worden, sondern sich hier mit der nordlichen, dort mit der südlichen Spitze, nachdem sie in diese oder jene Gegend der Erde gebracht werden, senken. Man nennt dieses die Inclination der Magnet-Nadel, und man hat auch von dieser bemerkt, daß sie in einerley Gegend der Erde veränderlich ist. Bisher sind alle Versuche, den Magnet-Nadeln diese Unvollkommenheit zu benehmen, vergeblich gewesen; aber sie ist auch der Schiffahrt bey weitem nicht so nachtheilig, als die vorhin beschriebene Abweichung derselben. Ja man hat sie so gar zur Erfindung der Meereslänge anwenden wollen.

Achter Abschnitt.

Nöthige Bemerkungen und Ueberlegungen bey dem Maschinenwesen.

§. 69.

Nur wenige Maschinen werden für den Gebrauch des bürgerlichen Lebens in der Absicht angelegt, die Körper, auf welche

welche sie wirken, in Ruhe zu erhalten, und eine gewisse Kraft mit einer gewissen Last oder Widerstande ins Gleichgewicht zu setzen. Der Lehrer der Mechanik begnügt sich damit, seinen Lehrlingen die Maschinen in diesem Zustande zu zeigen, ohne jedesmal sie von demjenigen zu belehren, was nun mit ihnen vorgehen mögte, wenn die Kraft, die auf dieselben wirkt, aus einer todten eine lebende würde. Allein in der Ausführung solcher Maschinen will man durch die Bewegung derselben gewisse Wirkungen beschafft sehen. Mit dieser Bewegung kann man es nun gut oder übel treffen, und im letzten Fall trifft man es gewiß auch nicht mit der Wirkung, die man sich von der Maschine versprach. Manches Gewerk geht deswegen nicht von statten, weil die zu dessen Behuf angelegten Maschinen ihre Dienste nicht hinlänglich thun, wenn sie gleich ganz den gewöhnlichen Vorschriften gemäß angelegt sind, und der mechanischen Rechnung nach ihre Wirkung überflüßig leisten sollten.

Ich habe in dieser Mechanik mir zum Hauptzweck gesetzt, keine mir entstehende practische Anmerkung aus der Acht zu lassen, welche Personen, die auf ihre Gefahr und Unkosten Maschinen anlegen, vortheilhaft seyn, und sie vor schädlichen Irrthümern, für welche sonst kein Handbuch der Mechanik warnt, sicher stellen kann. Das, was ich in dem sechsten Abschnitt von denen Hindernissen, welche die Wirkung der Maschinen stören, und in dem siebenden zur Beurtheilung und Auswahl der bey den Maschinen angewandten Kräfte beygebracht habe, kann denjenigen, die sich diese Warnungen merken wollen, in manchem Fall sehr wichtig werden. Aber wie vieles bleibt mir nicht übrig von denen Fehlern, die in der ganzen Zusammensetzung einer Maschine entstehen können, und von der dagegen anzuwendenden Behutsamkeit, zu sagen, was in diesen beyden Abschnitten seinen Ort nicht fand?

§. 70.

Die größte Vollkommenheit, welche man einer Maschine geben kann, ist diese, wenn sie mit Anwendung der geringsten Kraft die größte Wirkung hervorbringt. Die Kraft, welche man bey einer Maschine anwendet, kostet dem Eigner derselben in den mehresten Fällen etwas. Wenn sie ihm nichts kostet, (wie denn der Müller für sein Wasser und den Wind, die seine Mühle treiben, nicht jedesmal, wenn er sie braucht, etwas in Rechnung bringen darf) so ist er doch oft in dem Fall, daß er von dieser Kraft nicht so viel hat, als er braucht, und in der Verwendung derselben sparen muß, wenn er noch immer wünscht, eben so viel Wirkung von seiner Maschine zu sehen, als sie ihm bey einem Aufwande mehrerer Kraft leistete. Wenn er nun gleich dieses nimmer erhalten kann, so lange er seine Maschine nicht umändert, so steht er sich doch besser mit einer solchen, welche überhaupt mehr Wirkung bey einer geringern Kraft thut, als bey einer solchen, wo sich dieses umgekehrt verhält.

Ich habe schon oben der Bemühungen der neuern Mathematiker erwähnt, diese für die practische Mechanik so wichtige Sache ins Licht zu setzen. Die höhere Mathematik muß hier zu Hülfe kommen. Dies ist Grund genug für mich, auf diese Untersuchungen selbst mich hier nicht einzulassen.

Leser, welche sich unterrichten wollen, wie weit diese Untersuchungen bisher gediehen sind, werde ich auf Herrn Hofrath Kästners Anfangsgründe der höhern Mechanik, welche die erste Abtheilung des vierten Theils von dessen mathematischen Anfangsgründen ausmachen, und auf Herrn Professor Karsten Lehrbegriff der gesammten Mathematik, insonderheit auf dessen vierten Theil, verweisen dürfen.

Ich werde indessen, um meinem Vortrage von dieser wichtigen aber schweeren Sache mehr Deutlichkeit zu geben, die Sache so vornehmen, als wäre noch gar nichts in ihr gearbeitet worden, die Ueberlegungen, welche bey den in

Gang

Gang gesetzten Maschinen einem verständigen Beobachter entstehen, so lange ich kann, erfindungsweise vortragen, und das Resultat fremder Untersuchungen gelegentlich anführen.

§. 71.

Hiebey muß ich nun zuvörderst einen Unterschied unter denjenigen Maschinen machen, die mit einem jeden Grade der Geschwindigkeit ihre Wirkung in längerer oder kürzerer Zeit thun, vorausgesetzt, daß ein Uebergewicht der Kraft da ist, und denjenigen, welche nur mit einer bestimmten Geschwindigkeit ihre Wirkung auf eine zweckmäßige Art leisten, und alsdenn nicht nur mehr Arbeit, sondern auch bessere, schaffen. Wer nicht an diesen Unterschied gedacht hat, oder nicht gleich verstehen würde, was ich damit sagen wolle, der gehe in eine Papier-Mühle, die beydes ein sogenanntes deutsches und auch ein holländisches Werk hat. Bey dem erstern wird er bald einsehen, daß die in dem Troge befindlichen Lumpen durch den auf sie fallenden Stampfer auf gleiche Art werden zerstossen werden, es mag nun derselbe fünf- oder zehnmal in einer Minute auf sie fallen. Bey dem holländischen Lumpenschneider aber wird er bemerken, daß er nichts beschaffen würde, wenn seine Geschwindigkeit bis auf die Hälfte abnähme. Alle Hebezeuge thun ihre Wirkung gewiß, wenn die Kraft so bestimmt ist, daß sie den Widerstand der Last und der Maschine selbst überwiegen kann. Eine Mühle aber wird kein Korn, sondern unbrauchbares Schrot geben, wenn der Mühlstein schleichend umher geht.

Mit dieser Erläuterung des hier angegebenen Unterschiedes will ich keinesweges vestsetzen, als wenn ein jeder Grad der Geschwindigkeit bey den Maschinen erster Art gleichgültig sey. Dies ist er nicht. Aber die Ueberlegungen, welche bey jenen statt haben, unterscheiden sich sehr von denen, die uns bey diesen natürlich entstehen werden.

§. 72.

Was die Maschinen der ersten Art betrifft, so werden meine Leser aus dem fünften Abschnitt schon wissen, wie sie die Berechnung über ihr Vermögen anzustellen haben. Sie werden aber von keiner etwas schweeren Maschine erwarten, daß sie mit einem jeden Zusatz der Kraft zu demjenigen, was zum blossen Gleichgewicht erfodert wird, in Bewegung komme. Sie werden dies selbst von solchen Maschinen nicht erwarten, bey welchen die Kraft mehr Geschwindigkeit, als der Widerstand oder die Last, hat, und daher ungleich schwächer, als diese, nach der gemeinen mechanischen Berechnung seyn dürfte. Wenn wir z. E. eine Papier-Mühle mit einem deutschen Werk nur obenhin berechnen, so wird bald klar, daß die Kraft, welche das grosse Wasserrad derselben umher treibt, durch welche in einer viel geringern Entfernung von der Axe der Welle, als dem Mittelpunct der Bewegung, die Stampfer gehoben werden, von deren Gewichte noch dazu der durch ihr Ende durchgehende Bolzen einen beträchtlichen Theil trägt, viel geringer seyn könne, als dieser Stampfer Gewicht ist.

Wir haben aber zwo Ursachen kennen gelernt, welche als ein Widerstand gegen die auf das Rad fallende Kraft des Wassers wirken, und die Maschine im Stillstand erhalten können, auch wenn diese Kraft des Wassers schon ein in etwas überwiegendes Verhältniß bekömmt. Eine von diesen ist das Reiben der Maschine, die andre die Kraft der Trägheit.

In Ansehung beyder kömmt es freylich auf die Schweere der Maschine mit an. Wäre das Wasserrad mit seiner Welle statt 3000 Pfund, die es schweer seyn mag, nur 1000 Pfund schweer, so würden die Zapfen desselben nur mit dem dritten Theil Gewichts auf ihre Pfanne drucken, und um so viel weniger sich reiben. Auch würde das Wasserrad mit einer um so viel mindern Trägheit der Kraft des Wassers widerstehen.

I. Daß

I. Daß nun die Maschine um so viel vortheilhafter sey, je weniger Schweere sie hat, wenn indessen die übrige Einrichtung und das Verhältniß ihrer Theile unverändert bleibt, ist so leicht einzusehen, daß ich nicht weiß, was meine Leser denken werden, wenn ich es als die erste meiner Regeln für das Maschinenwesen hersetze. Allein Ordnung und Vollständigkeit erfodern dieses.

Doch nicht alles, was leicht und allgemein erkannt wird, wird deswegen allgemein befolgt. Wie manche Maschine findet man, die eine unnütze Schweere unbrauchbar macht, oder die ihren Besitzer durch das, was ihm die überflüßige Kraft kostet, die er ihrer überflüßigen Schweere wegen anwenden muß, aufzehrt.

Dies ist indessen kein Wunder. Eine Maschine, die von einer grossen Kraft angegriffen wird, und grossen Widerstand überwinden soll, glaubt man insgemein nicht stark genug machen zu können. Um sie stark zu machen, wird sie schweer gemacht, und Holz und andere Materialien an ihr verschwendet. Eben der Zimmermann, der ein Haus von dem leichtesten Gespärre zu bauen gewohnt ist, wird, wenn ihm ein Mühlenwerk zu bauen vorkömmt, das Holz nicht groß und schweer genug dazu finden können, und nicht immer darauf sehen, welcher Theil der Maschine mehr, welcher weniger, von der Gewalt, mit welcher dieselbe getrieben wird, auszuhalten habe.

Hier entsteht nun eine zweyte Regel.

II. Man gebe den verschiedenen Theilen der Maschine eine Stärke, welche mit der Gewalt, die sie auszustehen haben, im gehörigen Verhältniß steht, und wähle zur Verstärkung derjenigen Theile, welche die meiste Gewalt ausstehen, Materialien, die bey minderer Schweere mehr Stärke haben. Oft kann z. E. eine Stange von wenigen Pfunden Eisen der Maschine eine Stärke geben, die, wenn sie ihr durch Holz gegeben würde, einige Centner Holz mehr in dieselbe hineinbringen würde.

Diese Gewalt, die ein jeder Theil der Maschine auszustehen hat, muß aus mechanischen Gründen beurtheilt werden. Oft giebt es der Augenschein ohne Mechanik an. Ich will das Tretrad in einem grossen Krahn zum Beyspiel nehmen. Ohne Mechanik sehe ich an diesem, daß die Stufen im Rade, auf welche der Mensch tritt, ob gleich auf sie die Kraft wirkt, welche die Maschine treibt, nichts mehr als das Gewicht des Krahntreters auszuhalten haben. Und wie schwach kann das Brettchen seyn, das in einer so geringen Breite nur Einen Menschen tragen soll! Wie schwach können die Felgen des Rades seyn, zwischen welche diese Stuffen eingefugt werden! Aber Mechanik ist es, die mich lehrt, daß die langen Speichen des Tret-Rades keinesweges an der Welle und an der Felge gleich dick seyn, sondern pyramidalisch zugespitzt seyn dürfen. Es gehört nicht viel dazu, in Befolgung dieser Gründe einem solchen Tret-Rade einige Centner von der überflüßigen Last zu nehmen, mit welcher es auf seine Lager drückt.

§. 73.

Aber nun ist es Zeit, auch die Verschiedenheit in der Wirkung der Trägheit und des Reibens auf die in Gang gesetzte Maschine zu bemerken. So viel beyde in dem Stücke gemeines haben, daß sie beyde im Verhältniß zu der Schweere der Maschine stehen, und in diesem Verhältniß der anfangenden Bewegung der Maschine beyde entgegen wirken, in so verschiedenem Lichte erscheint ihre Wirkung, wenn die Maschine in den durch ihre Einrichtung abgezweckten Gang gesetzt ist. Hier wird das Reiben zu einer Kraft, die nicht nur gar nicht aufgehoben werden kann, sondern mit der beschleunigten Bewegung der Maschine immer mehr Hinderniß schafft, wie ich schon oben §. 49. S. 128. angemerkt habe. Die Trägheit dagegen wird durch eine hinreichende Kraft zuletzt ganz überwunden, und wenn sie einmal überwunden ist, eine so wirksame Ursache der Bewegung, daß

diese noch fortdauert, auch wenn die Kraft auf längere oder kürzere Zeit zu wirken nachläßt. Beydes will ich durch zwo alltägliche Erfahrungen an Maschinen beweisen. Es ist bekannt, daß eine Windmühle bey übertriebener Geschwindigkeit sehr leicht in Brand läuft. Der Ort, wo dieses Unglück anfängt, ist derjenige, wo die schweere hölzerne Welle auf ihrem ausgerundeten Lager sich wälzt. Auf dieses Lager druckt sie bey langsamerem Gange der Mühle so schweer, als bey geschwinderem. Was macht aber, daß das Reiben so sehr zunimmt, bis endlich Brand daraus erfolgt? Nichts, als die übertriebene Geschwindigkeit. Aber eben die Windmühle, welche bey mäßigem Winde an den Flügeln angegriffen werden mußte, um ihr die erste Bewegung zu geben, kömmt bald in einen so lebhaften Gang, der eben durch die sogenannte Kraft der Trägheit unterhalten wird, daß man mit dem sogenannten Fange bloß durch eine Reibung gegen den mit schweerem Gewicht belasteten Ring des Fanges sie hemmen kann, und doch nicht so auf einmal, daß nicht bey der fortdaurenden Bewegung ein der Mühle gefährliches Reiben entstünde. Man muß deswegen ihr die geschwächte Bewegung noch einmal wieder fortzusetzen erlauben, und dann ein zweytes, ja wol gar ein drittesmal den Fang aufdrucken lassen. Eine Wassermühle wird, auch wenn der Wassergang durch die Schutzbretter gesperrt ist, noch einige Weile ihre Bewegung fortsetzen.

§. 74.

Man hat also Ursache, das Reiben als den schädlichern Feind der Bewegung der Maschinen anzusehen. Da ihn zu dämpfen unmöglich ist, so muß man ihm so wenig Einfluß auf die Maschine einräumen, als immer möglich. Diesen Einfluß gewinnt er nicht bloß durch die Schweere der Maschine, sondern auch durch die Grösse und Menge derer Flächen, in denen die Theile der Maschinen auf einander drucken und reiben. Je mehr nun die Maschine Theile hat, und

und je zusammengesetzter sie ist; desto mehr Theile drucken und reiben auf einander, und desto mehr Zähne stossen und klemmen in den Räderwerken gegen einander, oder gegen die Stäbe der Trillinge. Ein Umstand, welcher der Maschine noch hinderlicher, als das Reiben, ist. Als die Mechanik vor zweyhundert Jahren wieder auflebte, versahen es unsre Vorgänger sehr in diesem Puncte. Ihre Maschinen, bey welchen sie nur hauptsächlich auf eine grosse Ersparung der Kraft sahen, die den Betrachtenden in Erstaunen setzen sollte, sind eben deßwegen erstaunlich zusammengesetzt. Auf ein Stück mehr oder weniger in der Maschine kam es ihnen gar nicht an. Sie bedachten zu wenig, daß eben von der Kraft, welche sie so klein zu machen suchten, durch das Reiben und Gegeneinanderstossen der vielen Theile der Maschine so viel verlohren ginge, daß der bey einer kleinen Kraft unvermeidliche Zeitverlust mit dem Verlust an der Kraft zusammengesetzt alle Brauchbarkeit derselben vereitelte. Man kann sich davon aus den ältern Theatris machinarum eines Ramelli, Besson, und anderer belehren. Ich kann nicht sagen, daß die neuern Werke ähnlicher Art von diesem Fehler frey seyn, oder daß sie nicht aus jenen ältern Sammlungen viel unbrauchbares in unsre Zeiten übertrügen. Man sehe z. E. die Description du Cabinet de Mr. *Grollier de Servieres*, und die von einem V. B. Henning in Nürnberg in Folio ausgefertigte Sammlung nützlicher Maschinen und Instrumente.

Wenn wir indessen bey diesem Punct auf die Trägheit zurücksehen, so mögte man fast denken, daß es besser wäre, eine Maschine aus mehreren Theilen, die alsdenn in den mehresten Umständen kleiner ausfallen, und mit minderer Trägheit widerstehen, zusammen zu setzen. Dieser Grund ist anscheinend. Aber, wie gesagt, die Trägheit widersteht nur der anfangenden Bewegung, und kömmt der fortgesetzten zum Vortheil. Ich handle demnach unüberlegt, wenn ich, um dieser willen wesentliche Vortheile in der Zusammensetzung

setzung der Maschine aufgebe, dergleichen einer die Simplicität der Maschine unstreitig ist. Ich will dieß durch ein Exempel erläutern: Es gehört wenig dazu, eine Windmühle anzugeben, deren Flügel nur halb so groß, die Welle wenigstens halb so schwach, und alles, bis auf den Mühlstein, in Proportion kleiner, minder schweer, und minder träg gegen die Bewegung ist. Weil jedoch die halb so grossen Mühlenflügel nur halb so viel Wind fassen würden, so liesse sich nicht erwarten, daß sie noch Macht genug auf den Mühlenstein haben werde, um gut Korn und Korn genug zu mahlen. Allein der Mechanik ist keine Kraft zu klein, um eine verlangte Wirkung zu thun. Es kömmt nur auf ein Rad mehr in der Mühle an, um der Kraft ein hinlängliches Vermögen auf den Stein zu geben. Das, was die Mühle an Geschwindigkeit verlieren würde, würde sich durch eine vortheilhaftere Stellung der Mühlenflügel, durch eine grössere Schräge bis zum Ende aus, durch eine grössere Breite, als man ihnen bey der gewöhnlichen Einrichtung geben kann, durch den wenigern Widerstand, weil sie leichter sind, wieder einholen lassen. — So weit geht es gut mit dem Raisonnement. Ja noch mehr, meine Mühle würde im Risse, und selbst im Modelle noch immer gut ausfallen. Aber wehe dem, der sie nach dieser Angabe ausführen lassen wollte! Er würde bald merken, daß er an seiner Mühle den Vortheil des heftigen Schwunges verlohren hätte, welchen sie bald gewinnt, wenn ein hinlänglich starker Wind sie in Bewegung gesetzt hat, durch welchen alles Reiben, und Stossen der übrigen Maschine überwunden, und ein ebener Gang des Werks erhalten wird.

§. 75.

Doch wie weitläuftig würde ich nicht werden, wenn ich die Reguln, welche ich hier der Vorsicht und Ueberlegung derjenigen anzugeben vorhabe, die mit dem Maschinenwesen im grossen sich beschäfftigen, nach denen einzelnen Schwierigkeiten,

rigkeiten, mit welchen man in der Mechanik zu thun hat, sorgfältig eintheilen wollte. Von diesen Schwierigkeiten selbst ist eben genug gesagt. Ich eile also, die allgemeinen Reguln für das Maschinenwesen zu entwerfen, ohne Rücksicht, ob dadurch dem Reiben, dem Klemmen, dem falschen Eingreifen der Zähne, jedem insbesondere, oder allen vereint abgeholfen, oder sonst eine Verbesserung andrer Art in die Maschine gebracht werde.

I. Man hüte sich vor einer solchen Einrichtung der Maschinen, in welcher die Kraft selbst durch ihre Wirkung das Reiben vermehren hilft. Der schnelle Gang der Maschine, die erste Wirkung einer überwiegend starken Kraft, vermehrt das Reiben. Darinn muß man sich freylich schicken, und davon rede ich hier nicht. Aber die Maschine selbst muß nicht etwan so angelegt seyn, daß die Kraft nicht auf sie wirken kann, ohne die Theile derselben stärker auf einander zu pressen, zu klemmen, oder wol gar stockend zu machen. Wenn man alle schönen Sächelchen, die von diesem oder jenem practischen Mechanikus angegeben werden, durchgeht, so wird man manche Maschine finden, die auch nicht einmal im Modell in Gang gesetzt werden kann, weil alles sich so stößt, reibt und klemmt, daß gar keine Bewegung möglich wird. Ich erinnere mich unter andern eines Mannes, der mir in einem Risse als eine wichtige Verbesserung der Feldgestänge, wodurch er insonderheit das Holz sparen, und das Werk leichter machen wollte, diejenige angab, welche ich pour la rareté du fait (Fig. 103.) abgezeichnet habe. Es ist wahr, Holz war wenig genug darinn, aber die Puncte A. B. C., durch welche die Bolzen durchgehen, machen aus dem Parallelogramm der bekannten Feldgestänge, in welchem sich alles so bequem verschiebt, einen Triangel mit drey festen Puncten, in welchem nichts verschoben werden kann, ohne zu zerbrechen. In Leupolds Theatro machinarum sind verschiedene Maschinen nach alter Angabe beurtheilt, die nur den kleinen Fehler haben, daß sie nicht gehen.

Doch von solchen mechanischen Träumen muß man nicht im Ernst reden.

Daß indessen Maschinen im häufigen Gebrauche seyn, die diesen Fehler haben, davon will ich zu einem Exempel die Wasserschöpfmühlen von der gemeinsten Art, welche wir in unsern Marschländern haben, anführen. In diesen trägt ein langer auf einen Winkel von etwa 25 Grad inclinirter Wellbaum beydes die Mühlenflügel und das Schöpfrad, und eins dreht sich mit dem andern in gleichen Zeiten herum. Die Maschine ist demnach sehr einfach, und kostet etwa den vierten Theil desjenigen, was eine sogenannte Hausmühle zum Wasserschöpfen, in welcher die Bewegung zweymal versetzt wird, kostet. Aber nun drückt nicht nur der Zapfen des Wellbaums, wegen der schrägen Lage, mit einem grössern Theil seines Gewichts schweerer auf sein Lager, als ein horizontal liegender Wellbaum thut, sondern der Wind, der die Flügel umhertreibt, drängt ihn mit einer Gewalt, die mit der Kraft des Windes im genauesten Verhältnisse steht, auf dasselbe ein, und vermehrt das Reiben ins ungeheure, so daß theils die Wirkung der Maschine viel geringer wird, theils eine viel grössere Kraft dazu gehört, sie zu bewegen, als bey den weit kostbarern und zusammengesetztern Hausmühlen.

§. 76.

II. Modelle entscheiden zwar mehr, als Zeichnungen. Aber man hüte sich, eine Maschine deßwegen für vollkommen brauchbar zu halten, weil sie im Modell gut ausfällt. Man bedenke, 1) daß in der ausgeführten Maschine alles im cubischen Verhältniß schweerer ausfalle, als in dem Modell, und in diesem Verhältniß das Reiben zunehme. Wenn z. E. ein Modell, wie gewöhnlich, so gemacht wird, daß, was im Grossen ein Fuß Länge ist, in dem Modell mit einem Zoll gemessen wird, so wird der cörperliche Inhalt der Theile der Maschine im cubischen Verhältniß grösser, und was ein Cubiczoll in dem Modell ist, ist ein Cubicfuß in

der Maschine selbst, folglich 1728 mal grösser, folglich auch 1728 mal schweerer. Das Reiben nimmt demnach wenigstens in diesem Verhältniß zu, wenn das Material des Modells und der Maschine einerley ist, noch mehr aber, wenn man schweerere Materialien und im Verhältniß mehr Eisen zu der Maschine anwendet. 2) Daß das Modell nie so anhaltend gebraucht werden soll. Man kann viele Proben mit dem Modell machen, ohne einen Abgang an den Theilen desselben, oder wenigstens ohne ein solches Verschleissen zu bemerken, wodurch die Maschine ausser Stand ihre Wirkung zu thun gesetzt würde. Wenn es aber zur Ausführung kömmt, so wird aus einem in dem Modell kaum merklichen Reiben in der Maschine selbst, bey deren stärkerem Widerstande und grössern Schweere, ein so gewaltsames Verschleissen, daß sie nicht einen Monat lang ihre Dienste thun kann. Man hüte sich dafür bey allen neuangegebenen Maschinen, die vor uns noch niemand anders, als im Modelle ausgeführt hat. Ein gewisser ehemals hier lebender Mechanikus hatte ein Modell von einem Wasserwerke gesehen, von dessen Wirkung er mir Wunderdinge erzehlte. Ihm selbst war ein Geheimniß aus der Sache gemacht, das er doch endlich glücklich erwischte. Nun arbeitete er darauf los, um eine Feuersprütze, die alle andere seiner Meinung nach übertreffen sollte, nach dieser Erfindung zu machen. Ich war Zeuge von einer Probe, die zwar schon unter seiner Erwartung ausfiel, aber das Wasser sprang doch noch stark und weit genug. Noch machte er mir ein Geheimniß aus der Sache. Folglich konnte ich weder ihn noch andre warnen. Vielmehr fand er noch Gelegenheit, sie den Eignern einer Papiermühle als eine Wasserkunst anzupreisen, wodurch das Wasser hoch von dem Gerinne auf getrieben werden könnte. Sie ward mit vielen Kosten und auch mit vieler Erfindsamkeit so angelegt, daß das eine Mühlenrad dieselbe mit treiben konnte. Hier sollte sie nun fortdaurende Arbeit thun; aber in wenig Tagen war sie verschlissen und unbrauchbar.

bar. Jezt ward mir nicht mehr ein Geheimniß aus der Erfindung gemacht, die nichts anders war, als Prinz Roberts Wasser-Riegel, eine Erfindung, die Leupold in dem ersten Bande seines Theatri Hydraulici § 234. S. 125. beschreibt, und von welcher ich vorlängst gewiß war, daß sie wegen des zu grossen Reibens und Verschleissens nicht anders, als im Modell, jemals habe ausgeführt werden können.

Ich habe oben § 49. eines Versuchs erwähnt, die Zapfen der Mühlenräder zwischen zwo Walzen zu legen, welche sich unter denselben mit dreheten, und wodurch das Reiben derselben fast ganz aufgehoben wurde. Auch dies mag im Modell vortreflich gegangen seyn, konnte aber im Grossen unmöglich bestehen.

§. 77.

III. Man gehe der Erfahrung nach, und verlasse nicht zu leichtsinnig ältere Einrichtungen solcher Maschinenwerke, von welchen man weiß, daß sie ihren Zweck erfüllt, und ihrem Besitzer Vortheil geschafft haben. Ja man halte sich bey einem Werke, in dessen Anlegung man andre genau nachgeahmt hat, nicht ganz sicher, daß man in die Länge damit bestehen werde, wenn es gleich dem Anschein nach seine Dienste thut. Die Mühle, welche einen Scheffel Korn täglich weniger mahlt, als andre Mühlen von ähnlicher Anlage, macht gewiß ihren Herrn in der Länge der Zeit zu einem armen Mann, wenn er gleich täglich viel Mahlgeld einnimmt. Holland hat bekanntlich zu gewissen Gewerken, z. E. zum Sägen und Oelschlagen, vorzüglich schöne Mühlen, und hält durch diese unter vielen nachtheiligen Umständen den Preis, selbst mit den Einwohnern derjenigen Länder, die ihnen das Material zu der Arbeit dieser Mühlen zuschicken, ihnen die verarbeitete Waare wieder abkaufen, und wenn sie selbst diese Bearbeitung mit ähnlichen Mühlen unternehmen, nicht damit fortkommen. Es ist ein gemeines

nes Vorurtheil, daß die Holländer mit ihrem Mühlenbau sehr geheim seyn. Dies ist falsch. Der Bau ihrer Oel-Säge- und anderer Mühlen liegt in den holländischen Mühlenbüchern eines Limperch, van Zyl, Natrus, Polley und van Buren, die auch bey uns nicht selten sind, vor jedermanns Augen. Man findet hier Zeichnungen nach den genauesten Maaßstäben von Mühlen, die in ihrer Art als die besten im Lande bekannt sind. Allein nicht alle Mühlen, die nach diesen Zeichnungen selbst in Holland gebauet werden, gerathen deswegen gleich gut. Man hat mir aber versichert, daß die holländischen Fabrikanten, wenn sie selbst eine gute Mühle, und einen andern unter sich haben, der wegen Mangelhaftigkeit seines Werks nicht mit ihnen Preis halten kann, uneigennützig genug wären, sein Gewerk zu untersuchen, bis sie den Fehler selbst, und zu dessen Abhelfung Rath finden, blos um solche nützliche Gewerbe im Ganzen ihrem Lande zu erhalten. Ist es nicht wahr, so sollte es billig also seyn, und wäre doch unendlich besser, als wenn bey uns ein ieder Fabrikant, der ein gutes Werk zu haben glaubt, seinem Nebenarbeiter von denen Vortheilen, auf welche er groß thut, das schärfste Geheimniß macht.

§. 78.

IIII. Man vermeide die sogenannten vorgelegten Werke so viel, als möglich, oder, um ohne Worte der Kunst zu reden, man gebe der Maschine so wenig abgesonderte Theile, die einer durch den andern in Bewegung gesetzt werden müssen, als immer möglich. Denn bey iedem neuen Stücke, das in eine Maschine ohne Noth hineingebracht wird, mehrt sich iedes der so oft erwähnten Hindernisse ihrer Bewegung. Die Last wird grösser, die durch ihre Trägheit widersteht, derer Flächen werden mehr, die sich an einander reiben und abschleifen, und es greifen mehr Räder und Getriebe in einander.

So

So deutlich nun der Grund dieser Regul sich schon hieraus zu Tage leget, so schädlich würde sie werden, wenn man sie ohne Ueberlegung anwenden, und in einer ieden grossen Maschine alles aus einem Stücke machen wollte, was dem ersten Ansehen nach daraus gemacht werden kann. Derer Fälle sind viel, in denen eine Nothwendigkeit entsteht, der Maschine mehrere Theile zu geben, als zur unmittelbaren Hervorbringung der Bewegung, die man zur Absicht hat, erfodert werden. Ich will diese Fälle hieher setzen:

1) Wenn man die Materialien nicht groß und stark genug finden kann, um in einem Stücke die Gewalt und Arbeit auszuhalten. Es wird ohnehin schon schweer genug, eine gute Mühlenwelle von beträchtlicher Länge zu finden, und wenn sie abgängig wird, sind die Kosten und der Zeitverlust des Baues weit grösser, als wenn man die kürzere Welle eines vorgelegten Werks, oder die von dem Wasserrade besonders, neu anzukaufen und einzubringen hat.

2) Wenn man bey einer simplern Einrichtung zu viel Reiben und Klemmen in die Maschine bringen würde. Das, was ich oben § 75. von den Schöpfmühlen in unsern Marschländern gesagt habe, ist ein belehrendes Exempel davon.

3) Wenn eine Versetzung der Bewegung nothwendig wird, da z. E. die Kraft perpendicular wirkt, und die abgezweckte Bewegung der Maschine horizontal seyn muß. In diesem Fall sind wir mit allen Korn-Wassermühlen. Bey den Windmühlen entsteht es aus dem Grunde, weil die horizontal wirkende Kraft des Windes dem Flügel der Mühle nicht anders, als in beynahe senkrechter Richtung, eine fortdauernde und gleichförmige Bewegung geben kann.

Da man hier eine mit der Bewegung des Mühlensteins parallel wirkende Kraft hat, so würde freylich diejenige Windmühle viel vollkommener seyn, und mit schwächerem Winde gehen, deren Flügel der Wind horizontal umher treiben könnte. Man hat diese Verbesserung den Windmühlen vielfältig zu geben gesucht. Mir sind wenigstens

zehn Angaben von horizontalen Windmühlen bekannt, und den letzten mislungenen Versuch, sie ins Werk zu richten, habe ich vor sechs Jahren in einer teutschen Residenzstadt gesehen. Es ist aber unmöglich, der Schwierigkeit abzuhelfen, daß der Mühlenflügel, wenn er dem Winde, der ihn vor sich hingetrieben hat, entgegen zurück kömmt, seine Segel niederlege, oder dem Winde die Wirkung auf denselben gehemmt werde. Alle Einrichtungen, die man in der einen oder in der andern Absicht bey dergleichen Mühlen gemacht hat, geben entweder ein Werk ohne Bestand, oder von so beschwerlichem Gebrauch bey Abwechselungen des Windes, daß der gehoffte Vortheil wegfällt. Wäre eine Möglichkeit der Ausführung, so mögte sie bey einem solchen Gewerke Statt haben, das nur zu dieser oder jener Zeit gehen, und etwa für eine gewisse Fabrik im Vorrath arbeiten dürfte, dergleichen z. E. eine Schrotmühle für eine Ahmdammacherey oder eine Branntweinbrennerey seyn mögte. Man dürfte sie alsdenn nur auf einen in der Gegend herrschenden Wind einrichten. Z. E. bey uns müßte sie auf den Südwestwind eingerichtet werden, und dann könnte sie ein veststehendes Winddach gegen Nordwesten haben, durch welches der Wind auf die zurückkehrenden Flügel zu wirken abgehalten würde. Aber für ein Gewerk, das seinem Besitzer täglich Brod erwerben soll, wird nimmermehr eine taugliche Anlage erfunden werden.

4) Wenn durch andre Umstände die Nothwendigkeit entsteht, einen Theil der Maschine beweglich zu machen, und dieses nicht Statt haben kann, ohne derselben mehr Theile zu geben, als sonst nöthig seyn würde. Dies ist der Fall bey den sogenannten Pansterмühlen, an welchen Rad und Welle bey steigendem Wasser in die Höhe gewunden werden müssen. Man ist daher genöthigt, ein vorgelegtes Werk anzubringen, oder vielmehr der Welle ein Stirnrad zu geben, mit welchem sie in die Getriebe von zwo andern Wellen eingreift, und zween Gänge treibt. Man sehe das

um=

umständlichere in Beyers Mühlentheater Cap. 7. und den dazu gehörigen 15-17ten Kupfertafeln.

5) Oft erlaubt die übrige Anlage der Maschine nicht, die Getriebe oder Räder, in welche sie eingreifen soll, unmittelbar an dieselbe anzubringen. Die Maschine soll entweder weit in die Ferne wirken, und alsdenn ist es unvermeidlich, ihr mehr Theile zu geben; oder die Kraft wirkt in einem zu grossen Raum, als daß man das Werk, welches sie in Bewegung setzen sollte, unmittelbar an ihr schon anbringen könnte. In Fällen dieser Art muß man wol überlegen, ob überhaupt ein taugliches Werk herauskommen könne. Ich habe vor einigen Jahren eine Papiermühle untersucht, die schon fertig und so angelegt war, daß Pferde ein Holländisches Werk treiben sollten. Man hatte mit gutem Bedacht den Pferden einen Zug von 18 Fuß im Radius gegeben. Nun konnte das Kammrad, welches etwan 20 Fuß im Durchmesser haben mogte, noch nicht in das Getriebe eingreifen, welches dem Holländer die Bewegung mittheilte. Es war also ein vorgelegtes Werk angebracht, das zu nichts weiter diente, als die Wirkung der Maschine auf eine Weite von etwa 15 Fuß hinaus zu versetzen. Hier mußte nun die Bewegung noch zweymal versetzt werden, ehe der Lumpenschneider, oder der sogenannte Holländer, in Gang gesetzt werden konnte. Dadurch hatte die Maschine so viel Stücke bekommen, und rieb und stieß sich so sehr, daß vier Pferde an derselben wenig beschafften, und das ganze Werk von seinen Besitzern aufgegeben werden mußte. Wäre mein Rath vor Anlegung des Werks verlangt worden, so hätte ich gerathen, die Pferde oben gehen zu lassen, und das Kammrad unter ihnen anzubringen, um hauptsächlich nur dies vorgelegte Werk, und wenigstens 20 Fuß an dem ganzen Gebäude zu ersparen. Nun aber war das Ganze nicht dazu angelegt, um vier schweer arbeitende Pferde auf dem ersten Stockwerke zu tragen, und alles hätte verrückt und umgebauet werden müssen.

§. 79.

§. 79.

V. Wenn eine Maschine mehr Arbeiten zugleich thun muß, so gebe man ihr, so viel möglich, auf allen Seiten gleich viel zu thun. Wenn ein Wasserrad mit zween krummen Zapfen arbeiten muß, so belaste man den einen Zapfen so sehr, als den andern. Daß dies wenig beobachtet werde, davon habe ich sehr viele Exempel in Zeichnungen und in wirklicher Ausführung gesehen. Ich erinnere mich unter andern eines Salzwerkes, welches durch ein Rad von einem daran vorbeyfliessenden wasserreichen Flusse getrieben ward. Dies Rad hatte an seiner Welle zween krumme Zapfen, deren einer die Pumpe des Salzbrunnens und die Pumpen von sieben Gradierhäusern trieb. Der zweyte war mit nicht mehr als den Pumpen von vier Gradierhäusern belastet. Daß ein solches Werk dennoch Jahre lang geht, und seine Dienste thut, darüber darf man sich um so viel weniger wundern, da so manches Werk mit einem krummen Zapfen allein fortdaurend arbeitet. Aber was man doch besser machen kann, das sollte man billig iedesmal thun. Vielmehr sollte man eben deswegen, wenn es irgends möglich fällt, niemals einen, sondern zween krumme Zapfen einer jeden Maschine geben und die Arbeit auf diese vertheilen, wobey denn dasjenige nimmer aus der Acht gelassen werden muß, was ich oben von der Stellung der mit einander arbeitenden Kurbeln §. 55. S. 151. erwähnt habe.

§. 80.

Ich will nun noch einige Bemerkungen beyfügen, aus welchen sich grosser Nutzen für das Maschinenwesen ziehen läßt, ohne daß ich bestimmte Reguln, wie diese Bemerkungen in bestimmten Fällen practisch anzuwenden seyn, beyzufügen im Stande seyn mögte. Ich muß aber hier weit ausholen, und etwas von der Theorie einer Sache sagen, welche man bisher nur als der speculativen höhern Mechanik vorbehalten angesehen, in Werkzeugen, die für die feinern

Künste

Künste dienen, zwar angewandt, aber noch wenig für das grosse Maschinenwesen zu nützen gesucht hat.

Wie werde ich aber diese Sache, gewiß die schweerste, auf welche mich mein Vortrag bisher geleitet hat, am besten einleiten können? Ich will meine Leser bitten, vor Durchlesung des folgenden den Kasten ihrer Hausuhr zu öffnen, und das derselben angehängte Pendul zu beobachten, wie es einen immer so gleichen Gang gehe. Wenn es im freyen Fluge geht, so wird es ihnen bey jeder Uhr gelingen, diesen Flug in etwas zu schwächen, ohne es ganz stille stehen zu machen. Sie werden auch alsdenn bemerken, daß es bey kleinern Schlägen gleich viele Zeit nach ihrer ungefähren Schätzung braucht. Mancher wird nun dabey denken, das komme von der Uhr, das Pendul werde von der Uhr bewegt, und müsse nun seine genaue Zeit wol halten, weil es sich sonst nicht ordentlich an seinem obern Ende von der Uhr auslösen könnte. Allein wenn sie es ihrer Uhr anzumuthen wagen, so dürfen sie das Gewicht, das dieselbe zieht, und die erste Ursach ihrer Bewegung ist, doppelt so schweer machen. Nun wäre doch vernünftig zu schliessen, daß mit einer doppelten Kraft eine Maschine doppelt so geschwind gehen müsse, wenn der Widerstand, den sie zu überwinden hat, gar nicht zugenommen hat. Allein wenn sie nun ihr Pendul betrachten, so werden sie bemerken, daß es sich nur wenig an das vermehrte Gewicht kehrt, und sie werden allererst nach einer beträchtlichen Zeit durch Vergleichung mit einer andern Uhr bemerken, daß ihr Gang in etwas beschleunigt worden sey. Um sich dieß in etwas durch einen andern Versuch aufzuklären, rathe ich ihnen, eine bleierne oder andre schweere Kugel an einem Faden zwischen den Fingern zu halten, oder besser an irgend einen Haken zu hängen. Sie wird nicht ruhig hängen, und noch besser ists gethan, wenn sie durch einen Ruck der Hand dieselbe in einen nicht gar starken Schwung bringen. Dieser Schwung wird kleiner und kleiner werden; sie aber werden bey dem ersten

stärkern und bey dem letzten unmerklichen Schwunge einerley Zeit bemerken. Nun aber machen sie den Faden etwas kürzer, so werden sie bemerken, daß die Schwingungen geschwinder gehen, und sich mit der Länge und Kürze des Fadens immer verändern, kleine und grössere Schwingungen aber bey unveränderter Länge des Fadens immer einerley Zeit gebrauchen. Wenn sie, um den Versuch zu verändern, eine andre schweerere oder leichtere Kugel aufhängen, und sie zugleich mit jener schlagen lassen, so werden sie bemerken, daß es nur darauf ankömmt, ob die Länge von dem Punct, wo der Faden einhängt, bis auf den Mittelpunct der Kugel gleich sey. Denn alsdenn werden sie bemerken, daß die Schwingungen dieser ungleich schweeren Kugeln, sie mögen gleich in der Weite verschieden seyn, gleiche Zeit dauern.

Um den Versuch zu verändern, stosse mein Leser die eine dieser Kugeln seitwärts hinaus, doch schwach an, daß sie einen kleinen Kreis (es kömmt nicht darauf an, ob einen genauen Cirkel) beschreibe, wenn mittlerweile die andere in einerley Wege hin- und herschlägt. Auch alsdenn werden die Zeiten noch immer gleich ausfallen. Alsdenn ergreife er das Band einer dieser Kugeln zwischen den Fingern, und schwinge sie so stark, daß sie einen Cirkel um seine Hand beschreibt, den sie noch einigemal durchfliegen wird, wenn er auch die Hand stille hält. Er wird alsdenn bemerken, daß die Kugel geschwinder um seine Hand in dem grossen Cirkel, als jenes Pendul in seinem kleinen Cirkel fliegt. Hat er jemanden zur Seite, der die Umgänge des Penduls zählt, indem er selbst aufzählt, wie oft seine Kugel ihren Cirkel macht, so wird er beynahe doppelt so viel zählen, als jener. Ich sage: beynahe doppelt so viel. Denn dieser Versuch läßt sich nicht genau machen, weil er doch immer, um die Kugel im Schwunge zu erhalten, einen Ruck mit der Hand thun muß, und diesen nicht so gleich machen kann, daß nicht die Kugel einmal geschwinder, ein andermal langsamer herumkäme. Ich werde hievon unten noch mehr zu

sagen

sagen haben. Wenn er aber nun auch mit den Kugeln und mit den Faden wechselt, so wird er bemerken, das das Gewicht ungleich seyn kann, ohne daß der Schwung der Kugel um seine Hand sich merklich veränderte. Verändert er aber die Länge des Fadens, so ist es, wie mit den Penduln, und der Schwung der Kugel wird immer kürzer von Dauer, je kürzer der Faden genommen ist. Dieß wird vollends anmerklich, wenn er den Faden ganz lang nimmt, und ihn so hält, daß derselbe im Herumfliegen der Kugel sich um den Finger aufwinden muß.

Leser, die diesen Erfahrungen nachdenken, werden nun vielleicht schon annehmen, daß es sich mit diesem Umstand genau nach der Länge des Fadens richte. Das thut es freylich, aber nicht so, wie sie es denken mögten. Wenn sie z. E. die eine Kugel halb so tief herab als die andre hängen lassen, so werden sie darum keinesweges die kürzer hängende noch einmal so geschwind als die längere schlagen sehen. Sie werden, wenn ihrer zween sich die Mühe geben wollen, die Schläge laut mit einander zu zählen, den vierzehnten Schlag der kürzern mit dem zehnten Schlage der längern ungefähr zusammentreffen sehen. Wenn sie aber das Band der einen bis auf den Mittelpunct der Kugel genau viermal so lang, als das Band der andern, machen, dann werden sie genau zween Schläge der kürzern gegen einen Schlag der längern aufzählen. Machen sie es neunmal so lang, so haben sie genau drey Schläge der obern gegen einen Schlag der untern. Kurz, es verhält sich mit diesen Schlägen der Penduln, (denn so nennt man solche in Schwingung gesetzte Körper) wie mit den Quadratwurzeln ihrer Längen.

So leicht ist es, dieß alles zu bemerken, und dennoch ist dieß Jahrtausende durch unbemerkt geblieben. Es sind noch nicht zwey Jahrhunderte verflossen, seitdem Galilei, ein Italiänischer Mathematiker, dieß bemerkt, und die Gründe, warum alles dieß so zugehe, zu untersuchen angefangen hat. Und allererst vor hundert Jahren hat Huygens, ein

in Paris damals lebender Holländischer Mathematiker, die Sache genauer untersucht, und alle Folgerungen, die sie sowol für die höhere Naturlehre, als für die Mechanik der Uhrwerke hat, entwickelt. Seit dieser Zeit haben wir richtige grosse Uhren, sowol zum Haus- als zum astronomischen Gebrauch. Denn es ist klar, daß wenn ich mit einer Maschine, die von einem Gewichte gezogen wird, dessen Wirkung bey dem letzten Rade sehr abnimmt, einen schweeren Körper in Verbindung setze, der nun einmal von der Natur das Recht hat, daß er in einer genau bestimmten Zeit seine Bewegung macht, die Uhr in ihrer Bewegung von demselben abhänge, und daß es nicht mehr so sehr darauf ankomme, ob in derselben hier oder dort ein Zahn ein wenig grösser, ein andrer ein wenig kleiner sey. Dieß kann die Kunst nie ganz vermeiden, obwol ein ungleicher Gang der Uhr ohne dieß angebrachte Hülfsmittel nothwendig daraus erfolgen muß. Meine Leser werden hieraus auch schon einsehen, warum ihr Uhrmacher sie anweise, die Kolbe an dem Pendul ihrer Uhr etwas in die Höhe zu schrauben, wenn sie bemerken, daß die Uhr zu langsam geht, und es vermittelst eben dieser Schraube herabzulassen, wenn ihr Gang zu geschwinde wird. Sie thun dadurch eben das, und haben eben die Wirkung zu erwarten, welche sie sahen, als sie das Band der Kugel etwas kürzer oder länger machten.

§. 81.

Wenig Jahre nach des Huygens Erfindung verschaffte uns ein Franzose, Hautefeuille, eine ähnliche Verbesserung der Taschen-Uhren. Ein Pendul an diesen anzuhängen war unmöglich. Er verfiel aber auf eine Eigenschaft der elastischen Körper, deren ich oben § 65. noch nicht erwähnt habe, und welche freylich durch den Augenschein nie genau zu beobachten ist. Unterdessen will ich doch einige leichte Erfahrungen angeben, in denen sich schon etwas von der Sache zeigt. Wenn meine Leser ein dünnes Seil nicht gar scharf

zwischen

zwischen zween Nägeln spannen, und alsdann mit einem Stabe darauf hart schlagen, und sogleich denselben wieder zurückziehen, so werden sie bemerken, daß das Seil sich auf- und niederwärts dehne, und daß es gleich geschwinde oben und wieder unten sey. Beyläufig merke ich an, daß diese Schwingungen, deren Geschwindigkeit von der Länge, Dicke und Spannung des Seils abhängt, der Grund des Entstehens des Schalls und bestimmter Töne, mit einem Worte der Grund der mathematischen Musik, sind.

Doch folgende Erfahrung dient mehr für meinen Zweck. Wenn meine Leser eine schlanke Ruthe von einem Baum ergreifen, noch besser aber, wenn sie in eines Uhrmachers Werkstätte gehen, sich eine schon gekrümmte Uhrfeder geben lassen, diese an einem Ende in der Hand halten, und dann mit Bewegung der Hand die eine oder die andre in Bewegung setzen, so werden sie bemerken, daß die Ruthe und die Feder von oben nach unten, und wieder von unten nach oben schwanken, und zu ihren Schwingungen eine dem Augenmaß nach gleiche Zeit brauchen werden.

Hautefeuille machte davon für die Taschen-Uhren folgenden Gebrauch: In die Spindel der Unruhe, welche jedermann in seiner Taschen-Uhr kennt, die aber, wenn die Uhr nicht übermenschlich genau ausgearbeitet ist, einen ungleichen Gang mit derselben annehmen muß, bevestigte er das eine Ende einer zarten Stahlfeder, das andre Ende aber nach verschiedenen Windungen an ein unvollkommenes Rad, mit welchem dasselbe in etwas nach der einen oder der andern Seite verrückt werden kann. Ein jedes Buch von der Uhrmacherkunst beschreibt diese Einrichtung, und wer dieses nicht hat, wird es sich von seinem Uhrmacher in einigen Minuten können zeigen lassen. Die Wirkung davon auf die Taschen-Uhr ist diese: Die Unruhe der Uhr kann sich nicht hin und her bewegen, ohne diese zarte Feder (sie heißt uneigentlich das Perpendicul) mit sich so hin und her zu führen, daß sie sich ein wenig ein- und wieder auswinden, kurz in

eine schwankende Bewegung sich setzen lassen muß. Diese Bewegung nimmt sie zwar an, aber nicht mit so blindem Gehorsam gegen die Uhr, daß sie nicht durch ihre eigenthümliche Bewegung die Bewegung derselben so mäßigte, daß, wenn auch die Unruhe bey ungleichem Eingrif der Zähne der Uhr in einander einmal weiter oder kürzer umherschlägt, sie doch durch die eigenthümliche Bewegung eines Perpendiculs in beynahe gleicher Zeit wieder zurückgeführt wird. Doch hat diese Erfindung nicht eben so viel Macht auf die Taschen-Uhr, als das Pendul auf die grosse Uhr hat. Die Ursache davon werden meine Leser leicht einsehen können. Sie werden wissen, daß wenn sie das Pendul zur Ruhe bringen, die Uhr stille steht, und nicht wieder in Gang kömmt, wenn gleich das Gewicht immer gleich stark zieht, bis sie das Pendul wieder in Gang gesetzt haben. Wenn sie dagegen ihre Taschen-Uhr mit dem Finger oder mit dem Uhrschlüssel anhalten, so ruhet zwar das Perpendicul so gut, wie das übrige. Allein so bald sie die Uhr frey lassen, zieht die Feder so stark auf die Uhr, daß Räder und Perpendicul dem Zuge folgen müssen. Sie sehen hieraus, daß die Feder dieser Uhr mehr Macht auf das Perpendicul hat, als das Gewicht der grossen Uhr auf das Pendul. Folglich kann den Unrichtigkeiten der kleinen Uhr durch das Perpendicul nicht so zuverläßig abgeholfen werden, als den Unrichtigkeiten der grossen Uhr durch das Pendul.

Ich kann mich nicht enthalten, hier eine Erwähnung der so berufenen Harrisonischen Uhr einzuschalten. Und warum sollte ich nicht einige Zeilen verwenden dürfen, um die Hauptsache einer Erfindung zu beschreiben, die ihrem Uhrheber mehr eingebracht hat, als ich jemals mit der brauchbarsten Mechanik verdienen werde, wenn sie gleich einem weit grössern Theil des menschlichen Geschlechts, der nicht vom festen Lande geht, nützlich werden kann, als derjenige ist, der die See in solcher Ferne befährt, wo es ihm daran gelegen ist, die Meeres-Länge genau zu wissen. Wer einigen Unterricht

im

in der allgemeinen Geographie gehabt hat, wird wissen, daß es nur darauf ankomme, gewiß zu seyn, wie weit die richtige Zeit des Tages an dem Orte, wo man auf der See sich befindet, von der zu London unterschieden sey, um daraus zu schliessen, wie weit man Ost- oder Westwärts von London gesegelt sey. Z. E. ein Englischer Schiffer, der in der Gegend von Jamaica auf einer nach der Sonne gestellten Uhr Mittag findet, wenn eine andre zu London richtig gestellte und seitdem gar nicht verrückte Uhr schon 5 Uhr 20 Minuten zeigt, kann daraus sicher schliessen, daß er nun 80 Grad von London westwärts entfernt sey. Denn 15 Grad geben eine Stunde, und 80 Grad geben 5 Stunden 20 Minuten Unterschied. Dazu gehörte nun freylich eine sehr richtig gehende Uhr, eine solche, die, wenn sie zu London gestellt wäre, an den Ufern von Jamaica noch zuverläßig zeigte, was sie zu London zu eben der Zeit zeigen würde, wenn sie nicht von ihrem Platze verrückt wäre. Aber richtige Uhren auf einem durch die See bewegten Schiffe hat man bisher nie gehabt. Taschen-Uhren gehen zwar auch bey stärkeren Bewegungen richtig genug für den Gebrauch der Zeit im gemeinen Leben, aber nie richtig genug für diesen Gebrauch in der Schiffahrt. Die Pendul-Uhren aber werden zu leicht durch die Bewegung des Schiffes verrückt, oder stehen gar stille. Den richtigsten Gang behalten sie zwar, wenn sie an dem grossen Mast bevestigt werden, weil hier der Schweerpunct des Schiffes ist; aber auch diese Vorsicht ist nicht zulänglich. Harrison ging demnach zur Feder-Uhr zurück, und half ihr hauptsächlich von zween Fehlern ab: erstlich, daß die Uhr durch eine zwote Feder im Gange erhalten werden kann, auch wenn sie aufgezogen wird. Doch dafür war schon durch eine Erfindung Englischer Uhrmacher gesorgt. Zweytens gab er seiner Uhr eine so schweere Unruhe, daß das Uhrwerk nicht mächtig genug ist, dieselbe umher zu treiben, wenn diese in Stillstand gesetzt ist. Diese Unruhe bekömmt nun das gewöhnliche Perpendicul; aber dies hat mit der Unruhe

weit mehr Macht auf den Gang des Uhrwerks, als bey einer Taschen-Uhr, und daher bekömmt die Harrisonische Uhr die Richtigkeit einer Pendul-Uhr, ohne so, wie diese, durch die Bewegung des Schiff's aufgehalten oder gestört zu werden. Von der übrigen in der Ausarbeitung der Uhr zu dem möglich richtigsten Gange angewandten Kunst habe ich keine Veranlassung zu reden, wenn ich nicht alle Feinheiten der Uhrmacherkunst beschreiben will.

§. 82.

Jetzt werde ich etwas von den Gründen der bisher angezeigten Erfahrungen beyfügen dürfen. Ich thue dies theils zur Ehre der Wissenschaft, damit meine Leser einsehen, daß auch hier der menschliche Verstand in die Gründe so nützlicher Erfahrungen eingedrungen ist, doch noch mehr deswegen, weil wir auf diesem Wege zu denjenigen Bemerkungen gelangen werden, welche ich für die practische Mechanik besser zu nutzen hoffe, als noch bisher geschehen ist.

Wenn ein Körper auf einer schrägen Fläche herab rollt, so ist es durch die tägliche Erfahrung bekannt, daß er auch so viel geschwinder rollt, je steiler diese Fläche ist. Wenn in einem Cirkel (Fig. 104.) ausser dem Diameter AB eine Menge Sehnen BC, BD, BE, BF gezogen werden, so ist es klar, daß ein Körper, der längst dem Diameter fällt, sich geschwinder bewegen müsse, als alle Körper, die zugleich mit ihm längst den Sehnen herabrollen mögten; daß aber auch längst der schräger stehenden Sehne BC eine Kugel geschwinder, an den untern Sehnen langsamer herabrollen werde. Dagegen geben die untern Sehnen einen kürzern Weg, und nun mögte auch ein Unwissender schon auf die Gedanken gerathen, daß eins gegen das andere, die Geschwindigkeit des Falls gegen die Kürze des Weges, aufgehen und eine gleiche Zeit herauskommen mögte. So ist es denn auch wirklich bewandt. Die Erfahrung sowol, als geometrische Beweise, machen diese mechanische Eigenschaft

des

des Cirkels klar, daß die Zeit, in welcher ein Körper längst jeder Sehne des Cirkels herab fällt, derjenigen gleich sey, in welcher er den Diameter mit freyem Falle durchlaufen kann.

Hier müssen wir nun sogleich zweyerley Dinge anmerken:

1) Wenn es möglich zu machen wäre, daß die Schläge eines Penduls in den Sehnen eines Circuls hin und wieder giengen, so würden sie immer gleiche Zeit brauchen, sie mögten nun in grössern oder kleinern Sehnen hin und hergehen. Dieß ist nun zwar nicht möglich zu machen. Der natürliche Schlag eines Penduls bleibt immer in dem Bogen eines Cirkels, der zum Radius die Länge des Penduls hat. Indessen ist leicht einzusehen, daß es in Ansehung der Schläge in kleinen Bogen keinen erheblichen Unterschied mehr machen könne, weil die kleinen Bogen sich von ihren Sehnen nicht mehr merklich unterscheiden. Man kann sich daher darauf verlassen, daß, wenn ein Pendul (Fig. 105.) keinen grössern Schlag als in dem kleinen Winkel ACP thut, es eben die Zeit dazu brauche, in welcher es den Diameter AB durchfallen würde, und daß die Zeit nicht grösser oder kleiner seyn werde, wenn es von p, oder auch nur von π herabschlägt.

Ganz darf ich es indessen nicht vergessen, daß die Gelehrten eine Linie ausfindig gemacht haben, in welcher die Schläge eines Penduls gleiche Zeit brauchen, sie mögen so groß oder klein seyn, wie sie wollen. In einer Rille, die nach der Figur dieser Linie ausgeschnitten ist, rollt eine schweere Kugel nicht nur geschwinder, als in jeder andern Linie, sondern, sie falle hoch oder niedrig, so kömmt sie gleich geschwinde auf den untersten Punct herab. Diese Linie heißt die Cycloide. Von der Epicycloide und der Art, wie sie gezeichnet werde, habe ich schon oben § 56. geredet. Diese ist noch leichter und simpler. Denn statt des Cirkels, um welchen sich dort der Cirkel wälzt, ist hier nur eine gerade Linie zum Grunde zu legen. Oder, um die Sache noch deutlicher zu machen, stelle man sich den Weg vor, den jeder

Nagel in der Felge eines über einen ganz ebenen Boden fortlaufenden Rades in der Luft beschreibt, wenn er sich von der Erde hebt, bis er wieder zur Erde kömmt.

Huygens, dem wir teils die Entdeckung teils die sorgfältigere Untersuchung aller dieser Wahrheiten, von welchen ich bisher geredet, zu danken haben, nahm noch nicht an, daß eine der Zeit nach gleiche Bewegung des Penduls lange dauern könne, wenn es nicht genau in dieser Cycloide schlüge. Er gab deswegen folgendes Mittel an, um es in diesen Gang zu setzen: Man bevestige das Band, oder die dünne Platte, an welcher ein Pendul mit seinem obern Theile hängt, zwischen zwey Blechen, die nach der Form dieser Cycloide gebogen sind. (Fig. 106.) Alsdenn kann das Pendul nicht mehr in einem Cirkel, sondern muß in einer Cycloide schlagen. Diese Bleche findet man noch oben an den Penduln vieler grossen Uhren, welche mit der starken Bewegung der Maschine weite Schläge thun müssen. Denn bey den kleinern Haus-Uhren hat man es nach der Zeit besser gefunden, ihnen dies Hülfsmittel nicht zu geben, sondern sie ihre Schläge frey, aber in kürzerm Wege, machen zu lassen.

Meine Leser sehen jetzt auf die 105te Figur zurück, und merken an, daß, wenn das Pendul zu seinem halben Schlage von P bis A diejenige Zeit braucht, in welcher es gerade herab in dem Diameter fallen würde, es zu seinem ganzen Schlage bis Q hinaus zweymal so viel Zeit brauchen werde. Zu voreilig würde hier mancher hinzusetzen: das ist die Zeit, in welcher es doppelt so tief, das ist zween Diameter durch von D bis A, herunter fallen würde. Denn man erinnere sich aus § 6., daß ein freyfallender Körper in der gedoppelten Zeit viermal so tief, als in der einfachen, durch die beständige Beschleunigung seiner Bewegung, fällt. Wollen wir also noch ferner den vollen Schlag eines Penduls mit dem freyen Fall eines Körpers vergleichen, so müssen wir so sprechen: Das Pendul braucht zu seinem vollen Schlage eben die Zeit, die es brauchen würde, um viermal den

Diameter

Diameter desjenigen Circuls, in welchem es sich bewegt, durchzufallen. Viermal der Diameter ist achtmal der Radius oder die Länge des Penduls CP. Nun wird es Zeit seyn, Maaß und Zahlen zu Hülfe zu nehmen.

Man richte zwo Penduln auf solche Längen ein, die sich wie eins zu vier verhalten. Was von dem einen wahr ist, gilt auch von dem andern. Beyde brauchen zu einem vollen Schlage die Zeit, in welcher eine schweere Kugel achtmal die Länge ihrer Faden durchfallen würde. Für das viermal längere Pendul ist dies ein viermal längerer Weg, und zu diesem viermal längeren Wege gehört nur zweymal so viel Zeit. Folglich braucht auch dieses viermal längere Pendul nur zweymal so viel Zeit zu seinem vollen Schlage, als das kürzere. Wäre es neunmal so lang, so würde es aus eben diesen Gründen dreymal so viel Zeit zu einem vollen Schlage brauchen u. s. f.

Hätte ich die Länge der Penduln wie eins zu zwey proportionirt, so müßte ich so rechnen: Um zweymal so tief zu fallen, braucht ein Körper nicht zweymal so viel Zeit, sondern eine Zeit, die ich durch Berechnung finde, wenn ich aus der Zahl 2 die Quadratwurzel ausziehe. Diese Quadratwurzel ist ungefähr 1, 41. Folglich wird bey zwey Penduln von dieser Länge der zehnte Schlag des längern ungefähr mit dem vierzehnten des kürzern, noch genauer aber der hundertste mit dem 141sten, keiner aber, wenn die Längen ganz genau dies Verhältniß haben, mit einem Schlage des andern ganz genau eintreffen, weil die Quadratwurzel der Zahl 2 nie ganz genau gefunden werden kann.

§. 83.

Ich will nur noch kürzlich beyfügen:

1) Daß durch die Erfahrung ausgemacht ist, daß ein Pendul, um eine Secunde Zeit zu einem vollen Schlage zu gebrauchen, 440 Linien Pariser Maaß, oder 3 Fuß 8 Zoll lang seyn müsse.

2) Daß

2) Daß aber bald andre Erfahrungen gezeigt haben, daß sich dies nicht auf dem ganzen Erdboden so verhalte, sondern daß ein Pendul gegen Norden länger, und gegen die Mitte der Erdkugel zu kürzer seyn müsse, um diese Zeit genau zu halten.

Der ganze Unterschied macht zwar wenig über zwo Linien aus. Indessen hat die Beobachtung dieses so unerheblich scheinenden Umstandes zu solchen Folgerungen Gelegenheit gegeben, durch welche man zu der Untersuchung uud Entdeckung der wahren Gestalt der Erde gelangt ist. Es gehört nicht in eine zum practischen Gebrauch geschriebene Mechanik, die Reihe dieser Folgerungen zu entwickeln, und einzelen von der Sache nicht unterrichteten Lesern das Erstaunen zu benehmen, das bey ihnen zurück bleiben muß, wenn sie hören, daß man von dem Pendul auf die Gestalt der Erde habe zu schliessen wagen können.

§. 84.

Aber so gerne ich nun den Uebergang zu einer mehr practischen Anwendung dieser Sache machte, so ist derselbe doch nicht so leicht gemacht. Ich muß vorher noch meinen Lesern eine Erfahrung zu machen anrathen, welche nicht viel Kunst und Zurüstung erfodert. Man hänge neben einem Pendul von gewisser Länge eine gleich dicke Stange von eben der Länge so auf, daß man sie auch frey hin und wieder schwenken kann. Nun lasse man beyde hin und her schlagen; so wird man bemerken, daß die Stange viel geschwinder, als das Pendul, schlägt. Jetzt messe man die Länge der Stange, nehme ein Drittel derselben, bemerke es von unten auf an der Stange, und ziehe das Pendul so viel höher, daß der Mittelpunct der Kugel mit diesem Zeichen zusammen kömmt, und lasse alsdenn beyde schwanken; so wird sich finden, daß die Schläge der Stange und des Penduls wieder mit einander übereinkommen. Wenn man aber alsdann etwas an der Figur und dem Gewichte dieser Stange ändert,

welches schon geschehen könnte, wenn man einen Klumpen Wachs an die Stange klebte, so wird es sich wieder ändern. Klebt man das Wachs über dem bezeichneten Punct, so geht sie geschwinder, klebt man es unter demselben, so geht sie langsamer hin und her, als das Pendul.

Sollte es nützlich seyn können, wenn ich die Gründe hievon mit mathematischer Schärfe hier ausführen wollte? Doch die Ueberlegung werde ich einem ieden, der bey jenen leichten Versuchen Nachdenken anzuwenden fähig ist, an die Hand geben können, daß es ganz ein anders seyn müsse, wenn ein Pendul, das nur seine Schweere unten hat, und wenn eine Stange, die von oben bis unten schweere Theile hat, in eine schwingende Bewegung gesetzt wird. Man stelle sich die Stange CABD (Fig. 107.) in drey Theile getheilt vor. Der obere Theil CA ist geneigt sich geschwinder zu schwingen, als AB, dies langsamer als CA, aber doch geschwinder als BD. Hingen sie abgesondert an drey verschiedenen Fäden, so thäten sie dieses gewiß. Jetzt aber wird eines mit dem andern bewegt. Die obern Theile werden durch den untern zurückgehalten, beschleunigen aber doch dessen Bewegung so, daß er geschwinder mit fortgehen muß, als er für sich allein gehen würde.

Man verändre diesen Versuch auf folgende Art: Man hänge die Stange in ihrem Schweerpuncte an einem Faden auf, der genau so lang, als vorhin das Pendul, herab hängt. (Fig. 108.) Alsdenn wird die Stange eben so langsam, als ein simples Pendul von eben der Länge, gehen.

Man wird hiedurch schon dem Gedanken nahe kommen, daß in allen solchen Körpern ein Punct sich angeben lasse, auf welchen die Kraft, von welcher diese schwingende Bewegung derselben abhängt, so wirkt, als wenn der Körper nur in diesem Puncte schweer, und nur dieser Punct in eine schwingende Bewegung zu setzen wäre. So ist es in der That. Wenn die ganze Stange in einen dünnen Faden ohne Gewicht verwandelt, und nur in dem Puncte B schweer wä-

re,

re, dieser Punct aber noch immer um die Weite CB unter C hinge, so würde noch immer die Stange sich in der Zeit bewegen, die durch die Länge CB bestimmt wird. Dieser Punct heißt nun der Schwingungs-Punct. Daß dieser Schwingungs-Punct B nicht einerley mit dem Schweerpunct derselben sey, zeigt schon der Versuch. Dieser würde in der Mitte der gleich dicken Stange in E seyn. Er kann auch nicht mit demselben einerley werden, weil hier die Umstände ganz anders sind. Wenn die Stange in ihrem Schweerpunct E aufliegt, so haben alle Theile in gleicher Weite von E gleich viele Schweere und gleich viel Geschwindigkeit, sich um E zu bewegen. Aber wenn die Stange in dem Punct C aufgehangen ist, so wollen nach den bisher gezeigten Gründen alle Theile zwischen C und E geschwinder, und die jenseits E langsamer fort, wiewol bey gleicher Schweere. Die untern Theile folgen dieser Bewegung. Der Theil BD bewegt sich in kürzerer Zeit, als er allein gethan haben würde, hin und her, und geht auch einen grössern Circelbogen durch.

Da die Umstände also hier ganz anders sind, so fällt auch die Rechnung, durch welche dieser Schwingungspunct bestimmt wird, ganz anders aus. Es würde von keinem Nutzen seyn, die Gründe dieser Rechnung hier weiter auszuführen. Eine jede gelehrtere Abhandlung von der Naturlehre und der Mechanik giebt nähern Unterricht darüber, der aber noch sehr durchgedacht, erweitert und in Nebenumständen bestimmt werden muß, ehe man den Schwingungspunct solcher Körper, auf welche ich nun bald alles bisher gesagte anwenden werde, mit mathematischer Schärfe bestimmen kann. Wird es uns unentbehrlich, ihn wenigstens einigermaassen zu bestimmen, so wollen wir uns in dieser Abhandlung mit demjenigen begnügen, was Erfahrung und Versuche an denen Maschinen, die wir unter Händen haben, uns darüber angeben können.

§. 85.

§. 85.

Nur dies will ich noch anmerken, daß sich die Schwingungen und der Schwingungspunct in allen Körpern, welche einer Bewegung von einer Seite zur andern fähig sind, durch eben so sichere Gründe bestimme, als der Schweerpunct, von dessen Lage er jedoch abhängt. Es gehört nicht etwan ein Nagel, und ein Band mit einer Kugel, oder sonst ein Körper dazu, der sich an diesem Nagel aufhängen läßt, um ein Pendul sich gedenken können. Wir haben es allenthalben, wo ein bestimmter Punct, ein Schweerpunct darunter, und die Möglichkeit der Bewegung dieses Schweerpuncts um jenen bestimmten Punct sich finden. Z. E. wenn ein Schiff (Fig. 109.) auf dem Wasser treibt, so wird es sich um den Punct C als den Mittelpunct seiner Ründung drehen können, ohne unter Wasser zu sinken. Ist der Schweerpunct G über diesem Punct, so wird es umschlagen. Ist er aber niedriger, wie man dies immer durch den Bau und die Ladung eines Schiffes zu treffen suchen wird, so wird es ohne grosse Gewalt, die den Schweerpunct G im Circul zu oberst bringen könnte, zwar nicht umschlagen, aber dieser Schweerpunct wird, wenn ihn nicht irgend eine Kraft vest oder auf eine Seite hinaus hält, hin und her schwanken. Wenn der Wind seitwärts in die Segel des Schiffes stößt, so wird G seitwärts gegen den Wind, doch nicht ganz ruhig, liegen. Wenn aber der Wind von hinten in die Segel stößt, oder das Schiff mit stillem Strom fließt, so wird G diese Bewegung ungehindert annehmen, und das Schiff ungehindert schwanken, doch nicht mit derjenigen Bewegung, die ein Pendul von der Länge CG annehmen würde, sondern wir müssen uns ein etwas längeres Pendul CO gedenken, indem der Schwingungspunct O etwas tiefer fällt. Dies alles bestätigt die Erfahrung. Diese Bewegung, welche ein Schiff vor dem Winde, oder selbst bey Windstillen macht, ist dem, der der See nicht gewohnt ist, eben so unerträglich, und erweckt eben so leicht Seekrankheit, als die von

vorn

vorn nach hinten gehende Bewegung, welche die Wellen verursachen.

Diese Bewegung heißt im Französischen le roulis du vaisseau. Sie ist minder merklich, wenn der Wind von der Seite in die Segel stößt, und mächtig genug ist, das Schiff etwas auf die Seite zu legen. Ganz kann sie auch alsdenn nicht aufhören. Aber sie verliert oder versteckt sich unter der stärkern Bewegung, welche das Schiff mit den Wellen annimmt, und welche die Franzosen le tangage nennen. Allein eben diese Bewegung richtet sich auch nach den Grundsätzen der Bewegung eines Penduls. Oder vielmehr, die Bewegung der Wellen, welche dem Schiffe diesen Schwung von hinten nach vorne geben, läßt sich nur aus jenen Grundsätzen erklären. Es ist hier der Ort nicht, mehr davon zu sagen. Doch werde ich dies, was ich hier blos anführe, bald noch einmal zu nutzen Gelegenheit haben.

§. 86.

2) Wenn ein Körper von bestimmter Figur und Schweere einen gewissen Schwingungspunct für den Fall hat, wenn er an einem Ende aufgehangen wird, so wird er einen andern Schwingungspunct haben, und andre Schwingungen machen, wenn er an einem andern Puncte aufgehangen wird. Man versuche es, einen Degen, da man ihn an der Spitze zwischen den Fingern klemmt, ein wenig hin und her zu schwingen; so wird man bald merken, daß man ein ganz andres Pendul hat, als wenn man ihn an dem Knopfe, oder in der Mitte der Schneide, zwischen den Fingern hält. In dem leztern Fall muß der Theil, der sich über meiner Hand schwingt, als ein Pendul vor sich angesehen werden, dessen Schwingungen den Schwingungen des Theils unter meiner Hand entgegen wirken, und die Rechnung verändert sich ganz und gar.

Ich erinnere mich hiebey eines Vorfalls, der den practischen Nutzen dieser Bemerkungen, und der darauf sich gründenden

benden Ueberlegungen, ausser Zweifel setzen wird. Die Klocke ist als ein Pendul anzusehen, das seine Schwingungen in gewisser Zeit verrichtet. Der Klöppel ist es auch. Aber beyde müssen ungleiche Schwingungen haben, wenn sie im hin- und herfliegen an einander treffen, und der Klöppel die Klocke zum läuten bringen soll. Für die gewöhnliche Art, eine Klocke einzuhängen und sie zu läuten, ist dies nun durch die Erfahrung ohne alle Theorie hinlänglich ausgemacht. Vor einigen Jahren schrieb ein um seine Vaterstadt hochverdienter Mann an mich: er habe, da ihm die Erfindung bekannt geworden, eine Klocke so in ihrem Träger einzuhängen, (Fig. 110.) daß die Axen desselben seitwärts neben der Klocke zu stehen kommen, folglich der Mittelpunct ihrer Bewegung dem Mittelpunct ihrer Schweere näher gebracht, und die Bewegung so viel leichter wird, diese Verbesserung bey einer grossen Klocke in seiner Stadt veranstaltet. Nun bewege sich diese zwar so leichte, daß ein Mann sie läuten könne, da sonst vier dazu nöthig gewesen wären; allein die Klocke läute nicht mehr, weil der Klöppel beständig sich an den Wänden der Klocke anlege, und mit derselben hin und her gehe. Ich antwortete ihm: die Sache liege daran, daß die Schwingungspuncte der Klocke und des Klöppels nun, da der Mittelpunct ihrer Bewegung verändert worden, mehr mit einander überein kämen, als vorhin. Mein Rath sey, den Klöppel umzuschmieden, und sein Ende schweerer zu machen, damit sein Schwingungspunct verrückt, und seine Schwingungen aus der Uebereinstimmung mit den Schwingungen der Klocke gesetzt würden. Sollte ich die Sache genauer bestimmen, so müßte ich mir ein genaues Profil der Klocke und des Klöppels, wie auch des Trägers, mit der Anzeige des Gewichts von jedem, ausbitten, um daraus die Berechnung für ihre ietzigen Schwingungspuncte und den zu verändernden Schwingungspunct des Klöppels genau machen zu können. Während dieses Briefwechsels starb mein würdiger Freund plötzlich, und ich habe nicht erfahren, ob mein Rath befolgt,

oder ob die Klocke, um gewiß zu gehen, wieder in die alte Lage gebracht sey, und, wie vor Alters, vier Männern Brod zu geben fortfahre.

§. 87.

3) Man wird bemerken, wenn man einen Körper schwingt, um etwas damit zu zerschlagen, oder zu zerhauen, daß es nicht gleichgültig sey, mit welchem Punkt derselbe auftreffe. Ein Schwerd vermag im Hauen wenig in dem Theile, der zunächst am Handgriff liegt. Man mögte denken, dies komme daher, weil dieser Theil den wenigsten Schwung hat. Aber es vermag noch weniger, wenn man mit dessen Spitze trifft. Und hier ist doch der Schwung am stärksten. In beyden Fällen wird man bemerken, daß der Schlag auf die Hand auf eine unangenehme Art zurück wirkt, und diese Empfindung wird alsdenn am wenigsten merklich seyn, wenn man aus der Wirkung des Schlages oder Hiebes merkt, daß man mit dem rechten Punct getroffen habe. Und was ist dies für ein Punct? Der Name ist leicht ausgefunden. Er heißt der Mittelpunct des Stosses, (centrum percussionis) und kömmt nicht, wie man dies für wahrscheinlich halten mögte, mit dem Schwerpunct, sondern mit dem Schwingungspunct überein. Es braucht also keiner neuen Theorie, um ihn zu bestimmen. Es hat aber eben deswegen gleiche Schwierigkeit damit, und wer wird ihn für alle Werkzeuge, die man zum Schlagen und Hauen braucht, genau berechnen, oder, wenn er berechnet ist, wird der, dem man ein solches Werkzeug in die Hände giebt, immer genau darauf achten, daß er mit dem Schwingungspunct desselben treffe? Indessen kann man sich durch folgende Bemerkungen in dem alltäglichen Gebrauch solcher Werkzeuge leicht helfen:

a) Bey solchen Körpern, welche durch perpendicularen Stoß ihre Wirkung thun, dergleichen die Rammklötze und Stampfer in den Mühlen sind, kömmt es nur darauf an, daß sie mit dem Schweerpuncte richtig auffallen. Denn in dieser Bewegung sind der Schweerpunct und der Schwingungs-

gungs-

gungspunct in derjenigen Linie, in welcher der Körper auffällt.

b) In Körpern, welche mit einer Masse von schweerem Metall auf andre aufschlagen, da sie an einer langen, aber weit leichteren, Handhabe geschwungen werden, fällt der Schwingungspunct in diese Masse, und wenn dieselbe auffällt, so fällt sie sicher mit dem Mittelpunct des Stosses auf. Daher braucht es bey Hämmern, Aexten, und auch bey schweeren Holzschlägeln, keines weitläuftigen Bedenkens. Wenn indessen die Handhabe sehr lang, und im Verhältniß gegen das Eisen oder die Kolbe schweer ist, so fällt dieser Punct näher gegen die inwendige Seite derselben, und man schlägt falsch, wenn man mit der äussern Ecke trifft. Fällt endlich dieser Punct gar in die Handhabe, so ist ein Werkzeug dieser Art gar nicht zu gebrauchen. Dies hat die Erfahrung vorlängst gelehrt, und deswegen giebt man Beilen, die leicht von Eisen sind, z. E. den Beilen der Fleischhauer, nur kurze Handhaben. Auch die Streit-Aexte der Alten hatten deswegen nur kurze Stiele.

c) Je länger ein Körper ist, desto weiter kommen der Mittelpunct der Schweere und der Mittelpunct des Stosses von einander zu stehen. In kürzern Körpern kann man daher nicht sehr irren, wenn man mit dem Theile, wo man den Schweerpunct vermuthet, aufschlägt. Daher sind kurze Degen brauchbarer in der Hand des gemeinen Soldaten, den man ohne Theorie hauen lassen muß, so gut er kann, als längere. Giebt man aber dem Krieger längere Schwerdter oder Säbel, so weiset man ihn an, mit denselben im Zuge zu hauen. Warum dieses? Wenn er im Hauen sein Maaß nicht recht nimmt, und diesseits des Schwingungspunctes auf den Unglücklichen, der sich ihm entgegen stellt, eingehauen hat, so wird sein Hieb nicht die gehörige Kraft haben. Indem er aber das Schwerd im Schwunge an sich zieht, so kommt dieser Punct gewiß einmal über das eingehauene Glied, und der Hieb thut in diesem Augenblick seine stärkste Wirkung.

Hat er aber mit dem äussersten Theile jenseits dieses Puncts getroffen, so hilft ihm dies Ziehen zu nichts.

§. 88.

Sollte sich von diesen, durch Theorie und Erfahrung vorlängst bestätigten Lehrsätzen nicht vieles auf die Bewegung solcher Körper anwenden lassen, die als Theile einer Maschine sich mit derselben herum drehen; es sey nun, daß die Kraft unmittelbar auf dieselben wirke, und sie die übrige Maschine durch ihre Bewegung in Gang setzen, oder, daß sie bloß an der durch die Kraft bewirkten Bewegung Anteil nehmen?

Man nehme eine Stange, die einen Ring oder eine solche Handhabe an ihrem Ende hat, daß man sie bequem in einem Circul um die Hand schwingen kann; so wird man, so wie oben bey der an einem Faden geschwungenen Kugel, bemerken, daß sie diese Circul willig in einer gewissen Zeit mache. Man klebe zur Veränderung des Versuchs einen Klumpen Wachs an dieselbe; so wird man blos durch das Augenmaaß finden, daß diese Herumschwingung anders und anders ausfalle, wenn dieser Klumpen am Ende oder in der Mitte, oder noch weiter gegen die Hand zu bevestigt wird, ungeachtet die Schweere sich nicht verändert. Nun wird es freylich schwer werden, in diesem rohen Versuch die Kraft so zu mäßigen, daß sie sich immer gleich bleibe, und folglich diese Bewegung sich immer gleich ausfalle. Ich enthalte mich auch geflissentlich der Beschreibung künstlicherer Versuche, und der theils darauf gegründeten, theils dadurch bestättigten Theorie der Schwingungen in die Runde, oder der sogenannten Central-Kräfte, in welchen sich freylich zeigt, daß ein jeder in die Runde geschwungener Körper eine jeder ihn treibenden Kraft gemässe Bewegung annehme, und eine mit dieser so wol als mit seiner eigenen Masse im Verhältniß stehende Wirkung ausübe.

Man sehe indessen auf die 111te Figur, die hier bloß zur Erläuterung des § 80. angegebenen rohen Versuchs dienen mag. Eines rohen Versuchs, sage ich. Er kann nicht zu einem

einem künstlichen und genauer bestimmten Versuch gemacht werden. Eine Maschine würde dem an einem Faden herum zu schwingenden Körper E nicht den Ruck geben können, den die hin und wieder bewegte Hand ihm giebt, wodurch er so eben in fortdaurendem Fluge erhalten wird, ohne daß die Hand etwas mehr Kraft anwenden dürfte, als gerade hiezu erfodert wird. Noch weniger würde eine Maschine das Gefühl haben, oder mir das Gefühl mitteilen können, daß dem Körper nur gerade das wenige zu seiner Schwungkraft hinzugesetzt sey, was er nöthig hatte, um in dem Cirkul, in welchem er von B bis E seiner Schweere entgegen gestiegen war, von E bis A durchzufliegen, und ohne weitere Ursachen, die seinen Lauf bestimmen könnten, eine für das Auge so gleiche Zeit seines Umlaufs zu halten.

Die in die Runde geschwungene Kugel braucht, wie oben § 80. gesagt, eine merklich kürzere Zeit zur Vollendung ihres Fluges im Cirkel, als diejenige, welche sie als ein Pendul brauchen würde. Wenn indessen von näherer Bestimmung dieser Zeit die Rede ist, so mag es für meinen Zweck genug seyn, diejenige Zeit, in welcher sie als ein Pendul zwey Schläge thun würde, als die längste anzusehen, in welcher sie den Cirkel willig durchfliegen würde. Denn mein Zweck ist bloß dieser: den, der mit Maschinen umgeht, deren Teile sich in die Runde umher schwingen müssen, zu belehren, daß er in den Maassen dieser Teile auf die Länge zurück sehen müsse, mit welcher dieser Teil jenen Erfahrungen an dem Pendul gemäß eine Schwingung in die Runde von bestimmter Geschwindigkeit am willigsten annimmt, und darin ohne beträchtlichen Zusatz neuer Kräfte fortdaurt.

§. 89.

Jetzt eile ich zur nähern Anwendung auf diesen meinen Zweck. PC (Fig. 112.) sey ein an einer Stange, auf deren Gewicht wir iezt nicht sehen wollen, hängendes Pendul, das sich oben um den in C bevestigten Zapfen willig drehen kann.

Es sey von diesem Zapfen bis auf den Mittelpunct der Kolbe 440 Pariser Linien lang. Seine Schweere wird also machen, daß es in einem kleinen Winkel p C π in einer Secunde einen, in zwo Secunden zween Schläge thut. Stosse ich es heftig an, so wird es dem Stosse widerstehen, und wenn es gleich demselben folgt, und eine geschwindere Bewegung annimmt, doch bald zu seiner natürlichen Bewegung zurück kommen, oder es wird, wenn ich diese geschwindere Bewegung fortgesetzt wissen will, eine fortdaurende Erneuerung dieser Kraft nöthig werden, welcher dies Pendul fortdaurend widerstehen, und durch die Gegenwirkung seiner Schweere zu der ersten natürlichen Bewegung zurück gebracht werden wird.

Wenn ich nun eben dieses Pendul um seinen Zapfen C in einem Cirkul umher treiben will, so gehört jetzt noch eine Kraft dazu, die mehr als seine Schweere vermag. Ist z. E. die Kolbe ein Pfund schweer, und ich greife sie mit einer Kraft, die weniger als ein Pfund beträgt, an, um sie in dem Circul PABD umher zu treiben, so wird sie im Anfange zwar weichen, aber in der Gegend des Punctes A, wo sie perpendicular steigen soll, der Kraft mit ihrem vollen Gewicht entgegen wirken, und da diese geringer als ein Pfund ist, das Uebergewicht über dieselbe bekommen, und zurück fallen. Sie wird aber, wenn eine hinlänglich starke Kraft sie über diesen Punct hinaus bewegt, und ihr eine Geschwindigkeit eindrückt, mit welcher sie vermöge ihrer Kraft der Trägheit den Gegendruck der Schweere überwindet, und bis in die höheren Puncte des Cirkels steigt, wo die Schweere ihrer Bewegung nicht mehr so gerade entgegen wirkt, den übrigen Cirkel ohne Zuthun einer neuen Kraft in weniger als 2 Secunden willig durchfliegen.

Wenn ich nun (Fig. 113.) dieser Stange eine zwente mit einer eben so schweeren Kolbe entgegen füge, welche ihr folglich auf der andern Seite genau das Gleichgewicht hält, so habe ich auf diese Gegenwirkung der Schweere nicht mehr

zu

zu sehen, und diese Stange wird durch jede, wenn gleich nur schwache Kraft, in Bewegung gesetzt werden. Allein ich habe doch noch immer die Kraft der Trägheit zu überwinden, welche sich nach der Schwere des zu bewegenden Körpers richtet. Ausser dieser werden das unvermeidliche Reiben der Stange an dem Zapfen, und der Widerstand der Luft, die Bewegung noch aufhalten. Indessen wird jede dieser Stangen bey der Länge, die sie vom Mittelpunct dieser Bewegung ab haben, unter denen vielen Geschwindigkeiten, die ihnen eingedruckt werden könnten, diejenige leichter annehmen, die ich jezt eben, als der einzelen Stange am zuträglichsten angesehen habe.

Wenn ich nun in diesen Umständen die Kraft verstärken wollte, um die Kolben noch geschwinder umher zu treiben; so würde ich zwar diesen meinen Zweck erreichen. Die Kraft der Trägheit, mit welcher die Kolben ihren bisher angenommenen Schwung fortgesezt haben würden, wird zwar dem Eindruck der verstärkten Kraft folgen; aber ich muß auch auf einen grössern Aufwand der Kraft rechnen, wenn ich diese beschleunigte Bewegung fortdaurend erhalten will. So wie im Gegenteil eine viel langsamere Bewegung den ganzen Körper nicht in den gewünschten Schwung bringen, sondern zu ihrer Fortsetzung eine fortdauernde Mitwirkung der Kraft erfodern würde.

Ist mir indessen diese Zeit zu lang, und ich will einen Umlauf von einer Secunde haben, so werde ich dieses auf folgende Weise wieder erlangen: Ich muß den Mittelpunct der Kolben ungefähr viermal so nahe an den Mittelpunct der Bewegung C, das ist, auf eine Weite von 110 Pariser Linien, oder 9 Zoll 2 Linien, verrücken. (Ich wiederhole, daß ich das Gewicht der Stangen gar nicht in Betrachtung ziehe.) Die Kolbe würde als ein Pendul von dieser Länge in einer Secunde zween Schläge machen; und nun wird sie auch, im Circul herumgetrieben, aufs längste in einer Secunde ihre natürliche Bewegung in die Runde machen.

Alles dieses hat noch statt, wenn ich, statt einer solchen Stange mit zwo Kolben, zwo Stangen mit vier Kolben, oder noch mehrere mit einander zusammen setzte, da denn die Figur der gewöhnlichen Schwungräder (Fig. 92.) entstehen würde. Allein nun müssen wir uns erinnern, daß die Stange auch eine Schweere hat, und, ie schwerrer dieselbe in Vergleichung der Kolbe ist, desto näher ihr Schwingungspunct gegen den Mittelpunct der Bewegung komme. Dies verändert nichts in der Hauptsache, sondern die Rechnung für die Zeiten des Umlaufs bestimmt sich nun anders nach dem veränderten Schwingungspuncte. Wenn ich statt dieser Kolben Körper von gleicher prismatischer Figur und Schweere in die Runde um den Mittelpunct der Bewegung bevestige, (Fig. 114.) so wird die Sache sich noch nicht verändern, und die Zeit des natürlichen Umlaufs wird von der Entfernung des Schwingungspunctes dieser prismatischen Körper abhängen, welche wir auf drey Viertheile des Radius setzen können. Wenn dieser Körper so viele zusammengesetzt werden, bis der leere Raum ganz ausgefüllt wird, oder kurz, bis eine gleich dicke Scheibe (Fig. 115.) daraus entsteht, so ist noch alles auf eben dieselbe Art bewandt. Der Schwingungspunct eines ieden unendlich kleinen prismatischen Theils Cab der Scheibe ist auf Co, das ist auf drey Viertel von dessen Länge, das ist auf drey Viertel des Radius Ca, zu setzen. Alle Theile der um ihren Mittelpunct geschwungenen Scheibe wirken auf gleiche Art als primatische Penduln von dieser Länge, und so schwingt sich die ganze Scheibe ungefähr mit derjenigen Geschwindigkeit herum, die ein simples Pendul von der Länge Co annehmen würde, wenn man es an einem Faden um die Hand schwenkte.

Man bringe endlich ein solches Schwungrad, oder Schwungscheibe, in eine horizontale Lage, und schwinge es in die Runde. Auch alsdenn wird noch die Bewegung von ähnlichen Gründen abhängen. Denn die Theile dieser Scheibe, oder des Schwungrades, waren in der perpendi-

erklären Bewegung mit einander im Gleichgewicht, und sind es noch, so daß keines die Bewegung des andern durch sein Uebergewicht hindert. Ihre Schwungbewegung steht mit den bisher erklärten Gesetzen in Uebereinstimmung, und wenn der Schwingungspunct ieder einzelen Schwungkolbe, oder der einzelen prismatischen Körper, aus welchen ich die Scheibe als zusammengesetzt mir vorstelle, 440 Pariser Linien von dem Mittelpunct der Bewegung entfernt ist, so wird der natürliche Umlauf sich 2 Secunden, ist er nur 110 Linien entfernt, einer Secunde nähern.

§. 90.

Trägheit und Gewicht werden nun zwar beyde der Bewegung des Körpers so vortheilhaft, daß durch diese allein die Bewegung ins unendliche fortdauren würde. Allein eben dieser Bewegung setzen sich das Reiben und der Widerstand der Luft fortdaurend so entgegen, daß sie dennoch immer schwächer werden, und endlich aufhören muß. Noch mehr k das Schwungrad ist mit andern Theilen irgend einer Maschine in Verbindung gesetzt, oder wirkt selbst mit seiner Bewegung auf Körper, die ihm einen starken Widerstand entgegen setzen. (Wir werden dies bald in einer nähern Anwendung auf die Mühlsteine sehen.) Jetzt kömmt es also auf das Moment der ganzen Kraft an, mit welcher das Schwungrad sich bewegt, und wie dasselbe hinreichend werde, diesen mannigfaltigen Widerstand fortdaurend zu überwinden. Bisher haben wir dies noch nicht beachtet, sondern auf die Geschwindigkeit allein gesehen, welche der Körper in der Schwungbewegung annimmt.

Ich habe Fig. 92. ein Schwungrad mit vier Kolben bezeichnet, und iede ein Pfund schweer angenommen. Ihr Moment ist also aus dem Gewichte, vier Pfund, und der Geschwindigkeit, die sie in ihrem Circul haben, bestimmt. Wenn wir iede Kolbe zwey Pfund schweer machen, so haben sie doppelt so viel Kraft, sich fortzubewegen, und können

ein zweymal so starkes Hinderniß, als vorhin, überwinden. Man gebe ihnen zehn Pfund Gewicht, so vermögen sie zehnmal so viel. Oder man nehme eine Scheibe, ABC, (Fig. 115.) die mit ihrer Schwungkraft einen Widerstand von zehn Pfunden überwinden kann. Wäre sie zweymal so dick und schwer, so würde sich die Geschwindigkeit ihres Schwunges nicht verändern, wol aber das Moment, mit welchem sie sich bewegt, verdoppeln, und folglich einen Widerstand von zwanzig Pfunden überwinden.

§. 91.

Hieraus wird sich nun dasjenige vollends aufklären, was ich oben §. 54. von den Schwungrädern gesagt habe, ohne damals die Gründe der Sache mit beybringen zu können. Die Arme der gewöhnlichsten Schwungräder sind zusammengesetzte Penduln, denen nur eine gewisse Bewegung natürlich ist. Stimmt diese Bewegung mit demjenigen Gange überein, in welchen die Maschine das Schwungrad setzt, so hat man es gut getroffen. Die Maschine darf nun nicht viel Kraft verlieren, um diese Bewegung zu unterhalten; und wenn dagegen die Maschine in etwas stockt, so wird das Schwungrad forteilen und der Maschine überhelfen. Damit es aber dieses thun kann, muß es ein hinlängliches Gewicht haben. Z. E. wenn ich an einer Maschine vier pfündige Stangen, jede gleich dicke, zu einer Länge von etwa 13 Zoll ausgeschmiedet, und ins Kreuz gesetzt, anfüge, so wird dies ein ziemlich richtiges Schwungrad für dieselbe seyn, wenn deren Bewegung so eingerichtet ist, daß die Welle oder die Spindel, mit welcher sich dasselbe drehet, ungefähr in einer Secunde herumkömmt. Denn eine gleich dicke Stange, 13 Zoll lang, hat ihren Schwingungspunct noch diesseits 9 Zoll. Aber ich muß etwas für die grössere Dicke des mittlern Theils rechnen, in welchem die Spindel eingelocht ist. Dieser Schwingungspunct macht alsdenn einen Circul von etwa drittehalb Fuß in ungefähr einer Secunde.

cunde. Sind nun die Stockungen, die in der Maschine entstehen, nicht stärker, als daß sie durch die Kraft, welche vier Pfund Gewicht mit einer Bewegung von drittehalb Fuß in einer Secunde gewinnen, überwunden werden können, so wird es der Maschine gute Dienste thun. Sind sie aber stärker, so ist das Schwungrad unzulänglich. Um also von der Wirkung eines solchen Schwungrades gewiß zu seyn, würden wir lieber schweerere, wenigstens zweypfündige, Kolben an diesen gleich dicken Stangen bevestigen, und das Gewicht des ganzen Schwungrades auf 8 Pfund vermehren. Denn so gewinnen wir die doppelte Kraft. Aber dies ist nicht genug. Setzen wir die Kolben ans Ende der Stange, so bringen wir den Schwingungspunct weiter hinaus, und unser Schwungrad will nun mehr als eine Secunde Zeit zu seinem natürlichen Umlauf haben. Wir müssen also unsre Stangen einkürzen, und wir werden nichts in der Sache versehen, wenn wir die Kolben auf 10 Zoll von dem Mittelpunct der Bewegung setzen. Alsdenn wird der Schwingungspunct auf etwa 9 Zoll vom Mittelpunct wenigstens fallen, und der natürliche Umlauf unsers acht Pfund schweeren Schwungrades ungefähr eine Secunde seyn. Es wird also der Maschine voreilen, und den Stockungen derselben so viel mächtiger überhelfen.

Ich könnte dies Exempel noch auf mehrere Fälle verändern. Allein dies wird nachdenkenden Lesern genug seyn. Nur will ich noch ein mir vorgekommenes Exempel von einem übelangebrachten Schwungrade beyfügen. Mir ist eine sonst wohl angelegte Bohrmaschine bekannt, die von Menschen gedrehet wird. Man hatte ihr ein eisernes Schwungrad gegeben, das ich nicht gesehen habe. Dieß änderte man in ein schweeres eichenes um, das 6 Pariser Fuß im Durchmesser hält, zunächst am Mittelpunct nur vier starke Speichen, und an der Peripherie seine meiste Schweere hat. Sein Schwingungspunct, der bey einer vollen Scheibe schon auf drey Vierteil des Radius zu setzen seyn

würde,

würde, ist daher noch weiter hinaus, ungefähr auf drittehalb Fuß zu setzen. Dem zufolge würde die natürliche Schwingung dieses Rades wenigstens $1\frac{2}{3}$ Secunden Zeit erfodern. Ich habe die Maschine nicht im Gebrauch gesehen. Da aber das mit dem Schwungrade sich drehende Getriebe 10 Stöcke, das darein greifende Kammrad 20 Zähne hat, so würde der mit der Maschine gegen den Bohrer zu drehende Körper mit zwey Umgängen des Schwungrades in $3\frac{1}{3}$ Secunden einmal, und folglich in einer Minute 18mal herumkommen, eine Zeit, die für den Zweck der Maschine zu lang ist, und welche abzukürzen, und die Bewegung des Schwungrades zu beschleunigen, die Arbeiter ihre Kräfte unnütz verschwenden müssen.

§. 92.

Es wäre schon viel, wenn wir aus der Theorie der Schwingungen bloß lernten, taugliche Schwungräder an unsre Maschinen zu setzen, wenn wir dieselben brauchen. Allein folgenden Nutzen wird man als wichtiger anzusehen haben. Eine iede grosse aus Räderwerk zusammengesetzte Maschine hat so viel Schwungräder, als sie Räder hat. Ein ieder um seine Axe sich drehender Körper gewinnt das Vermögen, in seiner Bewegung fortzufahren. Dies Vermögen richtet sich nach den vorhin beschriebenen Gründen. Es wird unfähig, sich zu äussern, wenn der Bewegung zu mächtige Hindernisse entgegen stehen. Ein Rad, das an sich nicht schweer, und nicht durch die Bewegung der Maschine in denjenigen Gang gesetzt ist, der mit seiner natürlichen Schwingungskraft überein kömmt, wird schon stocken, wenn es sich ein wenig reibt, oder in ein andres Rad eingreift. Aber ein Rad, welches mit voller Kraft angegriffen und in einen lebhaften Gang gesetzt ist, der mit seiner natürlichen Schwingung überein kömmt, braucht nur wenig Zusatz der Kraft, um in diesem Gange erhalten zu werden, die Stockungen zu überwinden, und mit einer noch stärkern

Kraft

Kraft wird es seine Bewegung leicht beschleunigen. Wenn diejenige Geschwindigkeit, welche ihm die Kraft eindrückt, geringer, als die natürliche Bewegung ist, welche es durch die Schwingung machen würde, so wird es einer ieden Vermehrung seiner Bewegung durch die Trägheit und das Reiben widerstehen. Wenn diese Bewegung aber geschwinder wird, als jene, so kömmt der Bewegung der Umstand zu Hülfe, daß das Rad jenen bestimmten Grad der Geschwindigkeit in sich selbst erhält. Wenn dann die Kraft noch über dieses Maaß wirkt, so folgt freylich eine Beschleunigung der Bewegung. Aber das Rad widersteht dieser Beschleunigung fortdaurend, und verliert dieselbe, so bald die Kraft in etwas nachläßt.

§. 93.

Ich will nunmehr dies in einigen bestimmten Exempeln erläutern, und, so gut ich kann, berechnen. Der obere Stein in einer Mühle, oder der sogenannte Läufer, dessen Radius in unsern Mühlen gewöhnlich 30 Zoll und darüber ist, hat zur natürlichen Umlaufszeit ohngefähr diejenige, welche ein Pendul von $22\frac{1}{2}$ bis 23 Zoll haben würde. Diese ist nach genauer Berechnung 1, 63, oder beynahe $1\frac{2}{3}$ Secunden, und giebt 37 Umläufe des Steins in einer Minute. Damit trifft die in so manchem Buche gegebene Regul, daß der Mühlenstein, oder Läufer, um gut Mehl zu mahlen, in $1\frac{2}{3}$ Secunden einmal herumkommen müsse, sehr gut überein. Durch die Erfahrung ist dies ausgemacht. Aber man wird diesen wahren Grund nirgends angezeigt finden, daß der Stein mit dieser Geschwindigkeit deswegen am besten mahle, weil er alsdenn in seinem natürlichen Schwunge geht. Indessen muß diese Regel nicht weiter gelten, als in so ferne sie ein minimum, oder die langsamste Bewegung des Läufers, angiebt, in welcher derselbe gutes Mehl schaffet. Ich werde bald von Mühlen reden, deren Läufer viel geschwinder umher gehen. Ist der Stein kleiner, wie ihm denn Beyer in seinem Mühlen-Theater nur ungefähr 20 Zoll im

Radius giebt, so ist sein natürlicher Schwung geschwinder. Allein Belidor giebt dem Läufer fünf bis sieben Fuß im Durchmesser, und redet dennoch von sechszig Umläufen, die er in einer Minute machen könne, warnet aber, ihn nicht geschwinder gehen zu lassen, weil sich sonst das Mehl erhitzen würde. Ich habe bey Ausarbeitung desjenigen, was ich hier schreibe, verschiedene unsrer Windmühlen sorgfältig in ihrem Gange beobachtet. Räder und Getriebe waren in einer derselben so eingerichtet, daß der Stein $6\frac{3}{10}$ mal herum kam, wenn die Flügel einmal umher gingen, oder 63 mal bey 10 Umläufen der Flügel. Bey einem ebenen Ostwinde zählte ich fortdaurend sechs bis sieben Umläufe der Flügel in einer Minute, welches 38 bis 44 Umläufe des Steins gab. Der Stein lief also wenig über seine natürliche Schwingung. Wenn indessen der Müller den Stein hob, um dem Korn mehr Raum zwischen den Steinen zu geben, machten die Mühlenflügel 2 bis 3 Wendungen mehr in einer Minute. An einer andern Windmühle, die ich noch genauer untersuchen konnte, weil ich ein sorgfältig und sauber ausgearbeitetes Modell derselben im Hause habe, habe ich bey verschiedener Stärke des Windes, der einmal so stark war, daß er sie ohne Segel trieb, Viertelstunden durch die Umläufe der Flügel gezählt, und die Mittelzahl derselben 10 für eine Minute gefunden. An dieser Mühle hat das Kammrad 65 Zähne, das obere Getriebe 27, das Sternrad 64, und die Getriebe eines ieden Ganges 17 Stöcke. Alles Zahlen, die keinen gemeinen Divisor haben, und folglich ist diese Mühle sorgfältig nach der oben § 39. S. 100. angegebenen Regul verfertigt. Die Zahl der Umläufe des Steins verhält sich, vermöge dieser Zahlen, gegen die von dem Kammrade und Flügel, wie $9\frac{38}{459}$ zu 1. Mit zehn Schwingungen des Flügels kömmt demnach der Stein beynahe 91 mal in einer Minute herum. Dies sind die Hälfte mehr Umläufe, als Belidor dem Laufer erlauben will, und seine in so manchem Buch nachgeschriebene Regul ist daher gewiß nicht richtig.

Es

Es ist aber die Zahl 90 dieser Umläufe beynahe $2\frac{1}{2}$ mal so groß, als die Zahl 37 derer Umläufe, welche der Stein nach seiner natürlichen Schwingung haben sollte. Ich werde bald noch etwas zur Aufklärung dieses Umstandes beyfügen. Es ist hieraus klar, daß eine stärker wirkende Kraft den Mühlstein sehr bald in eine schnellere Bewegung setzt, als die natürliche Schwungbewegung desselben ist. Ueberhaupt muß die Kraft, die man anwendet, mehr als das Vermögen haben, das zur Hervorbringung dieser Bewegung nöthig ist. Denn wenn sie mit dem einmal in Bewegung gesetzten Stein wenig mehr zu schaffen hat, muß sie ihm den Widerstand des Korns überwinden helfen, welchen Belidor auf den 35sten Theil von dem Gewicht des Läufers rechnet, und ihm zur mittlern Entfernung zwey Drittheile des Radius giebt. Wenn nun dieser Widerstand sich durch das Heben des Mühlsteins mindert, oder wenn die Kraft auch nur für eine Weile mächtiger wird, als sie zu diesem Zweck seyn darf, so zeigt die überwiegende Kraft ihre Wirkung unmittelbar in der beschleunigten Bewegung. Aber man nehme nun an, eine Mühle sey so schlecht eingerichtet, daß ihre Flügel einen Umlauf gegen vier Umläufe des Steins machen; die natürliche Schwingung des Steins äussere sich, wie bey den vorigen, erst alsdenn, wenn er 37 Umläufe in einer Minute macht, so muß die Kraft des Windes nicht nur so groß seyn, daß sie den Flügel wenigsten 9 mal umher treibt, wenn der Stein kein Korn zu mahlen hat, sondern sie muß bey dem Mahlen des Korns noch allen Widerstand der Maschine und des Korns überwinden können. Eine solche Mühle wird bey keinem mäßigen Winde etwas beschaffen.

§. 94.

Nun aber müssen wir auch noch den Mühlenflügel als ein Schwungrad betrachten. Dies ist er in der That, und er hat daher seine eigenthümliche Bewegung so gut, als der Mühlstein. Diese werde ich nur ungefähr berechnen können,

nen, weil ich seinen Schwingungspunct nicht scharf berechnen kann, ohne das Gewicht des durch die Welle gehenden Kreuzes, und der Flügel selbst, zu wissen. Die mit in Betrachtung kommende abnehmende Dicke von beyden würde mir ein jedes Mühlenbuch bekannt machen. Ich will indessen seinen Schwingungspunct auf etwas weiter als die Hälfte seiner Länge, oder auf 20 Pariser Fuß setzen. Bey uns macht man den Flügel 40 bis 42 Hamburger Fuß lang. Ein Pendul, 20 Pariser Fuß lang, würde sich ungefähr in 5 Secunden im Circul natürlich schwingen. Der Mühlenflügel wird also in 60 Secunden, oder einer Minute, beynahe zwölfmal sich umschwingen. Dieser seiner natürlichen Bewegung kömmt er schon sehr nahe, wenn er sich neun oder zehnmal in einer Minute umher schwingt. So bald aber die Kraft des Windes sich verstärkt, oder der Stein freyer vom Widerstande wird, so fällt er eilends in die ihm natürliche Bewegung über.

§. 95.

Ich will iezt die Richtigkeit dieser Bemerkungen durch deren Vergleichung mit einigen andern aus der Erfahrung längst gemachten Anmerkungen bestättigen.

Es ist bekannt, daß der Mühlstein, den man bey uns neu mit 20 Zoll Dicke in die Mühle legt, durch wiederholtes Behauen immer kleiner und folglich leichter wird. Unsere Müller brauchen ihn noch als Läufer, wenn er nur die Hälfte seiner ersten Dicke, und folglich nur noch sein halbes Gewicht hat. Alsdenn legen sie ihn zu unterst, und schaffen einen neuen Läufer an. Dies halbe Gewicht ist mehr als hinlänglich, das Korn zu zermalmen. Es ist doch noch immer ungefähr 2000 Pfund. Aber sollte man nicht denken, daß die Mühle bey einem halb so schweeren Stein nunmehr um die Hälfte leichter ginge? Denn selbst der Widerstand des Korns nimmt mit der Schweere des Steins ab, und bleibt, nach Belidors Rechnung immer $\frac{1}{14}$tel von der Schweere

Schweere des Steins. Allein so ist es nicht. Sie braucht noch immer eben so viel Kraft, die Wassermühle eben so viel Wasser, und die Windmühle eben so viel Wind, als vorher. Ein Windmüller, durch dessen Zeugniß ich mir diese Anmerkung bestättigen ließ, setzte hinzu: Wenn mein Stein zu leicht wird, so geht meine Mühle deswegen schlechter, weil der Stein zu wenig Schwung hat. Er wollte nichts anders als dieses sagen: Ich finde, daß die Schwungkraft des schweeren Steins meiner Mühle, wenn sie einmal durch hinlängliche Kraft in Bewegung gesetzt wird, dem Gange derselben besser zu Hülfe kömmt, als die geringere Schwungkraft des leichteren Steins. Es ist ohnehin durch die Erfahrung ausgemacht, daß der schweere Stein mehr Mehl schafft, als der leichtere. Ob es sich genau nach dem Verhältniß der Schweere richtet, daran zweifle ich, so häufig es auch behauptet wird. Indessen sollte die beschleunigte Bewegung des leichtern Steins dies mehrentheils ersetzen, wenn diese Beschleunigung Statt hätte, und die natürliche Schwingung des Steins dieselbe zuliesse, die nicht von seinem Gewicht, sondern von der Grösse seines Radius abhängt, der durch den langen Gebrauch nicht kleiner wird.

Die Anmerkung ist oft gemacht, daß die Windmühlen mehr leisten, als die Theorie berechnet, wenn sonst alle Maschinen-Werke weniger leisten, als die Theorie für sie berechnet. Vielleicht liegt ein Grund hievon darin, daß man bisher in der Theorie der Windmühlen diesen wichtigen Umstand aus der Acht gelassen hat, daß die Kraft hier an einem Rade ihre Wirkung thut, das in seiner Verbindung mit der übrigen Maschine seine natürliche Schwungbewegung annehmen kann, wenn zu gleicher Zeit der Stein auch entweder als ein mächtiges Schwungrad wirkt, oder durch die überwiegende Kraft der Maschine in einen noch stärkern Schwung gesetzt wird Noch habe ich keine Windmühle gefunden, welche so eingerichtet wäre, daß der Läufer sowohl, als der Flügel, beyde ihre natürliche Schwingung

ganz vollkommen zugleich hätten. In der Mühle, deren ich S. 462. erwehnte, hatte der Läufer mehrentheils seinen ihm zukommenden Gang, nemlich 38 bis 44 Umläufe in einer Minute. Der Mühlenflügel aber hatte nur sieben Umläufe, und sollte deren wenigstens zehn machen. In der zweyten kömmt der Gang des Mühlenflügels dem natürlichen Schwunge sehr nahe, oder ist vielleicht bey zehn Umläufen in einer Minute der richtige, wenn dessen Schwingungspunct, den ich nur muthmaaßlich auf 20 Fuß von dem Mittelpunct der Bewegung gesetzt habe, weiter hinaus fällt. (Unter dieser Voraussetzung weicht denn auch die Bewegung des Flügels der ersten Mühle mit sieben Umläufen nicht so sehr von dem natürlichen Schwunge mehr ab.) In jener Mühle ist also der Vortheil des Schwunges hauptsächlich in dem Läufer, doch hat der Flügel beynahe seinen natürlichen Schwung. In dieser findet er sich hauptsächlich in den Flügeln, und hier überwiegt dem zufolge die Wirkung der Kraft so sehr, daß der Schwung des Mühlsteins mehr als verdoppelt wird. Hier wirkt also der Mühlenflügel mit der vollen Kraft seiner Schwingung. Der Stein aber wirkt nicht nur mit der natürlichen, sondern mit der verstärkten Kraft des beschleunigten Schwunges, den ihm die überwiegende Kraft des Flügels eingedruckt hat. Denn es ist einleuchtend, und Theorie und Erfahrung beweisen dies von den Centralkräften, daß, wenn einmal eine überwiegende Kraft einen schweeren Körper in einen grössern, als den ihm natürlichen, Schwung setzt, die Wirkung, die ich von seiner Bewegung erwarte, verhältnißmäßig zunehmen müsse.

§. 96.

Bey den Wassermühlen fällt der Vortheil von dieser Schwungkraft des Rades weg, und es bleibt nur der von der Schwingung des Läufers übrig, wenn derselbe wenigstens 36 Umläufe in einer Minute macht. Das Wasserrad, dem man gewöhnlich acht bis neun Ellen im Durchmesser

giebt,

giebt, müßte wenigstens zwanzig Umläufe in einer Minute machen, um sich derjenigen Geschwindigkeit zu nähern, in welcher es als ein Schwungrad wirken könnte. Es macht aber deren nur neun, höchstens zehn, in der gewöhnlichen Einrichtung der Mühlen, wenn der Stein 53 bis 60 mal herum kömmt. Dieser wirkt alsdenn freylich als ein Schwungrad. Allein bey dem Wasserrade wird die Schwungkraft niemals lebendig, sondern mit dessen Gange verhält es sich auf folgende Art: Wenn das Wasser auf die Schaufeln eines unterschlächtigen Wasserrades auffällt, giebt es demselben die erste, aber eine sehr langsame Bewegung. Es muß von Anfang an mit einer Kraft auffallen, welche den Widerstand der Mühle beträchtlich überwiegt. Mit diesem Uebergewicht der Kraft wird nach Ueberwindung des ersten Widerstandes die Mühle bald in eine schnellere Bewegung gesetzt. Der anfangenden Bewegung, so wie der beschleunigten, widersteht die Mühle durch die Kraft der Trägheit sowohl, als durch ihr Reiben, und andere Hindernisse der Bewegung. Die Kraft der Trägheit wird überwunden, und wird, wie ich so oft angemerkt habe, ein Mittel der fortgesetzten Bewegung in iedem Grade der Geschwindigkeit, welchen die Mühle angenommen hat. Wir wollen nun in Gedanken die Kraft des Wassers in drey Theile theilen. Einer mag derjenige seyn, welcher dem Widerstand der Mühle, und des zwischen die Steine eingeschütteten Korns, den wir als ein Gewicht betrachten, genau das Gleichgewicht hält. Der zweyte derjenige, welcher zu diesem hinzukommen muß, um das Reiben, Klemmen, und die Trägheit der Maschine zu überwinden, und ihr die erste Bewegung zu geben. Der dritte sey derjenige, welcher zur Beschleunigung der Bewegung verwandt wird. Die ganze Kraft des Wassers ist bestimmt, und ieder dieser drey Theile, folglich auch der letzte, ist eine bestimmte Kraft. Diese kann daher nicht anders, als eine bestimmte Wirkung in Beschleunigung der Bewegung der Maschine hervorbringen,

welche dem zufolge zuletzt eine bestimmte einförmige Bewegung annimmt.

Indessen ist leicht einzusehen, daß diese bestimmte Bewegung, welche die Mühle annimmt, in dem Maasse stärker sey, in welchem derjenige Ueberschuß der Kraft, welchen ich als den dritten Theil angesetzt habe, grösser wird. Hiebey kömmt es nun auf ein richtiges Verhältniß dieses Ueberschusses der Kraft zu demjenigen Theil der Kraft an, der den Widerstand zu überwinden ebenhin zureicht. Maclaurin hat den Beweis geführt, daß das beste Verhältniß, welches hier Statt hat, wie 5 zu 4, oder die ganze Kraft zu dem ganzen Widerstande wie 9 zu 4 sey. Doch man findet genauere Bestimmungen von dem Verhältniß der Kraft und des Widerstandes, der Geschwindigkeit des Aufschlagewassers und des Rades beym Belidor im 1sten Cap. des 2ten Buchs seiner Wasser-Baukunst, welche Herr Professor Karsten im siebenden und achten Abschnitt seiner Hydraulik schärfer untersucht und verbessert hat.

Ich gehe nun zu der Bemerkung zurück, daß das Wasserrad in dem geschwindesten einförmigen Gange, den ihm das Wasser giebt, nur zehn Umläufe macht. Wäre es zwischen 30 und 40 Fuß im Radius groß, so käme dieser Gang mit seinem natürlichen Schwunge überein. Aber da es nur 8 Fuß hält, so ist diese Geschwindigkeit noch nicht die Hälfte derjenigen, die es als ein Schwungrad betrachtet annehmen würde. Unter diesen Umständen wird die Schwungkraft noch nicht in ihm völlig wirksam, und es wirkt blos mit der Kraft, die ein Körper bekömmt, dessen Trägheit bis zu einem gewissen Grade überwunden ist, welche nun zwar die Bewegung fortdaurend unterhält, aber ieder sich einmischenden Hinderniß williger nachgiebt, als wenn in dem Rade die Schwungkraft so mitwirkte, wie sie es in Körpern thut; deren Bewegung mit dem Gange übereinkömmt, den ein Pendul von der Länge zwischen dem Mittelpunct der Bewegung und dem Schwingungspuncte willig annimmt und ohne viel

viel Zusatz neuer Kraft zu erfodern, fortsetzt. Dagegen hat der Mühlstein mehr als seine Schwungkraft, und überwindet fortdaurend nicht nur die Hindernisse von dem eingeschütteten Korn, sondern die Maschine hat auch in denen Theilen, die dem Stein am nächsten sind, den einförmigsten Gang.

§. 97.

Das Resultat dieser Vergleichung der Wasser- und der Windmühlen ist also dieses:

1) In den Windmühlen wird die Kraft aus dem Grunde viel thätiger, als in den Wassermühlen, weil sie auf ein Werkzeug wirkt, das die ihm vermöge seiner Länge natürliche Schwingung in der Verbindung mit der übrigen Maschine entweder ganz oder beynahe annehmen kann. In der Wassermühle kann es aber nie, ohne eine ungeheure Verschwendung des Wassers, dahin kommen, wenn man auch die Theile der Mühle auf die dazu nöthigen Verhältnisse einrichten wollte.

2) In beyden Mühlen wirkt der Stein, das ist derjenige Theil der Maschine, welcher den Widerstand zu überwinden hat, iedesmal wenigstens mit seiner vollen Schwungkraft. Allein in den Windmühlen wird ihm weit leichter eine schnellere Bewegung mit der schnellern Bewegung des Flügels mitgetheilt, wenn dieser in seine natürliche Schwingung überfällt, als in den Wassermühlen, deren Rad auch bey der schnellsten Bewegung noch immer fern von seiner natürlichen Schwingung bleibt.

3) Eine Windmühle kann unter gewissen Umständen Vortheil von kurzen, unter andern Umständen Vortheil von längern Flügeln haben. Ich würde ihr kürzere, aber breitere, Flügel geben, wenn sie ein Werk treiben soll, in dessen Theilen gar keine Schwingungskraft wirksam gemacht werden kann, z. E. ein Stampfwerk, oder ein Schöpfwerk. Oder bey solchen Werken, in deren Theilen bey einem kleinen Radius und grosser Schweere die Schwingung zwar

tig wird, aber eine sehr kurze periodische Zeit hat. Dergleichen ist der Holländische Lumpenschneider in den Papiermühlen, dessen Gewicht etwan 1400 Pfund ist, der aber bey seinem kleinen Radius eine so kurze Zeit zu seiner natürlichen Schwingung gebraucht, daß die Mühle ihm niemals zu schnell gehen kann. Aus dieser Ursache sind die kürzern aber breitern Flügel der von dem Herrn Baumeister Sonnin an der Alster bey Hamburg gebaueten Papiermühle derselben nicht anders, als vortheilhaft, und wir haben in der ganzen Nachbarschaft keine Mühle von so leichter Bewegung.

Aber den Flügeln einer Kornmühle mögte ich bey einem Stein von 5 Fuß im Durchmesser keine geringere, als die gewöhnliche Länge geben, weil ihre Schwingungen schon bey dieser Länge fast zu geschwinde für den Stein sind. Beyer, der überhaupt die Windmühlen zu wenig gekannt hat, und nur eine schlechte sogenannte Bockmühle zu beschreiben im Stande gewesen ist, giebt in seinem Mühlentheater dem Flügel 32 Fuß Länge. Dagegen aber hat sein Stein auch nur 39 Zoll im Durchmesser.

Sollte ich nicht dies alles als durch die Erfahrung schon lange ausgefunden ansehen dürfen? Warum sollte man sonst nicht lieber an den grossen Windmühlen kürzere, oder breitere Flügel angebracht haben. Sie kosten weniger, und sind der Gefahr des Brechens im Sturm weniger ausgesetzt, können aber eben so viel Wind fassen, wenn sie eben die Fläche haben. An einer hiesigen Mühle wurden bey einer Hauptreparation von einem sehr geschickten Baumeister kürzere Flügel angebracht. Allein nach einigen Jahren ließ der Müller, da seine Flügel abhängig geworden waren, längere Flügel einsetzen. Diesmal, glaube ich, hatte die Praxis Recht, ohne iedoch zu wissen, warum?

Bey den Wassermühlen kann man mit keiner Grösse des Rades an das Verhältniß hinanreichen, das der Mühle in Absicht auf die Schwingung vortheilhaft wäre. Indessen

wird

wird bey hohem Gefälle ein sehr hohes oberschlächtiges Rad durch diesen Umstand vortheilhaft werden können.

Ungerne breche ich hier diese Materie ab. Man findet in dem zweyten Theile der Haerlemischen Abhandlungen eine Theorie der Windmühlen von Herrn Lulofs, und in dem 8ten Bande eine Theorie der Wassermühlen von Herrn Professor Hennert, wie auch in dem ersten Theil des 51sten Bandes der philosophical Transactions ganz neue und sehr genaue Erfahrungen eines Herrn Smeaton über die Kräfte, welche beyde treiben. Insonderheit hat Herr Professor Karsten in dem vierten bis sechsten Bande die Theorie der Mühlenwerke, sowol derer, die vom Wasser, als die vom Winde getrieben werden, in verschiedenen Abschnitten der Mechanik, Hydraulik und Pneumatik analytisch erläutert.

§. 98.

Alles bisher gesagte trifft keinesweges auf diejenigen Flügel oder sogenannten Windfänge zu, die man an einzelen Theilen einer Maschine anbringt, wenn man eine gar zu geschwinde Bewegung derselben verhindern will. Hier drehen sich einer oder mehrere Körper um einen Mittelpunct, sie haben ihr bestimmtes Gewicht nnd Länge, folglich auch ihren Schwingungspunct. Man giebt ihnen aber bey wenigem Gewicht ausdrücklich viel Fläche, damit der Widerstand der Luft desto mehr auf sie vermöge, und nicht nur ihre, sondern auch der mit ihnen verbundenen Maschine Bewegung aufhalte.

§. 99.

Ich komme nun endlich zu derjenigen Bemerkung zurück, auf welche ich schon oben § 81. meine Leser geleitet habe. In der ganzen Mechanik ist man gewohnt, die kleinern und grössern Theile der Maschine als durchaus veste unbiegsame Körper zu betrachten, welche daher auf die Bewegung keinen andern Einfluß haben, und nichts neues in dieselbe mehr hineinbringen können, wenn der Werkmeister ihnen eine be-

stimmte Figur und Grösse, folglich auch eine bestimmte Schweere gegeben hat. Man wählt daher auch das Material blos in Rücksicht auf die mehrere Dauerhaftigkeit, die man in dessen bestimmter Art zu wirken ihm zutrauet, oder auf die leichtere Zusammenfügung, und dergleichen Umstände mehr. Indessen hat die Erfahrung vorlängst diese Wahl angewiesen, und man weiß, es sey nicht für eine jede Art der Bewegung gleichgültig, was für ein Material man zur Maschine nehme, oder bey einerley Material, ob man dasselbe starr und unbiegsam, oder etwas schlanker und biegsamer mache. Oft kömmt das eine, oft das andre der Bewegung zum Vortheil. Es ist klar, daß in einer jeden zusammengesetzten Maschine einzele Theile, die mehr oder weniger federhaft sind, durch die Erschütterung, die sie mit der Bewegung der Maschine annehmen, in eine wiederkehrende Bewegung gesetzt werden. Diese wiederkehrende Bewegung kann mehr oder weniger mit der allgemeinen Bewegung der Maschine übereinstimmen. Sie kann ihr auch ganz entgegen wirken, sie stören, und sie wenigstens irregulär machen. Die gemeinste Erfahrung davon hat man bey denen Maschinen, die durch Schlagen und Stossen ihre Wirkung thun. Die gemeinen Werkzeuge des Hauens federn sich schon in dem Schwunge, noch mehr aber in dem Aufschlagen auf den Gegenstand des Hiebes. Ein langes gar zu schlankes Schwerd wird wenig Schaden thun, auch wenn man mit dem Mittelpunct des Stosses ganz genau auftrifft. Gar zu lange Stampfer in Mühlwerken werden, wenn sie auch schweerer als ein kürzerer Stampfer dadurch würden, wenig beschaffen. Es giebt auch einen beträchtlichen Unterschied in der Wirkung, wenn Körper von verschiedener Art auf einander treffen, deren zitternde von ihrer verschiedenen Elasticität herrührende Bewegungen nicht mit einander übereinstimmen. Ich glaube hierinn den Grund einer Erfahrung zu sehen, welche zwar nicht allgemein angenommen ist, von der ich mich aber doch mehrmals überzeugt habe. Ein

Ramm=

Rammkloß von schweerem eichenen Holze thut mehr Wirkung, als ein eiserner von gleichem Gewicht, wenn gleich dieser weniger Widerstand von der Luft hat. Aber die zitternde Bewegung in den Theilen des eichenen Klotzes, welche auf den Schlag erfolgt, stimmt mit der in dem eingeschlagenen Pfahl erregten besser überein, als die in dem vestern Eisen.

Indessen scheint es mir, daß überhaupt die federhafte Bewegung in den Theilen einer Maschine die Bewegung des Ganzen mehr und öfter fördere, als hindere. Freylich werde ich diese Materie nicht mit derjenigen Vollständigkeit ausführen, welche ihr durch einen anhaltenden Fleiß im Beobachten und Vergleichung der Beobachtungen, um ein bestimmtes Resultat derselben ausfündig zu machen, gegeben werden könnte. Ich werde demnach blos einige Ueberlegungen und Erfahrungen beybringen, welche mich auf diesen Umstand aufmerksamer gemacht haben, als die Verfasser mechanischer Schriften es bisher gewesen sind.

In der Betrachtung der Fuhrwerke ist mir sehr oft eingefallen, wie ein geringer Unterschied des Gewichts zwischen Fuhrwerken einer Art einen so grossen Unterschied in der Leichtigkeit ihrer Bewegung machen könnte. Zeit und Raum lassen mir nicht zu, einen Auszug derjenigen Regeln beyzubringen, welche ein Fuhrwerk überhaupt mechanisch besser machen, und welche in so manchen Schriften abgehandelt sind. Desaguliers hat in der vierten Lection seiner oft angeführten Experimental-Physik das vortheilhafte und nachtheilige an Fuhrwerken sorgfältig untersucht, und durch Theorie und Erfahrung erläutert. Deutsche Leser finden eine nützliche Abhandlung darüber in dem Allgemeinen Magazin. Allein man setze zwo Kutschen, die beyde nach einer guten Mechanik mit gleich hohen Rädern, mit gleich langem Unterwagen, und überhaupt nach gleichem Maasse gemacht sind. Eine von diesen sey, mehrerer Dauerhaftigkeit und innerer Bequemlichkeit wegen, im Kasten um

100 Pfund schweerer, und dem zufolge sey der Unterwagen auch stärker an Holz und Eisen, so daß der ganze Unterschied 200 Pfund mache. Dies ist die halbe Last eines Pferdes, nach der Rechnung, die man für Extraposten bey hartem Wege, wenn gleich auf sehr lange Stationen, macht. Allein die Erfahrung zeigt einen weit grössern Unterschied in der Arbeit der Pferde, die sie mit der einen und mit der andern Kutsche haben. Der erfahrne Fuhrmann, noch mehr aber der erfahrne Wagenbestätter bey unsern deutschen Posten, wird auf den ersten Anblick des Unterwagens einer schweeren Reisekutsche sogleich von einem Spann Pferde mehr sprechen. Es wird zu nichts helfen, wenn ich ihm durch Atteſtate beweise, daß mein Wagen keine zweyhundert Pfund zu schweer gemacht ist. Er erklärt ihn für einen schweeren, äusserst schweeren Wagen, spannt jenem vier, diesem sechs Pferde vor, und hat Recht. Er hat aber Recht, nicht in Ansehung des Gewichts, sondern eines andern Grundes, den er sich nur dunkel gedenkt. Der schwächere Wagen ist in allen seinen Theilen elastischer, und die davon abhängende Bewegung fördert seine Bewegung, zumal auf hartem Boden, ungemein, wenn dagegen der stärkere Wagen auf ieden Stein als eine todte Last stößt, als eine todte Last in iedes Loch einfällt, und als eine solche aus demselben durch die Kraft der Pferde iedesmal herausgehoben werden muß. Man sehe den Gang einer gut gemachten Cariole an, wie deren lange Bäume bey iedem Tritt des Pferdes sich federn, und dadurch das Fuhrwerk iedesmal einen gewissen Ruck bekömmt, der zu dessen Fortlaufen sehr vortheilhaft ist.

Doch bey Schiffen bin ich viel gewisser, daß die elastischen Schwingungen der Seile, Masten und anderer Theile desselben seiner Bewegung durchaus vortheilhaft sind, und hier bin ich der Entdeckung der Gründe noch etwas näher gekommen. Ein erfahrner hier noch lebender Schiffer erzählte mir folgendes: Er lag mit einem gut besegelten

Schiffe in London, das er gegen seine Rückreise sorgfältig versehen, alle Seile betheeren und anziehen ließ. Insonderheit fiel ihm ein, diejenigen Seile, mit welchen die obern Masten nach hinten zu, wiewohl unter einem sehr kleinen Winkel, zurückgespannt werden, recht scharf anziehen zu lassen. Nun segelte er in Gesellschaft eines Schiffes, das er für viel schlechter, als das seinige, kannte, aus der Themse. Er merkte bald, daß dieses ihm vorsegelte, und mußte dem Schiffer, der gerne Gesellschaft mit ihm halten wollte, bald erlauben, ihn zu verlassen. Jetzt untersuchte er sorgfältig, wo es seinem Schiffe fehlen mögte; alles aber war vergebens, bis es ihm einfiel, diese Seile (ihr holländischer Name ist bredoen, der französische etai du mat de hune) etwas lösen zu lassen. Und nunmehr holte er nicht nur jenes Schiff bald wieder ein, sondern kam in einer Reise von wenig Tagen viel früher auf die Elbe. Ein andrer Schiffer erzehlte mir bey eben dieser Gelegenheit, daß er es sehr vortheilhaft gefunden, seine Ankerbojen in der Mitte derer starken Tauen, die von einem Mast zum andern schräg herab nach vorne her gespannt werden, aufzuhängen, sie im Winde spielen zu lassen, und folglich eine federhafte Bewegung diesen Tauen sowohl, als den Masten, zu geben. Ich erinnere mich, in einer Ostindischen Reisebeschreibung gelesen zu haben, daß ein sonst sehr gut besegeltes Schiff eine sehr langsame Fahrt hatte. Der Schiffer bemerkte endlich an dem grossen Mast einen zur stärkern Bevestigung eingeschlagenen Bolzen, der ihm entbehrlich zu seyn schien, und ließ ihn auslösen. Sogleich bekam das Schiff eine bessere Fahrt.

Es ist hieraus klar, daß es der Wirkung des Windes auf die Werkzeuge des Segelns sehr zu Hülfe kömmt, wenn die Elasticität derselben (sie sind aber alle sehr elastisch) ein gewisses Spiel behält, und sie nicht zu steif und veste aufstehen, oder ein Theil des andern Federkraft störet. Allein folgendes Beyspiel beweist, daß es auch nicht einmal für

den

den Körper des Schiffes gleichgültig ist, wenn alles steif und unbeweglich an- und aufliegt. Eben der alte Seemann, von welchen ich die erste Erfahrung habe, erzehlte mir, daß auf einer Reise, die er nach Ostindien gethan, sein Capitain bey der Rückkehr von Batavia das grosse Boot auf das Oberdeck legen, und da er es zwischen Batavia und dem Cabo nicht nöthig hatte, mit Klammern gegen den Bort des Schiffes habe bevestigen lassen. Er merkte bald, daß seinem Schiffe im Segeln etwas mangelte, und fand eine grosse Verbesserung, als er das Boot aus seiner Lage so lösen ließ, daß es bey der Bewegung des Schiffes etwas mehr Spielraum hatte.

Ich habe schon gesagt, daß ich in Ansehung des Schiffes etwas mehr Grund anzugeben mich getrauete. Er ist dieser: Die Regul, nach welcher die Wellen sich bewegen, wird von den neuern Mathematikern aus eben denen Grundsätzen hergeleitet, aus welchen das Pendul und dessen Bewegung erklärt wird. Dem zufolge braucht eine Welle ABC, (Fig. 116.) um mit Sinken und Heben den Weg AB durchzulaufen, eben die Zeit, in welcher ein Pendul, dessen Länge ABC, oder der Rundung der Welle gleich ist, einen Schlag thut. Die Seile und Masten des Schiffes werden mittelst der Segel von dem in diese stossende Winde angegriffen, der zu gleicher Zeit die Wellen unter dem Schiffe erregt, und das Schiff mit denselben fortführt. Die Theile des Schiffes federn sich gegen den Wind vermöge der Elasticität, und gerathen in Schwingungen, die sich so, wie die von den Wellen, nach der Kraft des Windes richten, und, ohne einander in der Zeit gleich zu seyn, (weil es bey diesen elastischen Schwingungen auf etwas mehr, als auf die Kraft des Windes, ankömmt) doch mit einander in einer gewissen Uebereinstimmung stehen. Denn wie der schwächere Wind kleinere, der stärkere grössere Wellen macht, die folglich auch in verschiedener Zeit steigen und sinken, so erregt er auch schwächere oder stärkere Schwin-

gungen

gungen in den Segeln, Masten und Seilen des Schiffes. Daß aber diese übereinstimmende Schwingungen derer Theile, die zum Schiff gehören, und derer Wellen, die das Schiff mit sich fortführen, vortheilhafter zur Bewegung des Ganzen sind, als wenn die ersteren fehlen, und der Wind unten auf ein seiner Kraft ausweichendes Wasser, oben aber auf eine Menge starrer und unbiegsamer Körper stößt, zeigt sich aus den drey angeführten Erfahrungen, deren ich in einem Seeplatze, wie Hamburg, noch weit mehr sammlen könnte.

Indessen erklärt dies nicht die vierte Erfahrung von dem zu stark bevestigten Boote. Sollte sie manchem nicht allerdings glaubhaft scheinen, so bin ich nicht Bürge für ihre Wahrheit nach allen ihren Umständen. Indessen muß ich doch bey dieser Gelegenheit einen Gedanken äussern, der schon älter, als diese Erfahrung, bey mir ist, nemlich diesen: daß der Richtigkeit aller mechanischen Grundsätze und Untersuchungen immer vieles in der Erfahrung abgehe, je mehr die bewegten Körper von demjenigen Zustande abweichen, in welchem sie die Mechanik und Physik betrachtet, nemlich als vollkommene solida, oder als Körper, die auf das vollkommenste zusammenhängen, und in denen kein Theil sich anders bewegen kann, als die Bewegung des Ganzen es bestimmt. Nur wenige Körper haben diesen Zusammenhang, und sind so ganz als eine Masse anzusehen, daß nicht auf die Bewegung der Theile vor sich, sie sey so klein sie immer wolle, Rücksicht zu nehmen wäre, und diese sich anders und anders bestimmte, aber auch auf die Bewegung des Ganzen zurückwirkte.

Dies alles wird keine Theorie jemals scharf bestimmen können. Wir haben schon Theorien genug von der Bewegung eines Systems mehrerer Körper. Aber in diesen Theorien sieht man doch immer die Körper als durch veste oder nach gewissen Gesetzen bestimmte Bande mit einander verknüpft, jeden Körper für sich aber als ein bestimmtes solidum

solidum an. Alsdenn aber treffen diese Theorien nicht auf den Umstand, wovon ich rede, zu.

Doch ich mögte mein Buch ungern mit einem mechanischen Traum endigen. Und dafür mögte mancher diesen Gedanken halten, zumal wenn ich ihm gar Anlaß geben sollte, zu glauben, als wenn ich eine unaufhörliche innere Bewegung der Theile der soliden Körper dabey zum Grunde setzte. Dies ist keinesweges meine Meinung. Allein das werde ich ohne Scheu annehmen dürfen, daß in der Erschütterung, welche eine körperliche Masse annimmt, die Theile des Körpers nach der mannigfaltigen Zusammensetzung derselben, je nachdem der Körper in die Classe der harten, weichen, oder elastischen gehört, Bewegungen für sich annehmen, welche mit der Bewegung des Ganzen mehr oder weniger übereinstimmen. Noch mehr aber habe ich Grund anzunehmen, daß, wenn die Kunst einen Körper aus vielerley Stücken, und noch dazu von verschiedener Materie, zusammensetzt; sie auf alle erfoderliche Art verbindet, und nach der Meinung des Künstlers Ein Ganzes, Eine Masse, daraus macht, auf diesen Umstand, nemlich auf die in verschiedenen Theilen entstehende federhafte Bewegung, gar sehr zu achten sey. Man sieht es bald, wie sich diese Bewegungen einander stören, wenn die Zusammenfügung dieser Theile nicht sorgfältig gemacht ist. Mit einer Maschine, worinn alles schlottert, ist nichts auszurichten. Das Mittel, sie auf eine Bewegung zuverläßig einzurichten, ist die genaue und standhafte Zusammenfügung ihrer Theile, und man wendet, um diese, wenn sie mangelhaft wird, wieder herzustellen, vorzüglich die Schrauben an. Aber man verklammere und schraube solche Maschine noch so sehr zusammen, so wird man die elastischen Schwingungen einzeler Theile derselben auf keine Weise ganz hemmen können.

§. 100.

§. 100.

Durch die Erfahrung ist vieles von diesem längst bemerkt, und ich kann das Resultat dieser Bemerkungen auf einige Regeln zurückbringen, welche man in der Praxis gemeiniglich befolgt, ohne daß der Grund derselben deutlich entwickelt wäre.

1) In langsamen Bewegungen sind die elastischen Schwingungen schädlich. Sie sind auch schädlich in denjenigen Theilen einer Maschine, welche sich zwar schon geschwinde genug bewegen, aber doch eigentlich nur da sind, um in andre Theile einzugreifen, und diesen die letzte zweckmäßige Bewegung mitzutheilen.

Will man nun diese elastischen Schwingungen verhindern und schwächen, so setzt man die Maschine, oder das Stück der Maschine, aus einem Material zusammen, das theils wenig Federkraft hat, theils dieselbe in kurzen dicken Stücken beynahe ganz verliert. Es liessen z. E. sich wol Anschläge geben, die Kamm- und Stern-Räder der Mühlenwerke so gut von Eisen, als von Holz zu machen. Wenn man sie aber nicht ungemein dick machte, so würden sie zu viel Federkraft behalten, und dieses würde dem Gange der Mühle gewiß nicht zuträglich seyn. Aber aus vielen kurzen Stücken Holz zusammengefugt, die man auf das sorgfältigste in einander fugt und verbindet, hat es diese dem Gange des ganzen Werks schädliche Federkraft nicht so sehr.

2) Es hindert den ganzen Gang der Maschine, wenn die Bewegung derselben in dem Gebäude ein Zittern und elastische Schwingungen hervorbringt, die denjenigen, welche die Maschine selbst in geringerm oder grösserm Maasse hat, entgegen wirken, weil sie nicht sowol von dem bestimmten Gange der Maschine, als von der Erschütterung derselben überhaupt, abhängen, und daher nicht mit diesen in einer hinreichenden Uebereinstimmung stehen, folglich auf die Maschine auf eine nachtheilige Art zurückwirken. Man hat, ohne Zweifel auch aus diesem Grunde, vorlängst gelernt,

lernt, die Häuser der Wasser-Mühlen sehr vest zu bau
Ich würde aber es auch zu einer Regel machen, keinem so
chen Hause, insonderheit wenn es von Ständerwerk gebau
ist, hohe Stockwerke zu geben, dergleichen ich doch vie
bemerkt habe. Ich würde auch grosse und folglich mit lang
Balken gedeckte Zimmer in einer Mühle verbieten. Ich
würde alle Balken auf eine kürzere Länge unterstützen, al
in welcher es sonst zu deren Haltbarkeit nöthig ist. Bey
den Windmühlen halte ich aus eben diesem Grunde die ver-
schiedenen Bauarten keinesweges für gleichgültig. Die alten
deutschen Bockmühlen, deren ganzes Gebäude sich auf einem
grossen Pfahl dreht, sind die verwerflichsten, weil kein Theil
des Gebäudes rechte Haltung hat, sondern alles mit der
Mühle bebt und schüttert. Sie sind auch deswegen in die-
sen Gegenden, wo wir den bessern Bau der Windmühlen
von den Holländern gelernt haben, fast ganz aus dem Ge-
brauche. Doch sind bey den Holländern solche Mühlen noch
nicht abgekommen, die zwar als Thurmmühlen gebauet sind,
aber so, daß alles sich um die Mitte drehen läßt, und der
ganze Thurm mit dem untersten Fußboden auf Walzen umher
gerollt werden kann. Van Zyl beschreibt in seinem Thea-
tro Machinarum zwo dergleichen auf der 27 bis 34sten Kup-
fertafel. Aber er beschreibt diese, wie alle übrigen Mühlen-
werke, ohne das geringste Urtheil über ihr Gutes und Böses.
Eine Sägemühle von dieser Bauart ist noch vor wenig Jah-
ren in unsrer Nachbarschaft nachgeahmt worden. Allein die
eigentlichen Thurmmühlen, an welchen nur der kleine Kopf mit
der Welle und dem Kammrade beweglich ist, sind diesen weit
vorzuziehen. Ich weiß aber auch Beyspiele, daß der Thurm
solcher Mühlen zu hoch gebauet worden, und als eben des-
wegen der Müller kein Brod mit derselben halten können,
man sich genöthigt gesehen hat, den obern Theil abzunehmen,
und den Kopf auf einen kürzern Thurm neu aufzusetzen. Fast
mögte ich für den vortheilhaftesten Bau einer Windmühle
denjenigen erklären, von welchem man eine Zeichnung in
Limperchs

Limperchs Holländischem Mühlenbuch auf der 21 und 22sten Tafel findet, und die er sowohl, als van Zyl, eine Wippe-Mühle nennet. Gerade nach dieser ist auch diejenige gebauet, und das Modell derselben gemacht, von welcher ich S. 462 f. geredet habe. Hier trägt ein breites Untergebäude die achteckigte pyramidalische Bedachung. Der Kopf der Mühle wendet sich mit der kleinsten Kraft auf der achteckigten Spitze dieses Dachs, und hat noch inwendig eine sehr wohl angebrachte Unterstützung, welche Limperchs Zeichnung sehr dunkel anzeigt. Die zur Wendung nöthige Kraft ist also viel kleiner, als sie bey den Thurm-Mühlen erfodert wird. Die ganze Mühle wird nicht höher gebauet, als so, daß der Flügel eben über die Erde wegschlagen kann. Alles ist folglich so kurz abgeständert, und inwendig hat das ganze Mühlenwerk seine gehörige Haltung in sich selbst so, das die Erschütterung des Gebäudes theils unerheblich wird, theils auf den Gang der Mühle fast gar nicht zurückwirken kann.

3) Allein an denjenigen Theilen einer Mühle, welche entweder die Kraft mit einer schnellen Bewegung umher treibt, oder welche auf den Widerstand mit einer noch schnellern Bewegung wirken, werden die elastischen Schwingungen nicht nur minder nachtheilig, sondern auch unter gewissen Umständen vortheilhaft, ja so gar nothwendig. Die Flügel einer Windmühle haben ohne Zweifel diese elastischen Schwingungen neben der Schwingung in die Runde. Durch gemeine Erfahrungen lassen sich dieselben freylich nicht beobachten; und eben so wenig weiß ich Erfahrungen anzugeben, wodurch das Vortheilhafte oder Nachtheilige derselben so geprüfet werden könnte, daß dadurch auszumachen wäre, wie der Gang einer Windmühle gefördert werde, je nachdem die Flügel mehr oder weniger elastisch sind. Das aber getraue ich mir doch zu behaupten, daß eine Mühle, deren Flügel schlank, und folglich bey ihrer grossen Länge federhaft sind, einen bessern Gang haben müsse, als eine solche, deren Flügel plump und steif gemacht sind.

Allein von dem Mühlstein ist es vorlängst durch die Erfahrung ausgemacht, daß alle seine Wirkung von der Elasticität desjenigen Balkens, oder des sogenannten Steges, abhänge, auf dessen Mitte das Mühleisen aufsteht, mit welchem er sich drehet. Dieser Balken ist etwa 6 Zoll breit und 5 Zoll dick, bey einer Länge von 9 Fuß; folglich viel zu schwach, um das mehr als 4000 Pfund betragende Gewicht des Mühlsteins, Mühleisens und Getriebes ohne Nachgeben zu halten. Aber auch sein Ende ist nicht vest unterstützt, sondern ruht auf der Mitte der sogenannten Tragebank, deren Ende von der Hebeschiene nach oben gehalten wird. Alles biegt sich also unter dem Mühlstein, und federt sich wieder gegen denselben, so bald mehr Korn zwischen den Steinen einfällt, und dieses für eine kleine Weile das Gewicht des Mühlsteins mehr tragen hilft. Diesen federhaften Schwingungen des Steges folgt der Mühlstein, und hebt sich und sinkt wechselsweise auf das Korn bey seiner fortdaurenden Umschwingung herab. Belidor versuchte es, diesen Balken unter der Stelle, wo das Mühleisen aufsteht, zu unterstützen. Sogleich gab die Mühle kein Mehl mehr, sondern unbrauchbares Schrot.

Belidor, ein Mann, der den Geist der Beobachtung so sehr, als irgend ein Gelehrter, hatte, kam also sehr spät auf die Spur einer Sache, die gewiß durch die Erfahrung eines jeden Müllers vorlängst ausgemacht war. Und ich würde mich über den Müller wundern, der ihm nicht vor seinem Versuch, den Steg zu unterstützen, gesagt hätte, was erfolgen würde. Denn eben um dieses Spiel des Mühlsteins zu befördern, hebt der Müller den Läufer von Zeit zu Zeit, so bald er merkt, daß die Steine zu scharf an einander gehen, und nicht Korn genug zwischen beyden ist, daß sich der Läufer heben könne.

§. 101.

Aber so ist es mit uns Gelehrten. Wir finden so manches nach dunkeln Vorstellungen in den Künsten und Gewer-

werken angenommen und ausgeführt, worauf uns alle Theorien und Vernunftschlüsse nicht haben leiten können. Alle Arbeiten der Künste und Gewerke sind mechanische Erfahrungen für den betrachtenden Philosophen und Mathematiker. In sehr vielen derselben zeigt sich die Natur unter ganz andern Verwickelungen und mit ganz andern Wirkungen, als in denen einfachen Versuchen, welche wir zur Aufklärung oder zur Bestärkung unserer Theorie anzustellen gewohnt sind. Deuten wir nun jene ganz nach diesen aus, so verfehlen wir die wichtigsten Entdeckungen, welche sich an den zusammengesetzten Werken der Kunst in der Zusammenkunft so vieler mitwirkenden Ursachen verstecken, von deren einzelen wir unterrichtet sind. Wir glauben alsdann das Ganze zu verstehen, bauen auf unsre Theorie fort, und schaffen nichts. Man wird diesen Fehler in des Le Camus Traité des forces mouvantes pour la pratique des arts & des metiers häufig begangen finden, einem Buche, das ich nach seinem Zweck und Inhalt lange als eines der wichtigsten für meine Absicht angesehen habe. Es zeugt von vielem Beobachtungsgeiste, eilt aber nur zu oft den Künsten mit einer Theorie voreilig zu Hülfe, die deswegen unzulänglich ist, weil sie auf unzulängliche Erfahrungen gegründet worden. Er geräth z. E. in dem vierten Capitel auf eine Erfahrung mit den Schwungrädern, die aber nur die Reibung von deren Axe betrifft, und nun folgt eine Art von Theorie, ich weis nicht, ob für die Schwungräder, oder für die Windfänge, die er beyde aus einem Gesichtspunkt ansieht, in welcher ich auch keinen Gedanken richtig, ja sogar deutliche Widersprüche gefunden habe.

Wollen wir diesen Fehler vermeiden, so müssen wir in der Beobachtung der zusammengesetzten Werke der Kunst zuvörderst alle mitwirkende Ursachen entwickeln, ihre Art zu wirken untersuchen, und aus einander setzen, was jede besonders thue. Finden wir alsdenn etwas neues, und was uns unsere Theorie noch nicht bestimmt hat, so ist es Zeit, auf einfachere Werkzeuge zu denken, an welchen sich die neu bemerkte

Wirkung der Natur auf eine bestimmtere Art zeigt, als in den zusammengesetztern Maschinen des Künstlers und des Fabricanten. Werkzeuge einer solchen Art sind diejenigen Modelle, an welchen Smeaton die oben S. 471. angeführten Versuche über die Wind- und Wasser-Mühlen angestellt hat. Aber man erinnere sich bey solchen Werkzeugen immer, daß es nur Modelle sind, und sehe von Zeit zu Zeit auf die Maschine im Grossen zurück, wo das grössere Maaß und Schweere die Wirkung der Natur noch ganz anders bestimmen. Alsdenn aber kann es nicht fehlen, daß wir nicht auch zuweilen auf gültige Verbesserungen und schärfere Bestimmungen einer für die Praxis nützlichen Theorie gerathen sollten. Wir müssen uns aber nicht wundern, und uns unsre Mühe nicht verdriessen lassen, wenn wir nach genauer Untersuchung alles das schon durch die Praxis erfunden finden, was wir aus unsrer Theorie ihr als eine Verbesserung anrathen zu können glaubten.



Inhalt

Inhalt
der zweyten Abtheilung.

Erster Abschnitt.
Von den vornehmsten Grundgesetzen der Bewegung.

Zweyter Abschnitt.
Gründe zur Vergleichung derer Kräfte, durch welche die Bewegungen hervorgebracht werden.

Dritter Abschnitt.

Von dem Hebel und denen einfachen Maschinen, die sich aus dem Hebel erklären lassen.

Vierter Abschnitt.

Von der schrägen Fläche, und den daraus zu erklärenden Maschinen.

Fünfter Abschnitt.

Von der Zusammensetzung der Maschinen.

Sechster Abschnitt.

Von denen Hindernissen, welche die Wirkung der Maschinen stören, und deren Berechnung schweer machen.

Siebenter Abschnitt.

Beurtheilung derer Kräfte, die zur Bewegung der Maschinen angewandt werden.

Achter Abschnitt.

Nöthige Bemerkungen und Ueberlegungen bey dem Maschinenwesen.

§. 70.

§. 91.



Geom. TAB. 1.

1.

B

C

Fig. 3.

Fig. 4.

A D A

A B

D

C

Fig. 6.

E F

ig. 8.

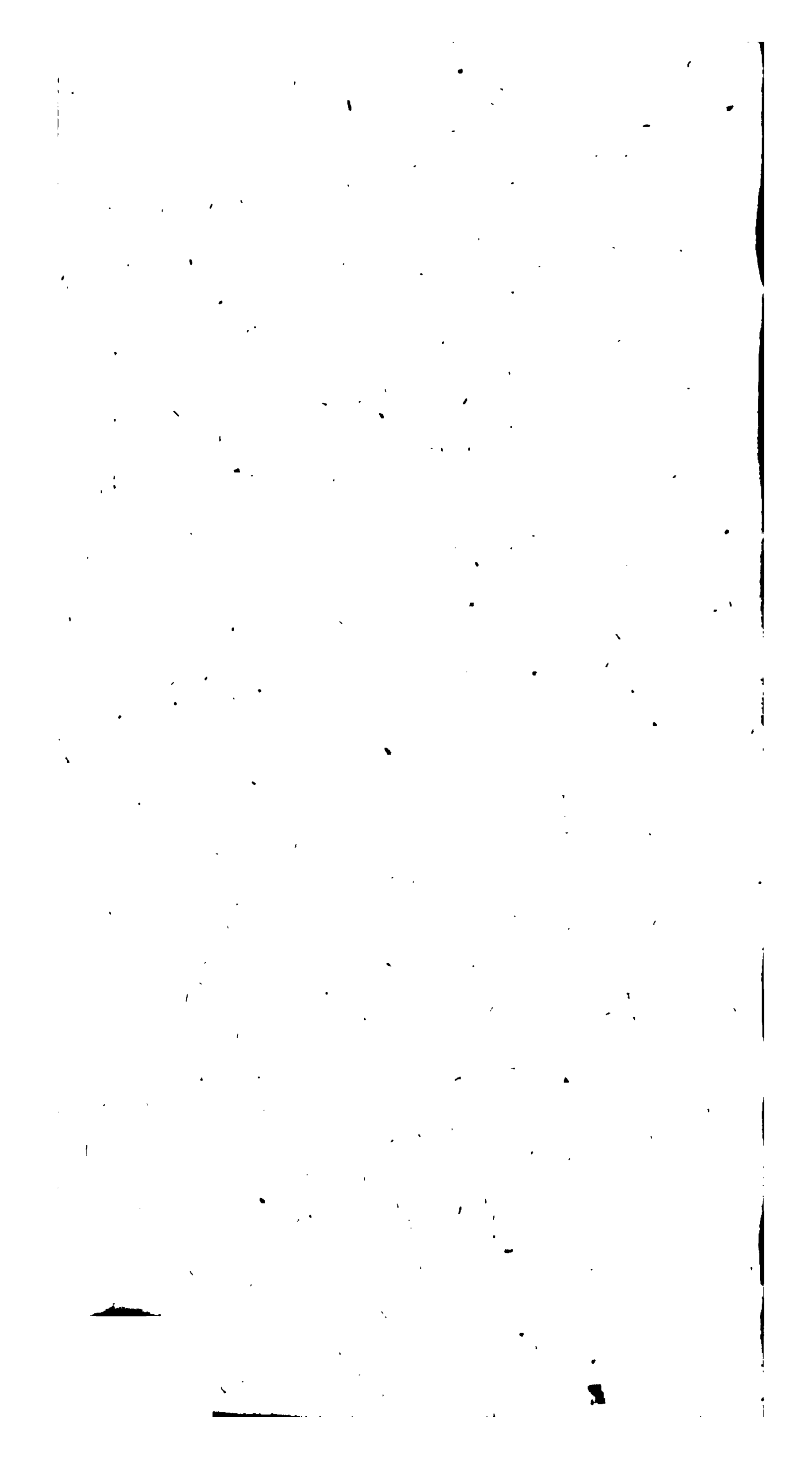
Fig. 9.

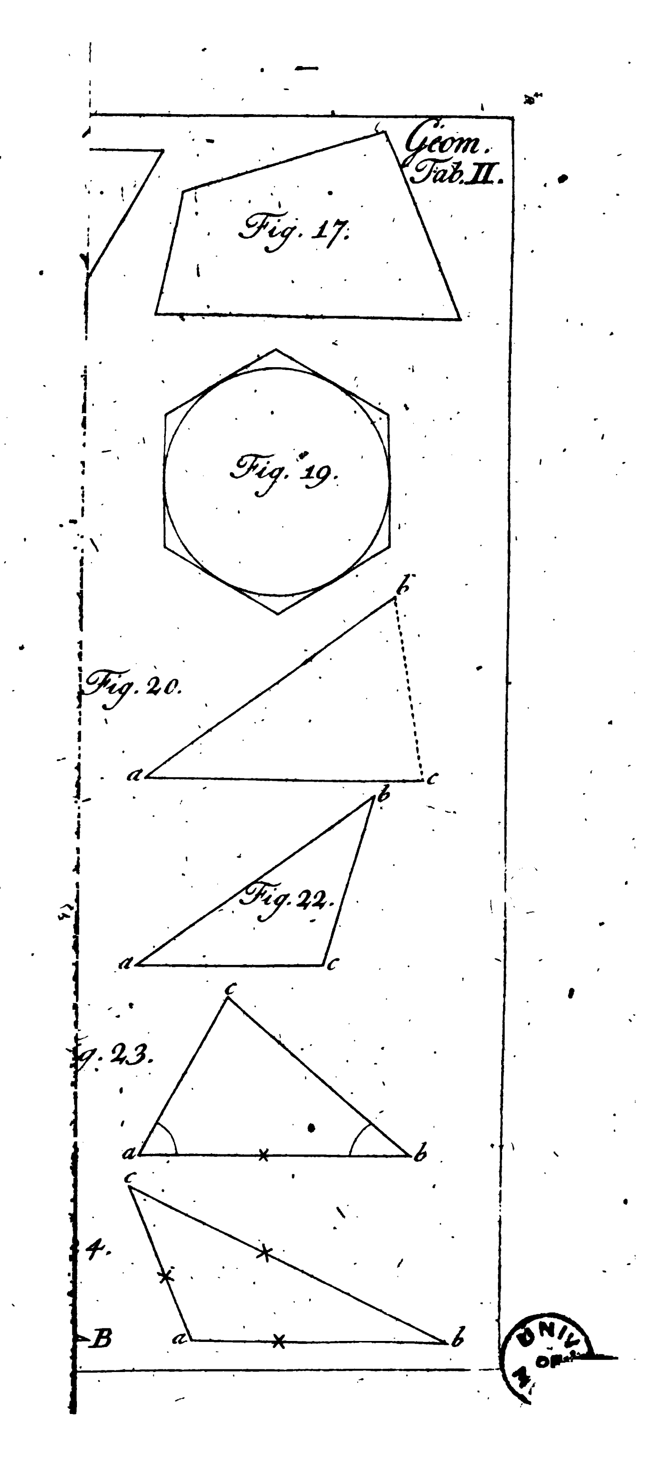
Fig. 11.

Fig. 12.

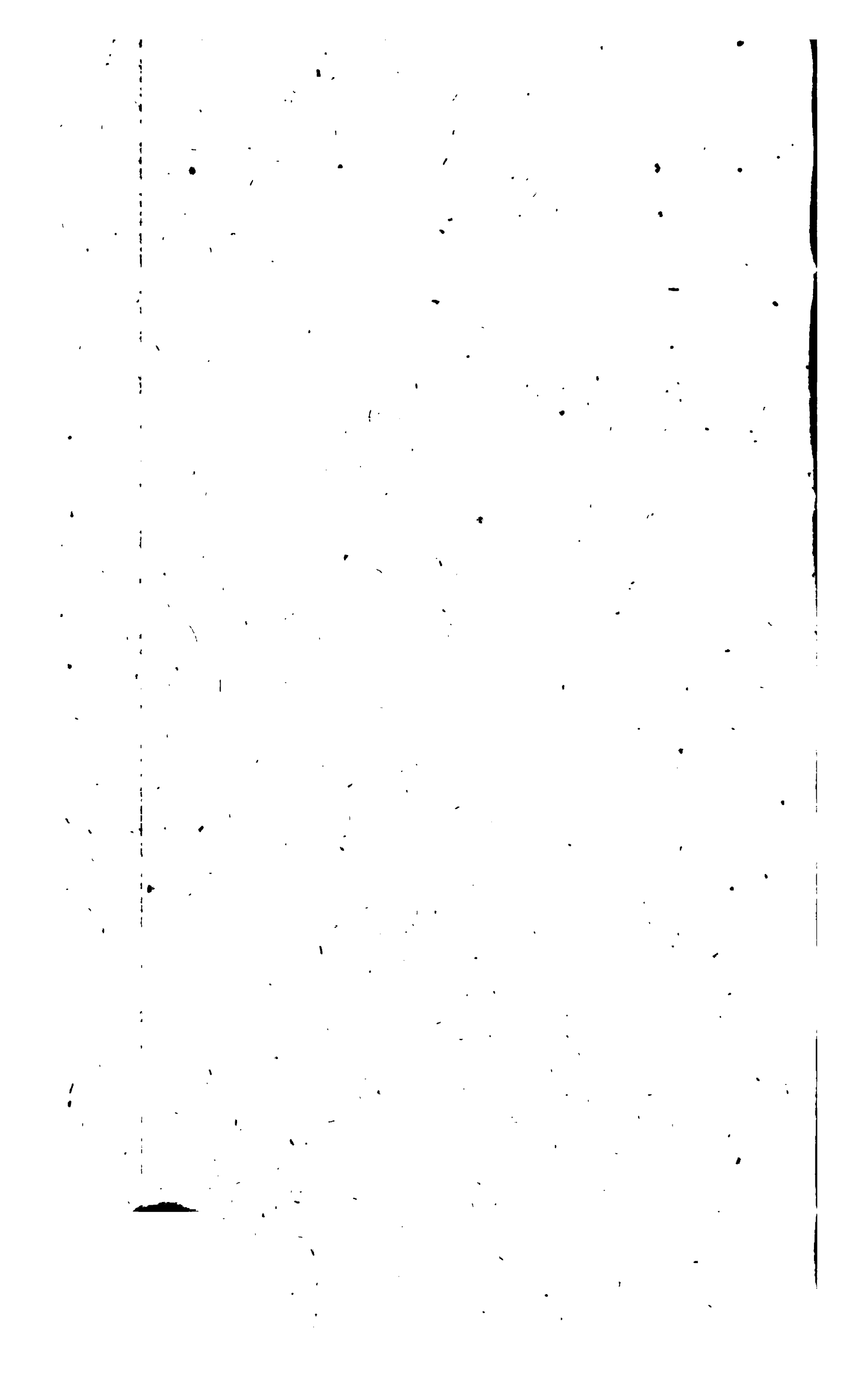
14.

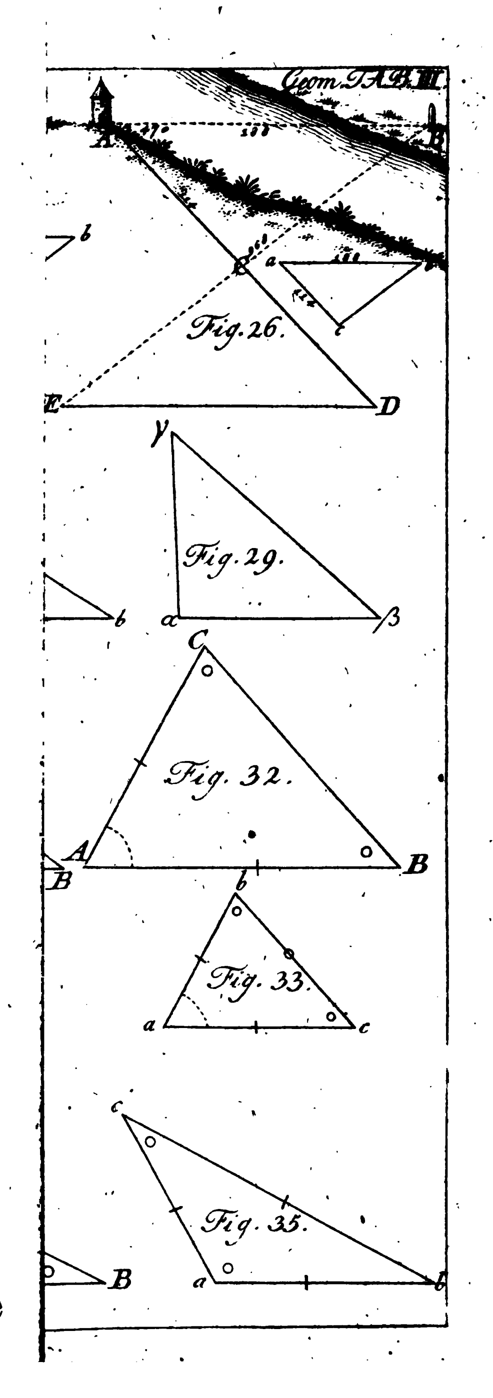
Fig. 15.

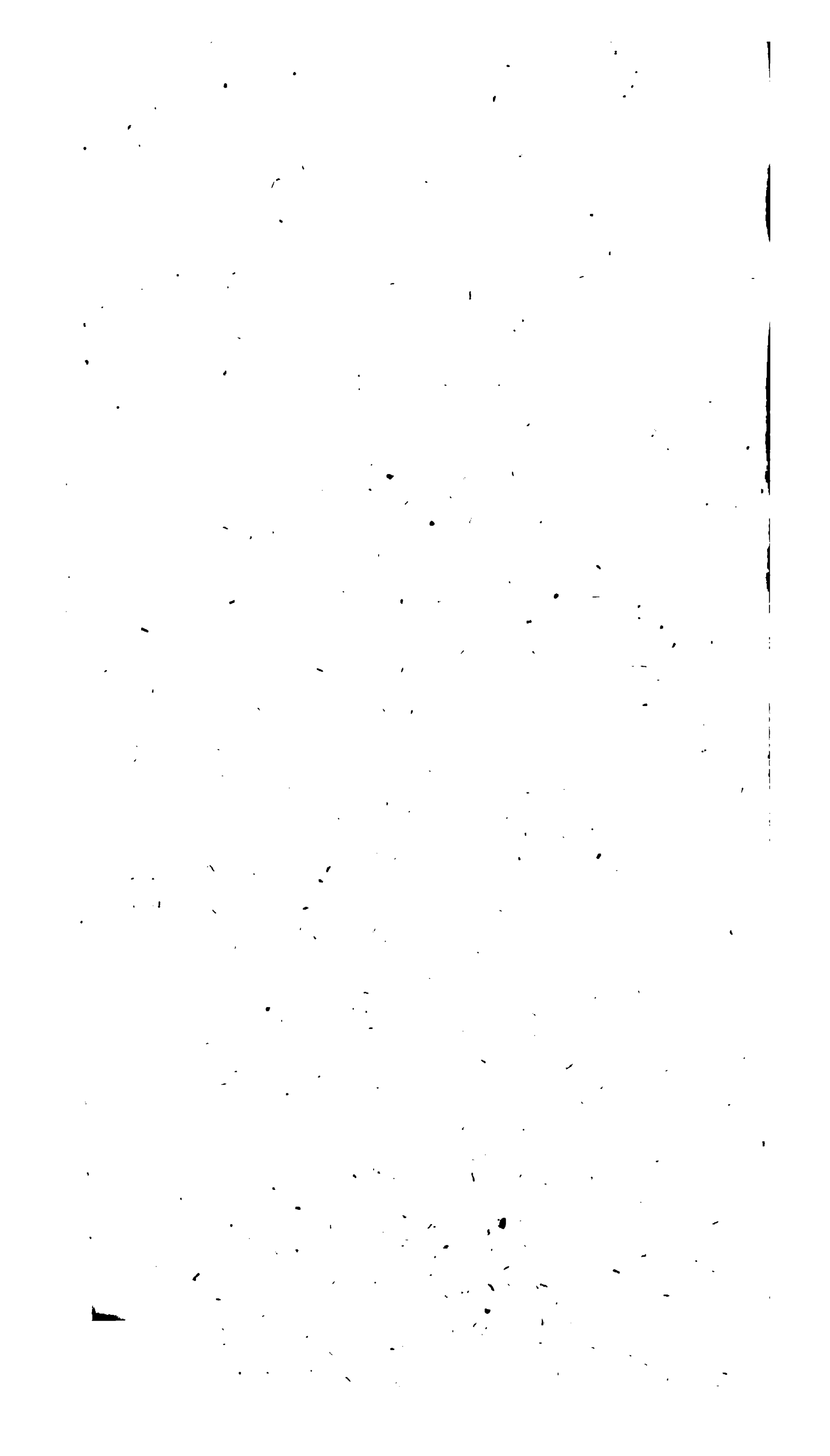


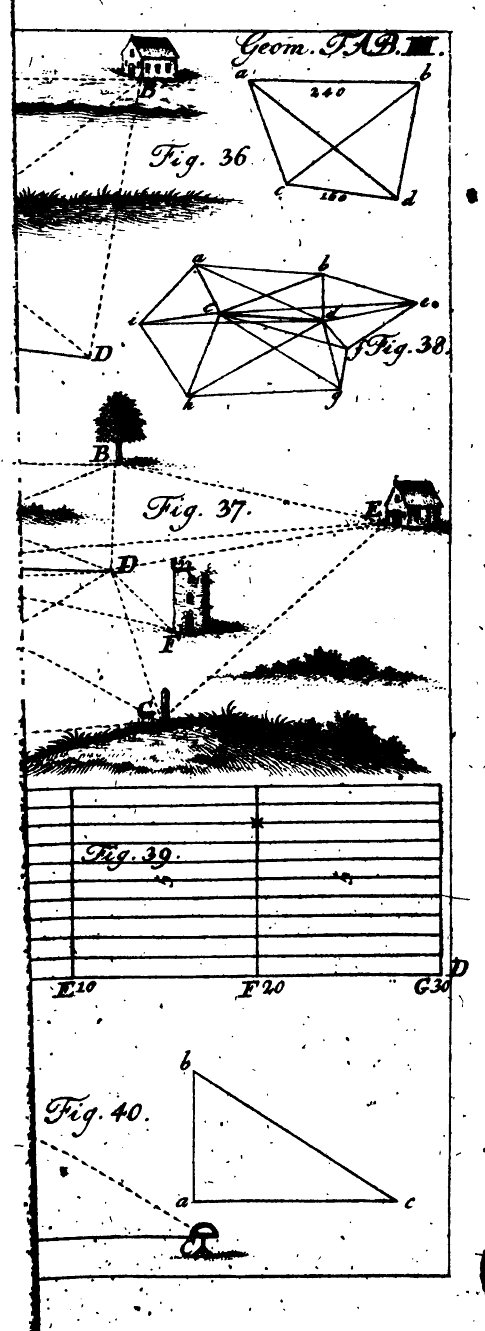


Geom.
Tab. II.
Fig. 17.
Fig. 19.
Fig. 20.
a
b
c
Fig. 22.
a
b
c
g. 23.
a
b
c
4.
a
b
c
B




Geom. TAB. III.
Fig. 26.
Fig. 29.
Fig. 32.
Fig. 33.
Fig. 35.




Geom. TAB. III.
a
b
240
Fig. 36
c
180
d
B
D
a
b
i
c
d
e
f Fig. 38
h
g
B
Fig. 37.
E
D
F
C
Fig. 39.
D
E10
F20
G30
b
Fig. 40.
a
c
C

Geom: TAB: V.

Fig. 42.

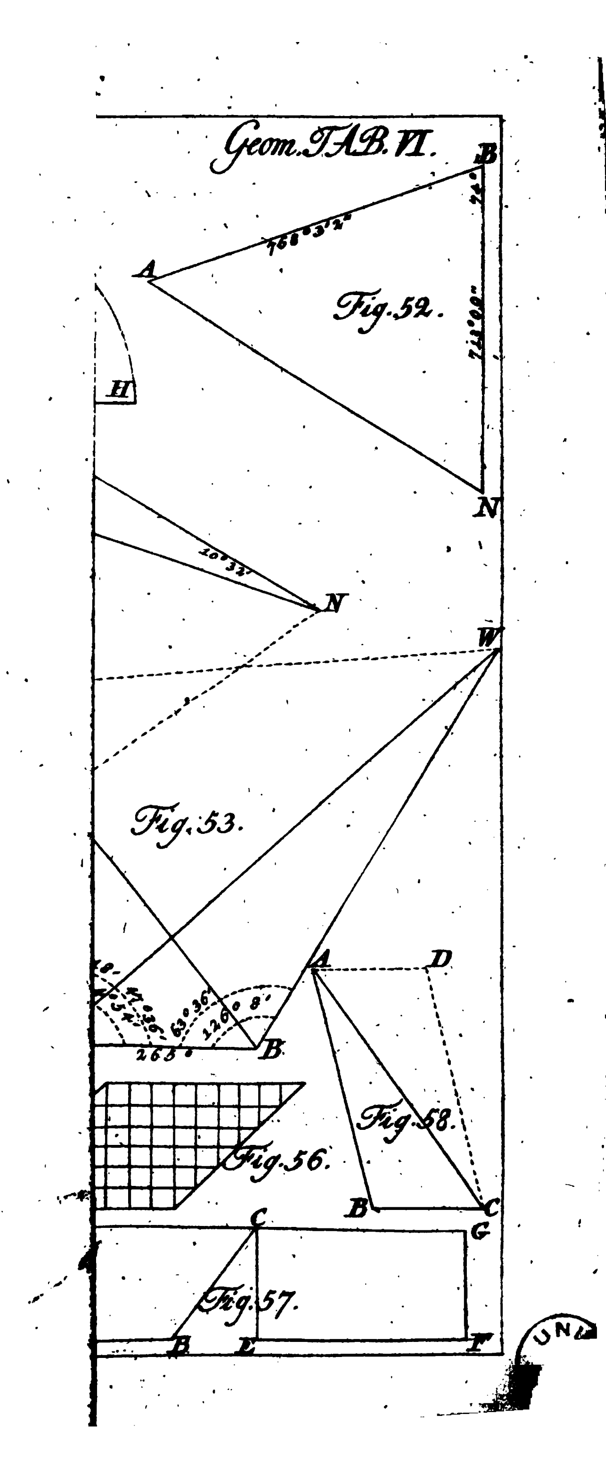
Fig. 44.

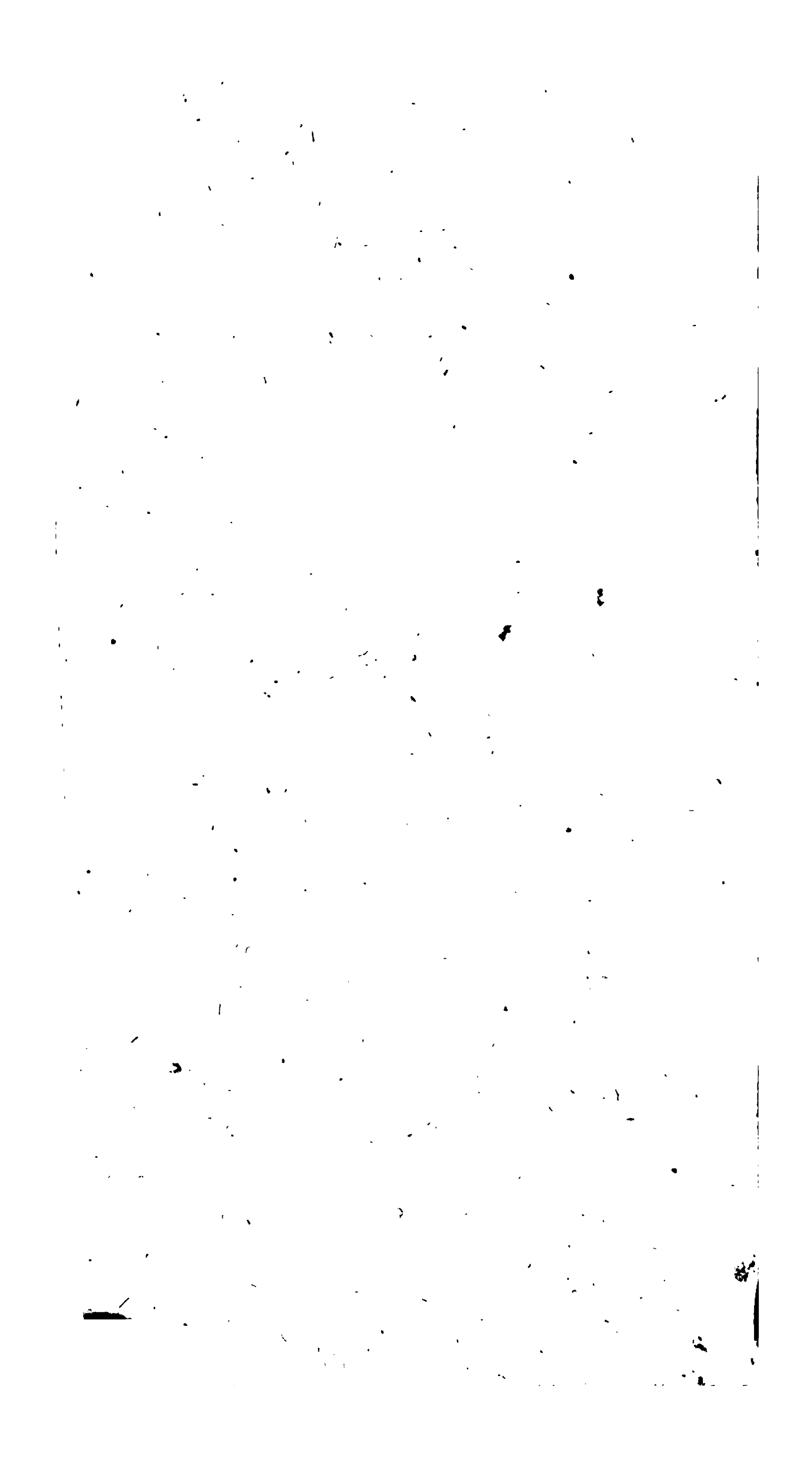
Fig. 46.

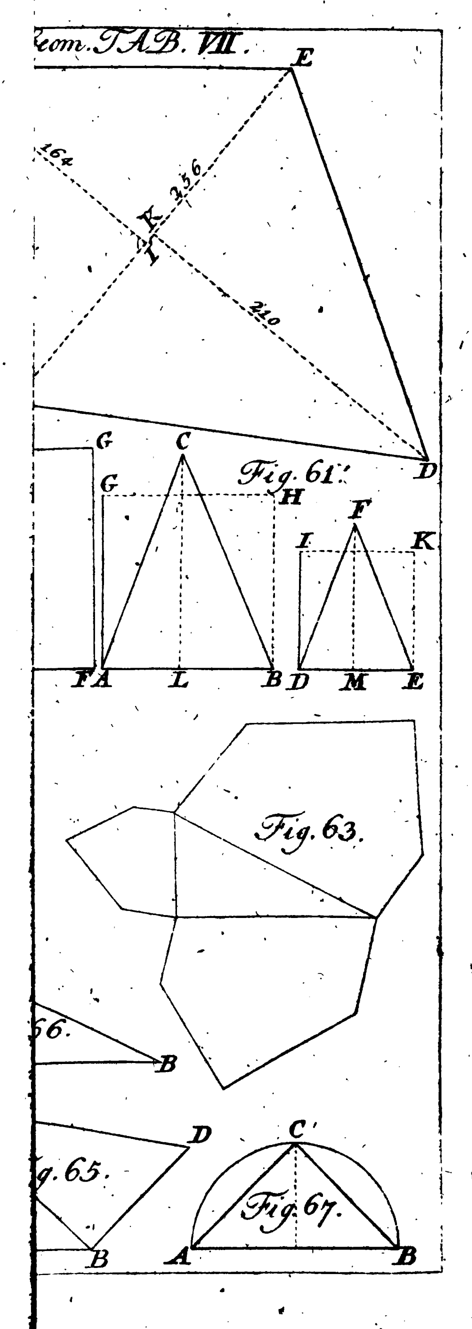
Fig. 47.

Fig. 48.

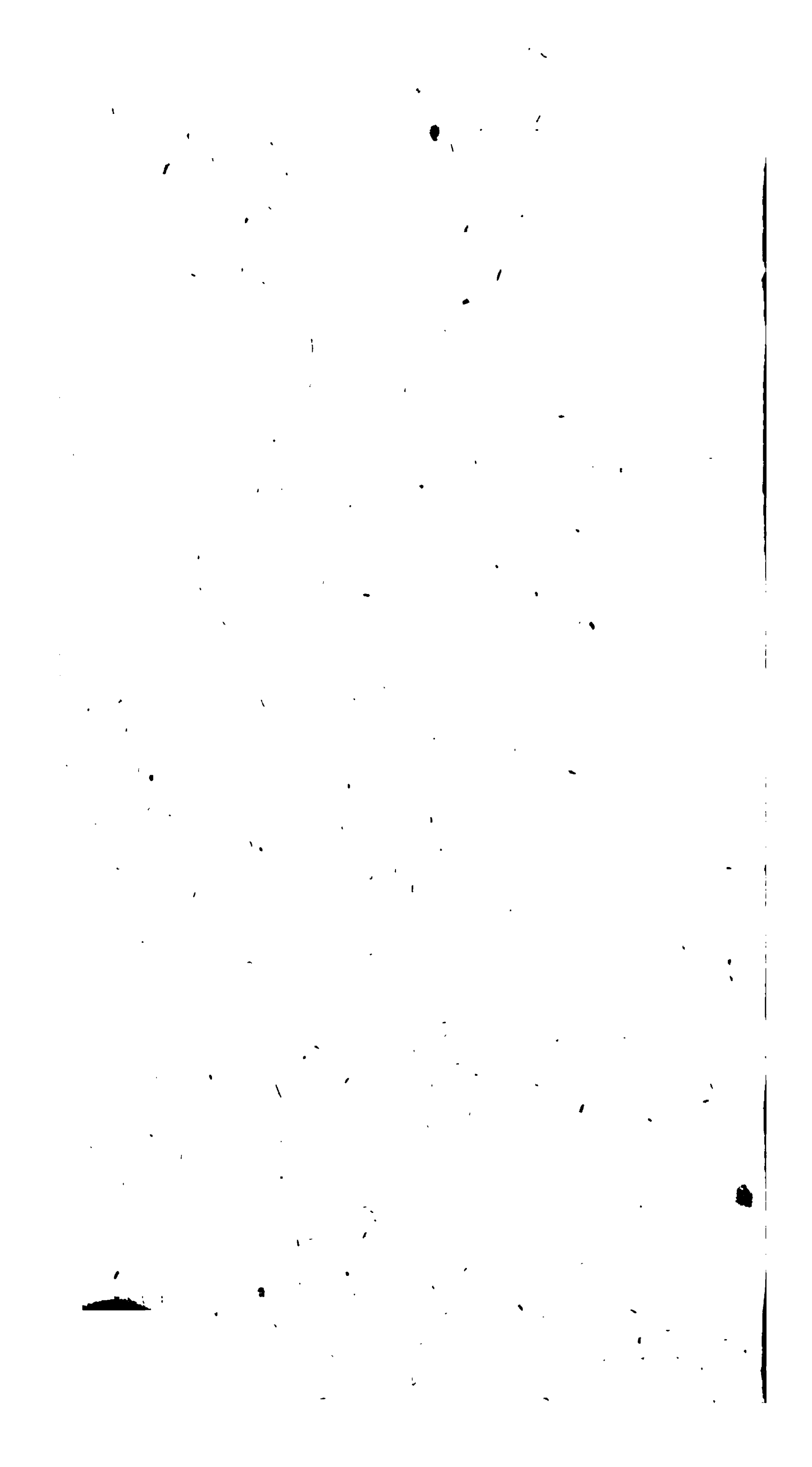
Fig. 49.

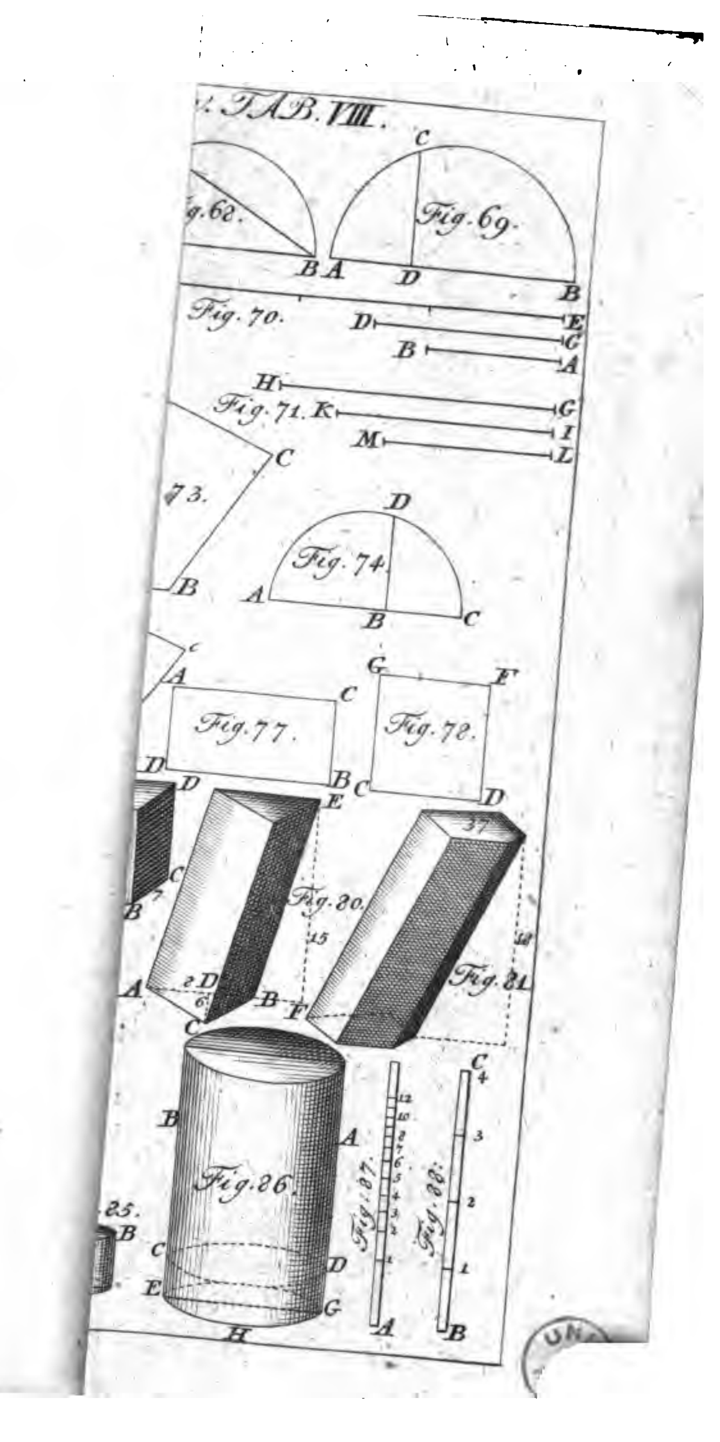

Geom. TAB. VI.
B
A
168° 3' 2"
24°
Fig. 52.
H
N
N
10° 32'
W
Fig. 53.
A
D
126° 8'
63° 36'
265°
B
Fig. 58.
Fig. 56.
B
C
C
G
Fig. 57.
B
E
F

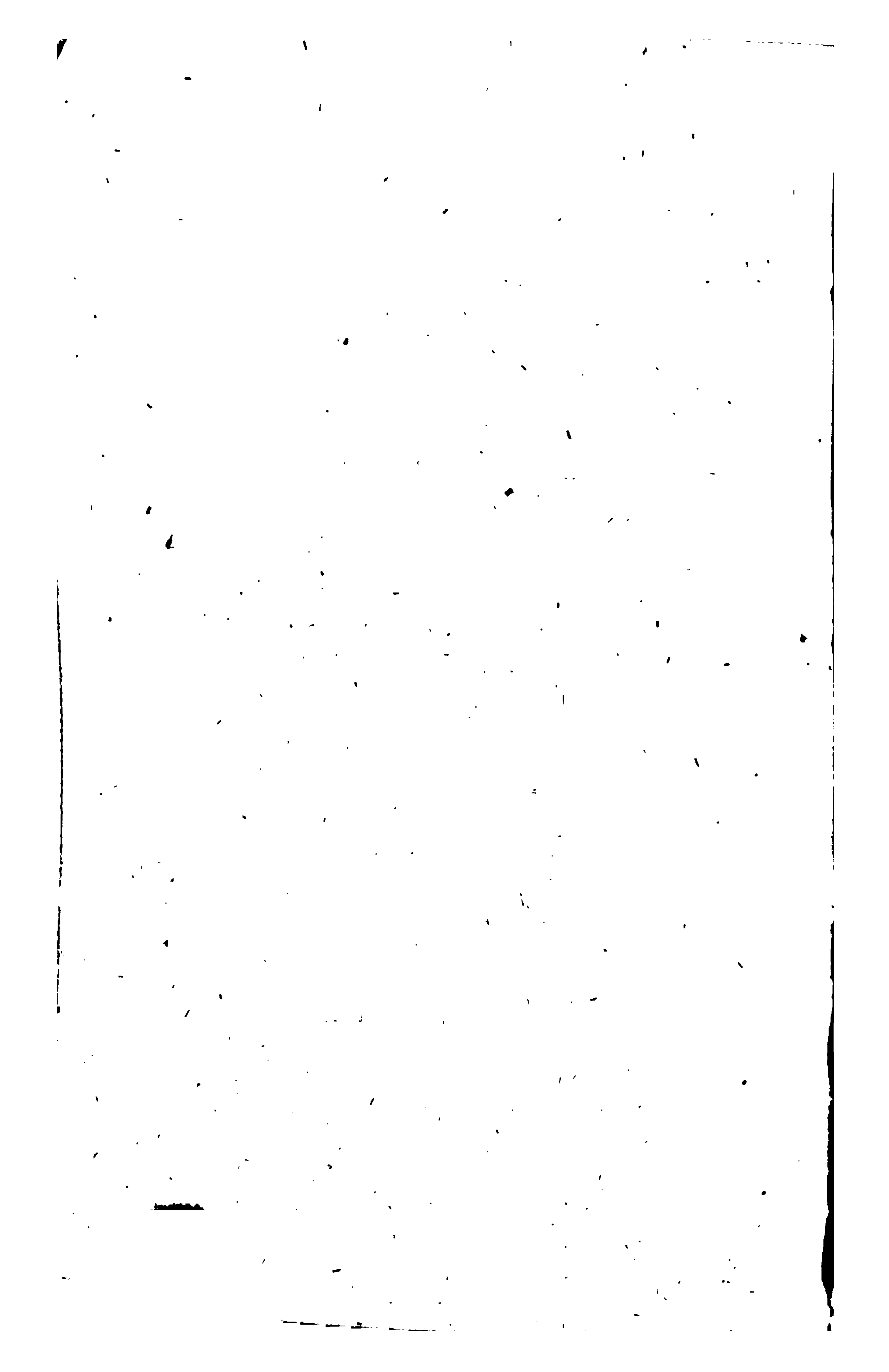


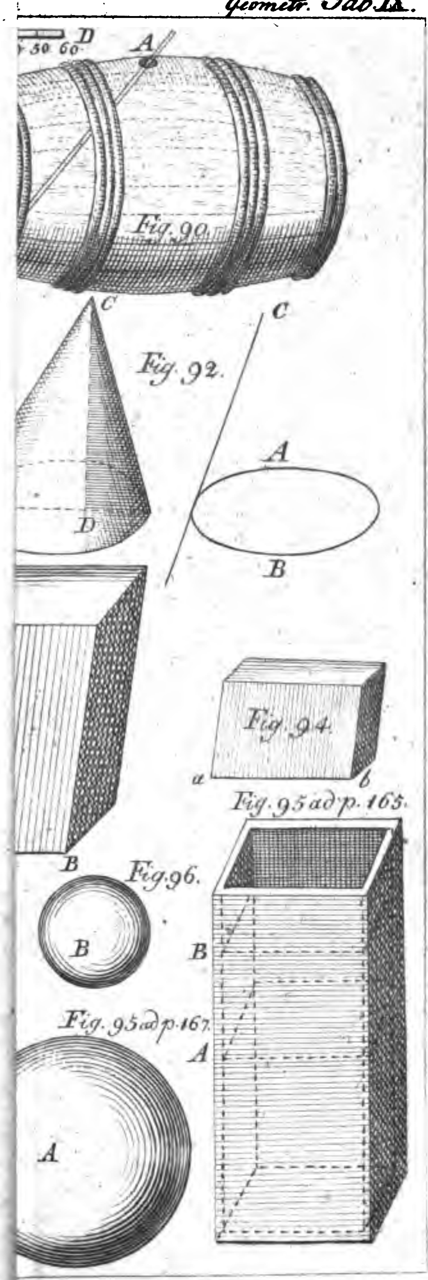


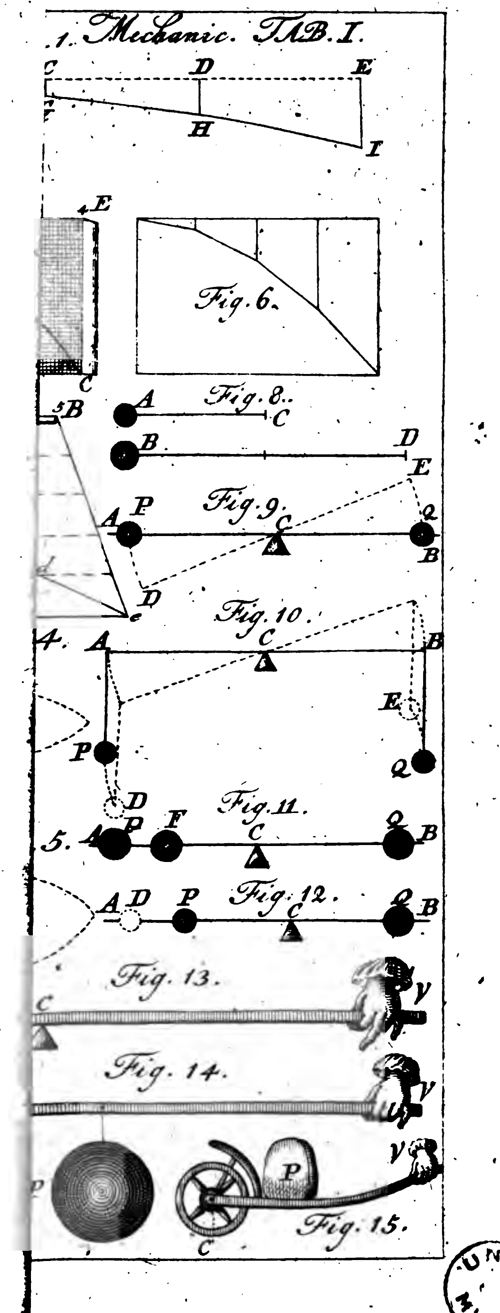
eom. TAB. VII.
E
164
K
256
I
210
D
G
C
G
H
Fig. 61.
F
I
K
F A
L
B
D
M
E
Fig. 63.
66.
B
D
g. 65.
B
C
Fig. 67.
A
B

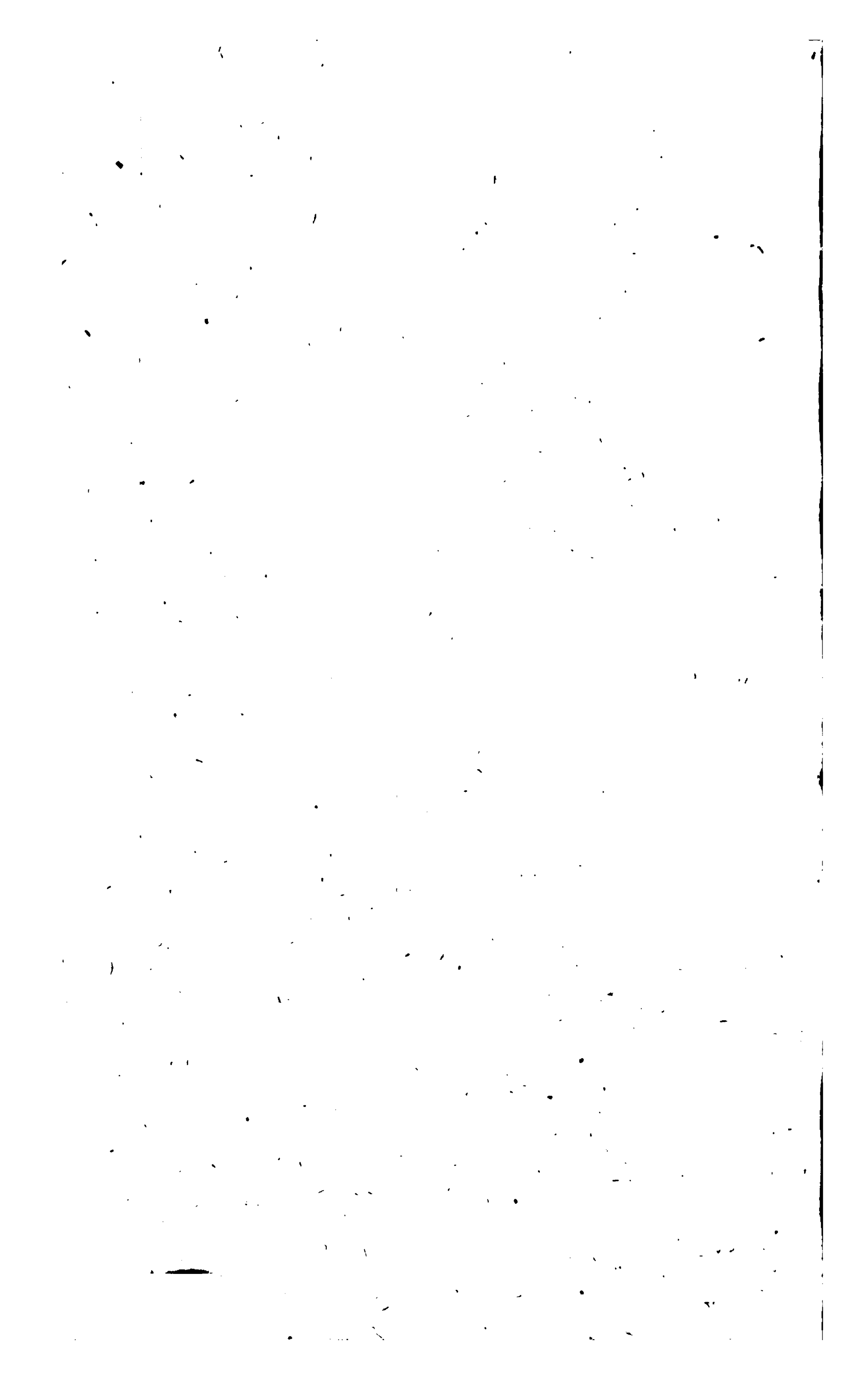


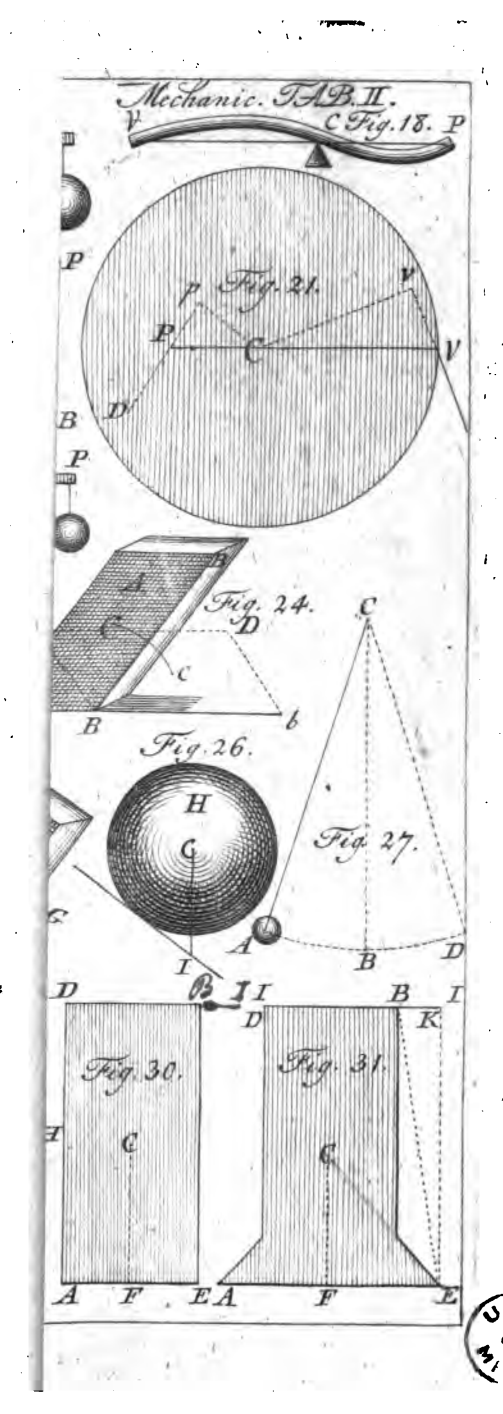

TAB. VIII.
Fig. 68.
Fig. 69.
Fig. 70.
Fig. 71.
73.
Fig. 74.
Fig. 77.
Fig. 78.
Fig. 80.
Fig. 81.
Fig. 86.
Fig. 87.
Fig. 88.
25.

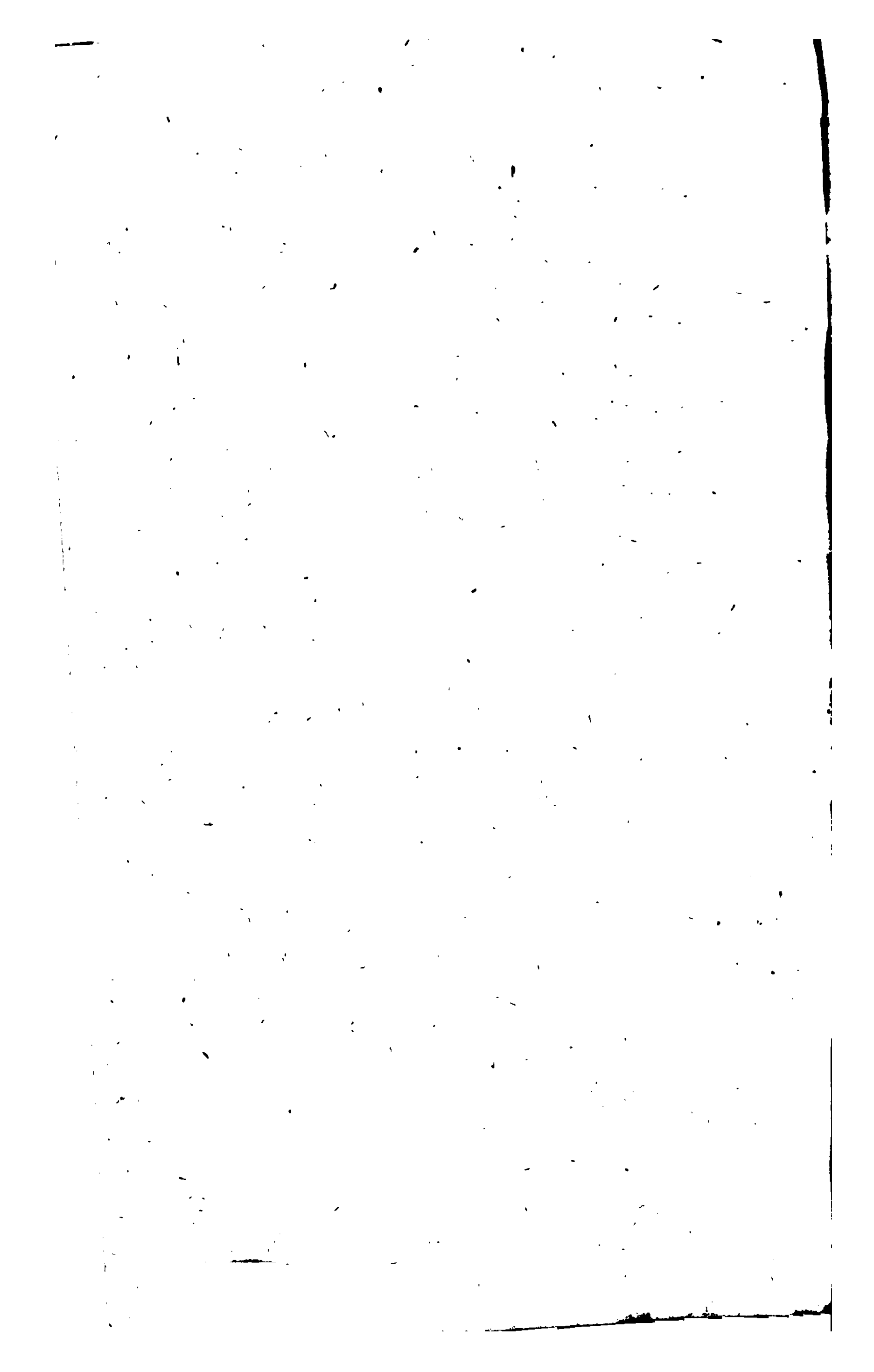


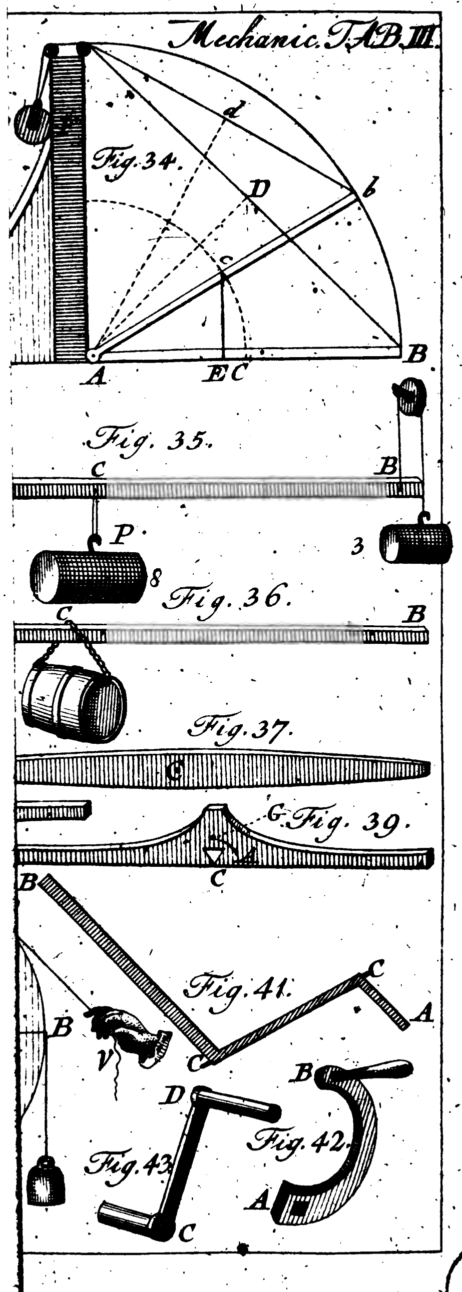

D
50 60
A
Fig. 90.
C
Fig. 92.
C
D
A
B
Fig. 94.
a
b
Fig. 95 ad p. 165.
B
Fig. 96.
B
B
Fig. 95 ad p. 167.
A
A

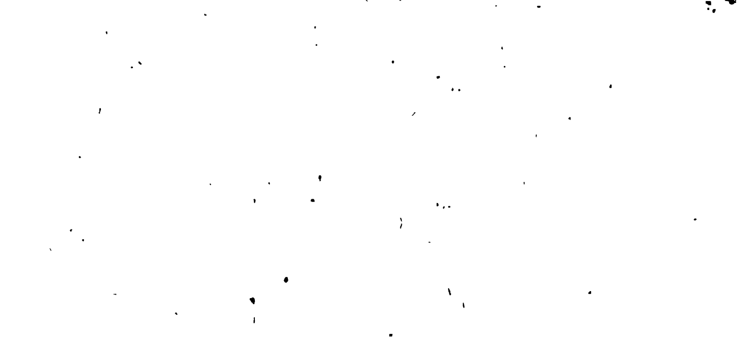

Mechanic. TAB. I.
C
D
E
H
I
E
C
Fig. 6.
B
A
Fig. 8.
C
B
D
E
Fig. 9.
A
P
C
Q
B
D
Fig. 10.
C
A
B
E
P
Q
D
Fig. 11.
A
P
F
C
Q
B
Fig. 12.
A
D
P
C
Q
B
Fig. 13.
C
γ
Fig. 14.
γ
γ
P
Fig. 15.
C

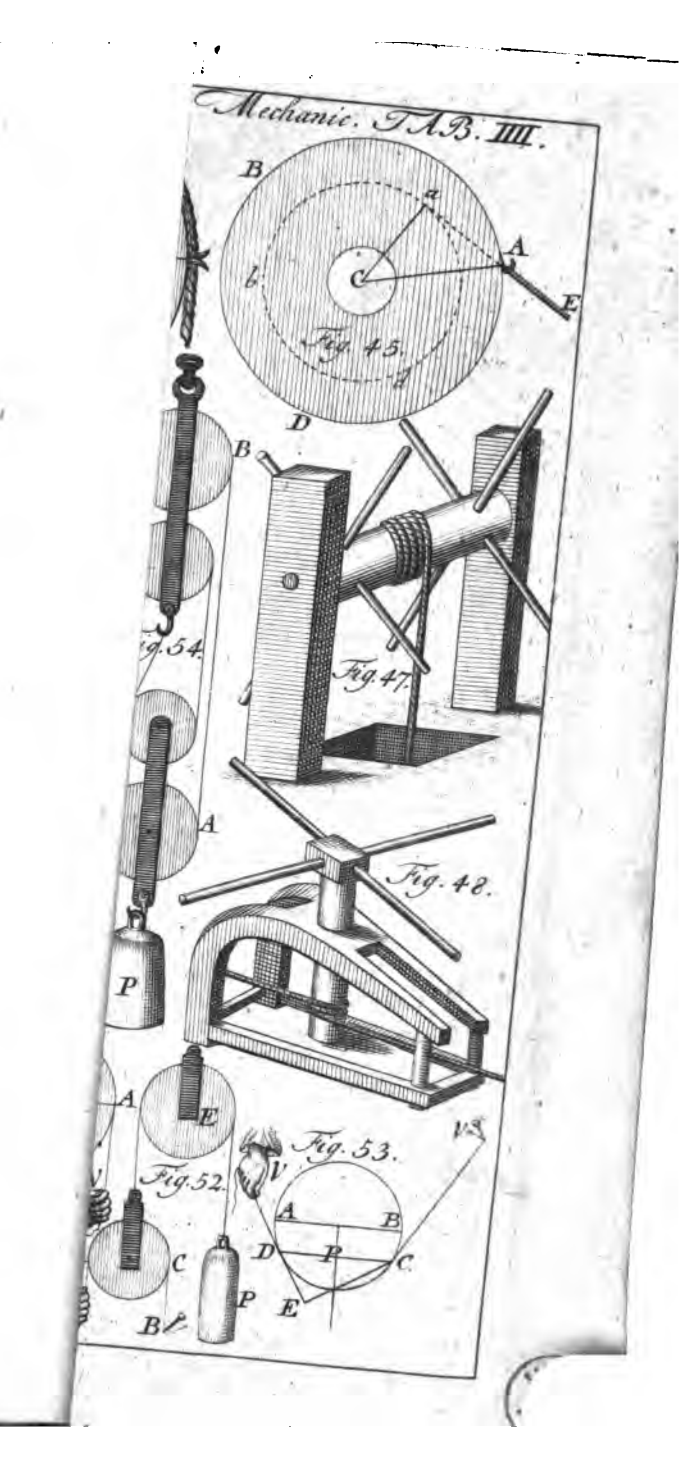


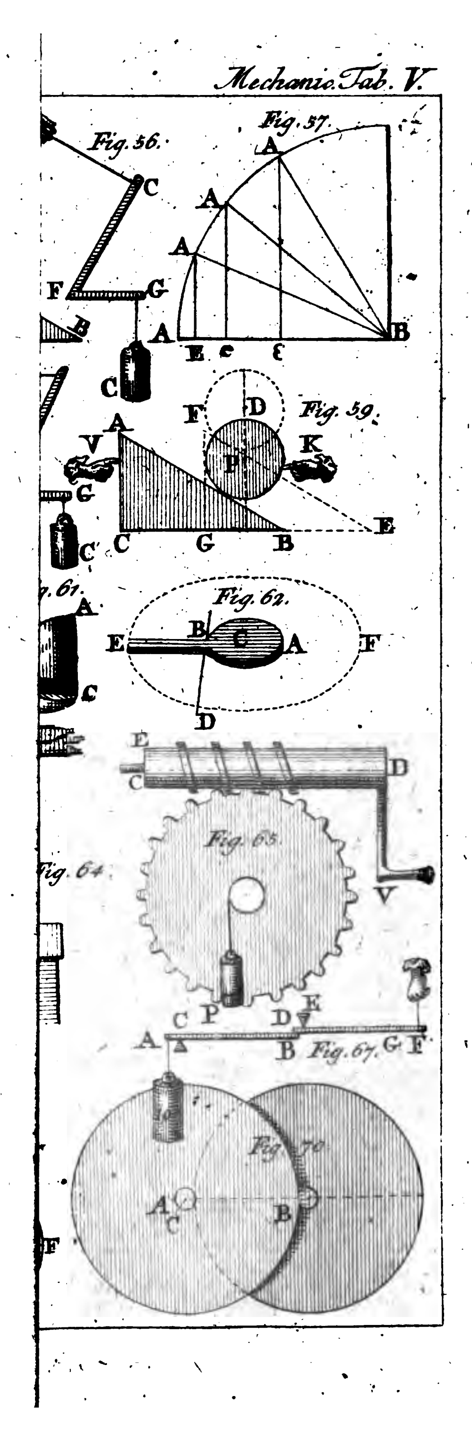

Mechanic. TAB. II.
Fig. 18.
Fig. 21.
Fig. 24.
Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 30.
Fig. 31.

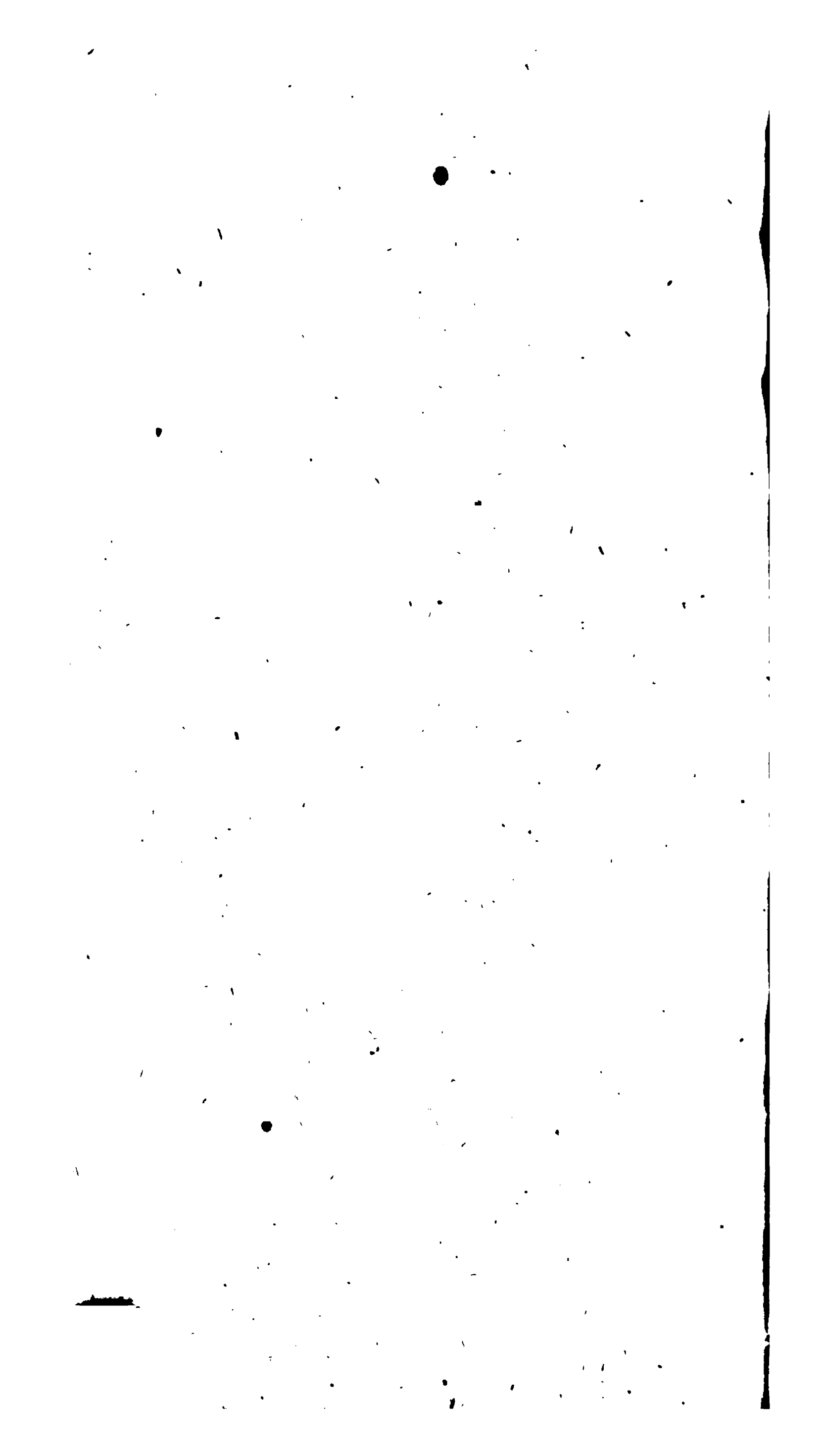



Mechanic. TAB. III.
Fig. 34.
d
D
b
A
E C
B
Fig. 35.
C
B
P
8
3
Fig. 36.
C
B
Fig. 37.
C
G Fig. 39.
C
B
Fig. 41.
C
A
B
V
C
B
D
Fig. 42.
Fig. 43.
A
C

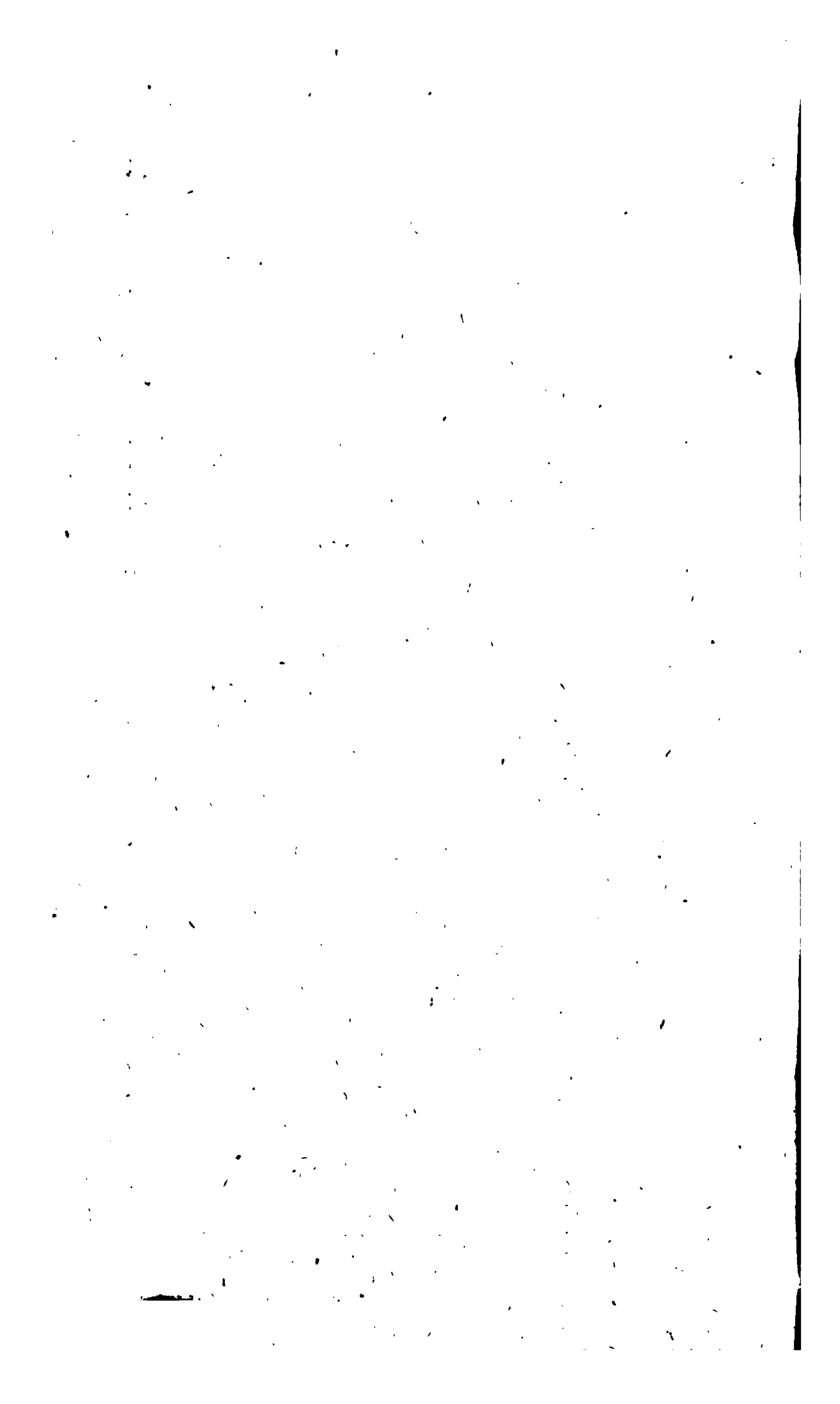



Mechanic. TAB. IIII.
B
a
A
b
C
E
Fig. 45.
d
D
B
Fig. 54.
Fig. 47.
A
Fig. 48.
A
E
Fig. 53.
V
Fig. 52.
A
B
D
P
C
C
P
E
B
P


Fig. 56.
Fig. 57.
Fig. 59.
Fig. 61.
Fig. 62.
Fig. 64.
Fig. 65.
Fig. 67.
Fig. 70.



B
Fig. 73.
V
E
A
D
B
C
Fig. 74.
Fig. 75.
C
B
A
P
P
V
g. 77.
C
A
F
C
A
A
G
Fig. 78.
Fig. 81.
pag. 326.
B
D
B
g. 82.
H
T
g. 81. pag. 332.
B



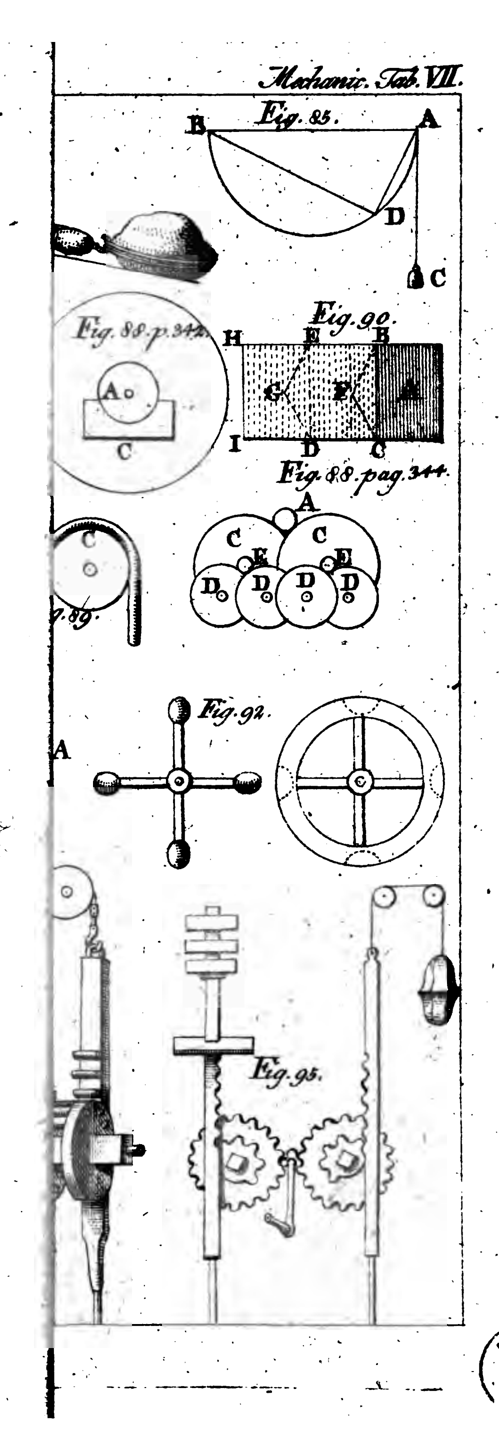
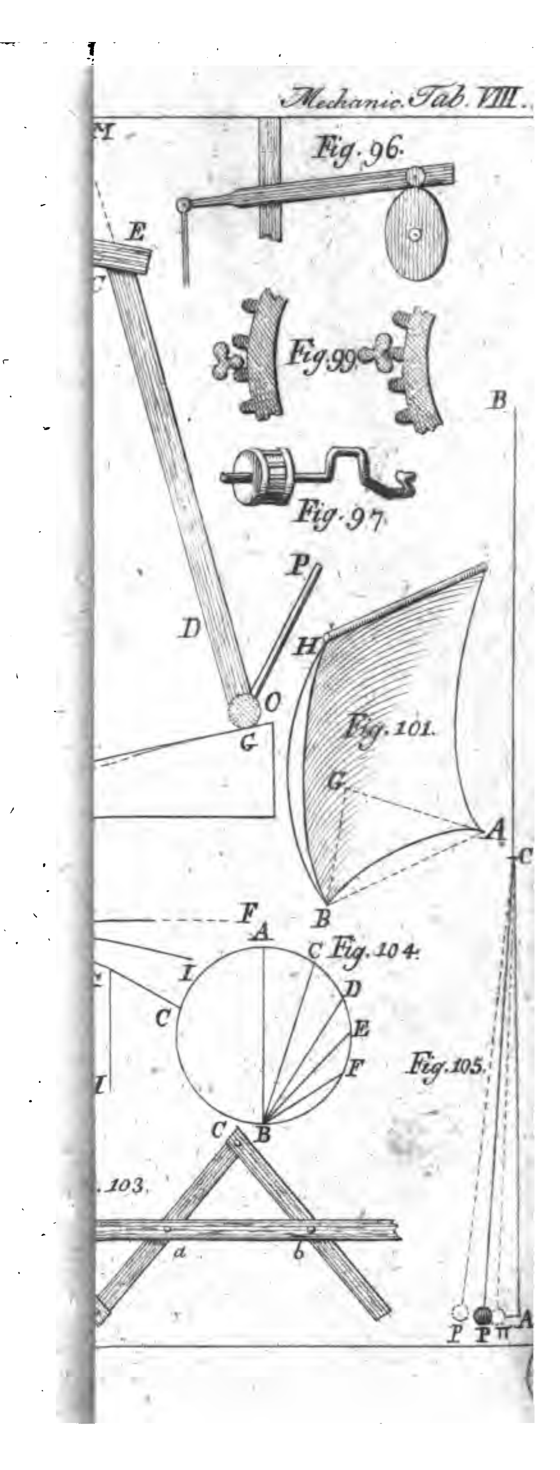


Fig. 85.
B
A
D
C
Fig. 88. p. 344.
A
C
Fig. 90.
H
E
B
G
F
A
I
D
C
Fig. 88. pag. 344.
A
C
C
E
E
D
D
D
D
g. 89.
Fig. 92.
A
Fig. 95.


Fig. 96.
Fig. 99
Fig. 97
Fig. 101.
Fig. 104.
Fig. 105.
. 103.
M
E
C
D
P
H
O
G
A
B
C
F
A
C
D
E
F
I
C
I
C
B
a
b
P
P
π
A



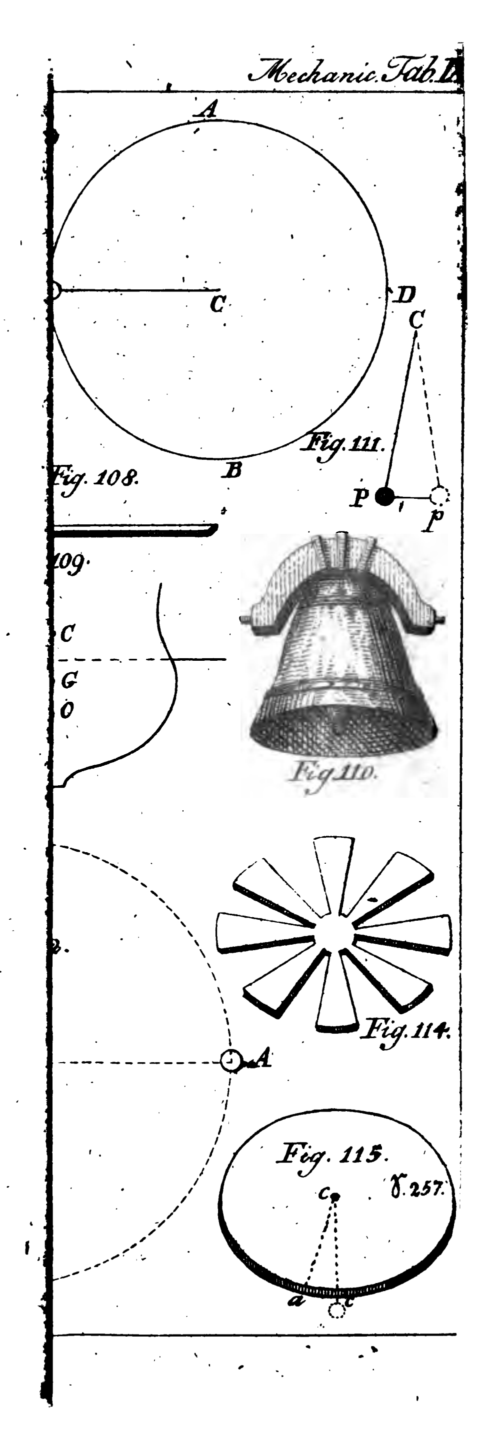


Fig. 108.

109.

Fig. 110.

Fig. 111.

Fig. 114.

Fig. 115.